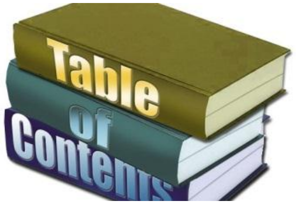
به نام خدا

درس ۳۴: پیاده سازی الگوریتم تجزیه بندرز

Microsoft® Visual Studio®

www.behinehyab.com

فهرست مطالب



آشنایی با تجزیه بندرز

در این درس به دنبال پیاده سازی الگوریتم تجزیه بندرز در برنامه ویژال بیسیک هستیم. در ابتدا مروری بر الگوریتم تجزیه بندرز می کنیم. سپس یک مدل بهینه سازی را با استفاده از این الگوریتم حل می کنیم و در نهایت این مدل را با استفاده از زبان ویژال بیسیک با الگوریتم بندرز برنامه نویسی می کنیم.

آشنایی با تجزیه بندرز

این روش را ریاضی دان آلمانی، ژاکوب بندرز، برای حل مسائل برنامه ریـزی مختلط MIP طراحی کرده است.

در ابتدا مسئله MIP به دو زیر مسئله تقسیم مـی شـود و سـپس تبـادل پاسـخ های بین این دو زیر مسئله تا زمان رسیدن به پاسخ نهایی مسئله اصلی صورت می گیرد. فرض کنید مسئله MIP زیر داده شده است که در آن متغیرهای x متغیرهای پیوسته غیرمنفی و متغیرهـای y متغیرهـای عـدد صـحیح غیرمنفـی هستند.

$$MIP(I):\begin{cases} Min\ Z = c_1 x + c_2 y \\ s.t. \\ A_1 x + A_2 y \ge b \\ x, y \ge 0, y \in \text{int} \end{cases}$$

آشنایی با تجزیه بندرز

حال فرض کنیم متغیرهای عدد صحیح y در یک مقدار صحیح غیر منفی ثابت شوند، در این صورت عبارت مربوط به y در تابع هدف زیر به یک مقدار ثابت تبدیل می شود و از تابع هدف حذف شدنی است و به مدل خطی زیر می رسیم.

$$LP(II):\begin{cases} Min\ Z = c_1 x \\ s.t. \\ A_1 x \geq b - A_2 y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

آشنایی با تجزیه بندرز

چون مدل II خطی است، پس برای آن همزاد قابل تعریف است که اگر متغیرهای دوگان آن را u فرض کنیم، مسئله همزاد متناظر با آن به صورت زیر در می آید.

$$DL(III):\left\{ Max\ u\left(b - A_2 y\right) \right.$$

$$s.t.$$

$$\boxed{\begin{aligned} & uA_1 \le c_1 \\ & u \ge 0 \end{aligned}} \rightarrow U$$

آشنایی با تجزیه بندرز

در مسئله $DL(III)$ اگر فضای پاسخ را U در نظر بگیریم:

۱- U مستقل از متغیر y است.

۲- اگر U تهی باشد، مسئله $DL(III)$ دارای پاسخ موجه نیست. آنگاه طبق نظریه همزادی مسئله $LP(II)$ یا ناموجه است و یا بیکران. ولی اگر مسئله $LP(II)$ بیکران باشد، به این معنی است که مسئله اصلی $MIP(I)$ بیکران است اما چون در مسائل عملی و واقعی $MIP(I)$ بیکران نیست، پس فرض زیر را در مورد این مسئله خواهیم داشت:

فرض ۱: فضای پاسخ U تهی نیست و مسئله $DL(III)$ موجه است.

آشنایی با تجزیه بندرز

۳- چون مسئله DL(III) مستقل از y است و طبق فرض (۱) غیرتهی است، پس حداکثر مقدار تابع هدف یعنی max u(b-A2y) یا روی نقاط گوشه U اتفاق می افتد و یا در امتداد یکی از شعاع های حدی یا extreme raysفضای U افزایش نامحدود می یابند. برای جلوگیری از بیکران شدن پاسخ این مسئله فرض زیر را اضافه می کنیم.

فرض ۲: فضای پاسخ Uمحدود است و مسئله DL(III) دارای پاسخ بهینه محدود است و بیکران نیست، پس دارای شعاع حدی نیست.

آشنایی با تجزیه بندرز

البته حتی اگر در مسئله $\mathrm{DL(III)}$ فضای پاسخ بیکران بود نیز روش بندرز استفاده می شود زیرا برای تحقق فرض (۲) می توان محدودیتی بدیهی نظیر مجموع تمام متغیرها کوچکتر یا مساوی یک مقدار بزرگ به صورت به مسئله اضافه شود.

$$\sum u_i \le M$$

آشنایی با تجزیه بندرز

با توجه به فرضیات (۱) و (۲) می توان گفت پاسخ بهینه محدود DL(III) روی نقاط گوشه U خواهد بود و این مسئله را می توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$DL(IV): \begin{cases} Max\ u^p\left(b - A_2 y\right) \\ u^p \in \{\text{Corner point of } U\} \\ p = 1, 2, \ldots, P \end{cases}$$

آشنایی با تجزیه بندرز

کار ما بـدین صـورت خواهـد بـود کـه تمـام نقـاط گوشـه مسـئله DL(IV) را شمارش کرده، از بین آن ها بهترین را انتخاب کنیم، امـا شـمارش تمـام نقـاط گوشه بسیار وقت گیر است و تعداد محدودیت های جبری برای تولید آن مـی توان بی شمار شود. پس باید تمهیدی اندیشید تا با کمتـرین بررسـی در نقـاط گوشه آن به پاسخ بهینه رسید.

از نظریه دوگانگی در برنامه ریزی خطی می دانـیم کـه طبـق خاصـیت ضـعیف دوگانگی داریم:

$$\underset{LP(II)}{c_1x} \geq \underbrace{\max u^p\left(b - A_2y\right)}_{DL(IV)} \xrightarrow{+c_2y} c_1x + c_2y \geq c_2y + \max_{u^p} u^p\left(b - A_2y\right)$$

$$\longrightarrow Z \geq c_2y + \max_{u^p} u^p\left(b - A_2y\right)$$

در روابط بالا، c_2y را که پیشتر کم کرده، به دو طرف نامساوی اضافه کردیم و در نهایت نتیجه می گیریم مقدار تابع هدف مسئله اصلی $\mathrm{MIP(I)}$ دارای یک حد پایینی است که به ازای شمارش نقاط گوشه فضای U به دست می آید. پس می توان مسئله $\mathrm{MIP(I)}$ را به صورت زیر نوشت:

$$MIP(I):\begin{cases} Min\ Z = c_1x + c_2y \\ s.t. \\ A_1x + A_2y \ge b \\ x, y \ge 0, y \in \text{int} \end{cases}$$

$$IP':\begin{cases} Min\ Z \\ s.t. \\ Z \ge c_2y + u^p\left(b - A_2y\right) \\ \begin{cases} p = 1, 2, \dots, P \\ p \in P \\ y \in \text{int}, y \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

آشنایی با تجزیه بندرز

مسئله IP' یک مسئله عدد صحیح خالص است. به عبارت دیگر بـه جـای حـل مسئله $MIP(I)$ که یک مسئله عدد صحیح مخلوط بود، یک مسئله را کـه عـدد صحیح خالص است، حل می کنیم. البته در عمل به جـای شـمارش کامـل تمـام نقاط گوشه مسئله $DL(IV)$ که هر کدام یک نا معادله را به مسئله IP' اضافه می کنند، امیدواریم با تنها یک تعداد از این نقـاط گوشـه بتـوانیم پاسـخ بهینـه مسئله اصلی $MIP(I)$ را تولید کنیم.

الگوریتم تجزیه بندرز

گام ۰: فرض کنید مسئله MIP زیر داده شده است که در آن متغیرهای x متغیرهای پیوسته غیرمنفی و y متغیرهای عدد صحیح غیرمنفی هستند:

$$MIP:\begin{cases} Min\ Z = c_1 x + c_2 y \\ s.t. \\ A_1 x + A_2 y \geq b \\ x, y \geq 0, y \in \text{int} \end{cases}$$

الگوریتم تجزیه بندرز

گام شروع: با یک پاسخ موجه دلخواه ($u=u_0$ که می تواند ضرورتا گوشه نیز نباشد) برای فضای موجه زیر شروع کنید.

$$\begin{cases} uA_1 \leq c_1 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

الگوریتم تجزیه بندرز

گام تکراری kام. مسئله (IP) زیر را با افزودن نامعادله جدیـد مربـوط بـه u^k حل کنید:

$$IP:\begin{cases} Min\ Z \\ s.t. \\ Z \geq c_2 y + u^k\left(b - A_2 y\right) \quad k = 0,1,2,\ldots \\ y \in \text{int}, y \geq 0 \end{cases}$$

الگوریتم تجزیه بندرز

پاسخ آن را z^k و y^k بنامید.

سپس مسئله (DL) زیر را به ازای $y=y^k$ حل کنید.

$$(DL)\begin{cases} Max\ w = u\left(b - A_2 y\right) \\ s.t. \\ uA_1 \le c_1 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

الگوریتم تجزیه بندرز

پاسخ بهینه آن را u^{k+1} و w^{k+1} بنامید.

گام توقف: اگر $z^k - c_2 y^k \geq u^{k+1}(b - A_2 y^k)$ شد، متوقف شوید در غیر این صورت $k \rightarrow k+1$ و به گام تکراری برگردید.

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

مثال: با استفاده از الگوریتم بندرز مسئله زیر را حل کنید.

$$MIP:\begin{cases} Min\ Z = 5x + 2y_1 + 2y_2 \\ s.t. \\ x + 3y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ 4x - y_1 + y_2 \geq 7 \\ 2x + y_1 - y_2 \geq 4 \\ x \geq 0, y_1, y_2 \geq 0, \text{int} \end{cases}$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

در این مثال زیرمسائل تولید شده در روش بندرز به صورت زیر است:

$$LP(II):\begin{cases} Min\ Z = 5x \\ s.t. \\ x \ge 5-3y_1-2y_2 \\ 4x \ge 7+y_1-y_2 \\ 2x \ge 4-y_1+y_2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$DLP(III)\begin{cases} Max\ u(b-A_2y) \\ s.t. \\ uA_1 \le c_1 \\ u \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max\ u_1(5-3y_1-2y_2)+u_2(7+y_1-y_2)+u_3(4-y_1+y_2) \\ s.t. \\ \boxed{\begin{array}{l} u_1+4u_2+2u_2 \le 5 \\ u \ge 0 \end{array}} \rightarrow U \end{cases}$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

اکنون سعی می کنیم به جای شمارش تمام نقاط گوشه U، ان ها را یکی یکی شمارش و وارد مسئله کنیم و به ازای هر یک از آن ها نامعادله ای را در مسئله IP اضافه نماییم. حتی می توان به جای نقطه گوشه از یک پاسخ موجه فضای U نیز شروع کرد.

ابتدا با یک پاسخ موجه گوشه نظیر $u^{(0)}=(0,0,0)$ برای فضای پاسخ زیر شروع می کنیم.

$$\begin{cases} u_1 + 4u_2 + 2u_3 \leq 5 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

داریم:

$$\begin{cases} Min\ Z \\ Z \geq c_2 y + u^{(0)}\left(b - A_2 y\right) \\ y \geq 0, \text{int} \end{cases} \xrightarrow{u^{(0)}=(0,0,0)} \begin{cases} Min\ Z \\ Z \geq 2y_1 + 2y_2 \Rightarrow y^{(0)} = (0,0), Z^{(0)} = 0 \\ y_1, y_2 \geq 0, \text{int} \end{cases}$$

$$y^{(0)} = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} w^{(1)} = Max\ 5u_1 + 7u_2 + 4u_3 \\ s.t. \\ u_1 + 4u_2 + 2u_3 \leq 5 \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow w^{(1)} = 25, u^{(1)} = (5,0,0)$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

حال به بررسی شرط توقف می پردازیم:

$$w^{(1)} = 25 > Z^{(0)} - c_2 y^{(0)} = 0 - (2,2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Go forward}$$

$$\mathrm{u}^{(1)} = (5,0,0) \Rightarrow \begin{cases} Min\ Z \\ Z \ge 2y_1 + 2y_2 \\ Z \ge 25 - 13y_1 - 8y_2 \\ y_1, y_2 \ge 0, \text{int} \end{cases} \Rightarrow Z^{(1)} = 4, y^{(1)} = (2,0)$$

$$y^{(1)} = (2,0) \Rightarrow \begin{cases} w^{(2)} = Max\ -u_1 + 9u_2 + 2u_3 \\ s.t. \\ u_1 + 4u_2 + 2u_3 \le 5 \\ u_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases} \Rightarrow w^{(2)} = 11.25, u^{(2)} = (0,1.25,0)$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

حال به بررسی شرط توقف می پردازیم:

$$w^{(2)}=10>Z^{(1)}-c_2y^{(1)}=4-(2,2)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow \text{Go forward}$$

$$u^{(2)}=(0,1.25,0)\Rightarrow\begin{cases}Min\ Z\\ Z\geq 2y_1+2y_2\\ Z\geq 25-13y_1-8y_2\\ Z\geq 8.75+3.25y_1+0.75y_2\\ y_1,y_2\geq 0,\text{int}\end{cases}\Rightarrow Z^{(2)}=10.25, y^{(2)}=(0,2)$$

$$y^{(2)}=(0,2)\Rightarrow\begin{cases}w^{(3)}=Max\ u_1+5u_2+6u_3\\ s.t.\\ u_1+4u_2+2u_3\leq 5\\ u_i\geq 0, i=1,2,3\end{cases}\Rightarrow w^{(3)}=15, u^{(3)}=(0,0,2.5)$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

حال به بررسی شرط توقف می پردازیم:

$$w^{(3)} = 15 > Z^{(2)} - c_2 y^{(2)} = 10.25 - (2,2)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 6.25 \Rightarrow \text{Go forward}$$

$$u^{(3)} = (0,0,2.5) \Rightarrow \begin{cases} Min\ Z \\ Z \geq 2y_1 + 2y_2 \\ Z \geq 25 - 13y_1 - 8y_2 \\ Z \geq 8.75 + 3.25y_1 + 0.75y_2 \\ Z \geq 10 - 0.5y_1 + 4.5y_2 \\ y_1, y_2 \geq 0, \text{int} \end{cases} \Rightarrow Z^{(3)} = 12, y^{(3)} = (1,0)$$

$$y^{(3)} = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} w^{(4)} = Max\ 2u_1 + 8u_2 + 3u_3 \\ s.t. \\ u_1 + 4u_2 + 2u_3 \leq 5 \\ u_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases} \Rightarrow w^{(4)} = 10, u^{(4)} = (0,1.25,0)$$

حل یک مثال با الگوریتم تجزیه بندرز

حال به بررسی شرط توقف می پردازیم:

$$w^{(4)} = 10 = Z^{(3)} - c_2 y^{(3)} = 12 - (2,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \Rightarrow \text{stop}\square.$$

مراجعه به برنامه ویژال استدیو

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com