درس ۵: مسئله حمل‌ونقل

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

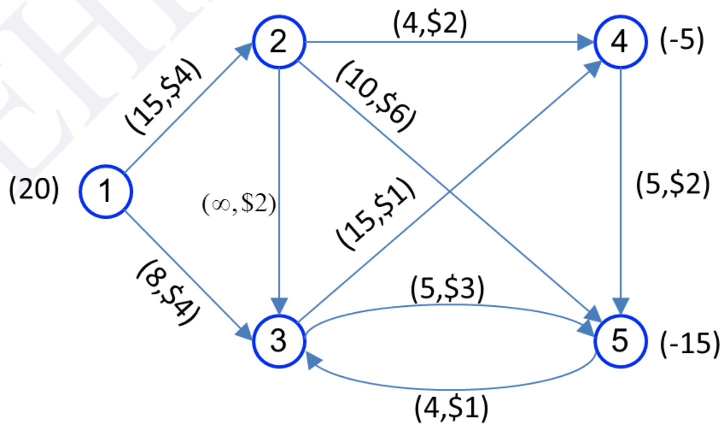
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مدل های خاص جریان در شبکه مانند مسئله حمل‌ونقل، مسیر بحرانی، مسئله جریان بیشین و مسئله کوتاهترین مسیر خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیما به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل‌ونقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلا مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره *i* به گره *j* را به صورت *i-j* نشان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان (۴-۲)، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور

هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت ∞ به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بلاخره، اعداد داخل پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در ان برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت – نشان داده می‌شوند.

در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره i به گره j با استفاده از کمان i-j است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$
\begin{array}{l}
Min \quad 4x_{12}+4x_{13}+2x_{23}+2x_{24}+6x_{25}+x_{34}+3x_{35}+2x_{45}+x_{53} \\
s.t. \\
\quad (1) \quad x_{12}+x_{13}=20 \\
\quad (2) \; -x_{12}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=0 \\
\quad (3) \; -x_{13}-x_{23}+x_{34}+x_{35}-x_{53}=0 \\
\quad (4) \; -x_{24}-x_{34}+x_{45}=-5 \\
\quad (5) \; -x_{25}-x_{35}-x_{45}+x_{53}=-15 \\
x_{12}\le 15; x_{13}\le 8; x_{23}\le \infty; x_{24}\le 4; x_{25}\le 10; x_{34}\le 15; x_{35}\le 5; x_{45}\le \infty; x_{53}\le 4.
\end{array}
$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12}+x_{13}=20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره۱ ($x_{12}+x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23}+x_{24}+x_{25}$) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱+ و ۱- اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقا در دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره‌ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و ۱- مربوطه به گره‌ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه را به n گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \quad i = 1,\ldots,n \\
&\qquad l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}
\end{aligned}
$$

مدل فوق، مدل عمومی مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابل تبدیل به فرم های ساده تری است که در ادامه برخی از این مدل های خاص را بیان می‌کنیم.

مسئله حمل‌ونقل

مسئله حمل‌ونقل نوعی مدل جریان در شبکه است که در آن نقطه واسط (مانند گره های ۲ و ۳ در شکل فرم عمومی) وجود ندارد. برای بیان فرم ریاضی مسئله حمل‌ونقل، پارامترهای زیر تعریف می‌شود.

a_i : تعداد واحدهای موجود در منبع i ($i = 1,\ldots,m$)

b_j : تعداد واحدهای مورد نیاز در مقصد j ($j = 1,\ldots,n$)

c_{ij} : هزینه حمل‌ونقل هر واحد از منبع i به مقصد j ($i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n$)

فرض می‌شود که مجموع کل تعداد واحدهای موجود در منابع با تعداد واحدهای مورد نیاز در مقاصد برابر باشند، یعنی:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

اگر فرض فوق برقرار نباشد، با اعمال تغییراتی می‌توان فرض فوق را برقرار کرد که بعدا بـه آن خـواهیم پرداخت.

اگر x_{ij} برابر تعداد واحدهایی که از منبع i به مقصد j حمل می‌شود در نظر گرفته شود، آنگـاه مسـئله حمل‌ونقل را می‌توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\begin{aligned} & Min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\dots,m \\ & \qquad \sum_{i=1}^{m} (-x_{ij}) = -b_j \quad j = 1,\dots,n \\ & \qquad x_{ij} \ge 0; i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

مثال: محصولات یک شرکت بزرگ کنسرو سازی در سه کارخانه تولید می‌شود و به وسیله کـامیون بـه چهار انبار مستقر می‌شوند. چون هزینه انتقال مبلغ قابل توجهی است، لذا مدیریت به دنبـال کمینـه کـردن این هزینه‌ها است. اطلاعات مربوط به هزینه حمل در جدول زیر آمده است:

انبار / کارخانه	1	2	3	4	میزان تولید (عرضه) برحسب کامیون
1	464	513	654	867	75
2	352	416	690	791	125
3	995	682	388	685	100
میزان احتیاج (تقاضا) برحسب کامیون	80	65	70	85	

مدل برنامه‌ریزی خطی مسئله فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
\begin{array}{ll}
Min & 464x_{11}+513x_{12}+654x_{13}+867x_{14}+352x_{21}+416x_{22}+690x_{23}+791x_{24}+995x_{31}+682x_{32}+388x_{33}+685x_{34} \\
s.t. & \\
(1) & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=75 \\
(2) & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=125 \\
(3) & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=100 \\
(4) & x_{11}+x_{21}+x_{31}=80 \\
(5) & x_{12}+x_{22}+x_{32}=65 \\
(6) & x_{13}+x_{23}+x_{33}=70 \\
(7) & x_{14}+x_{24}+x_{34}=85 \\
\end{array}
$$

$x_{ij}\geq 0; i=1,\ldots,3; j=1,\ldots,4.$

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل‌ونقل

از انجاییکه مسئله حمل‌ونقل حالتی خاص از مسئله برنامه‌ریزی خطی است، لذا می‌توان با استفاده از روش سیمپلکس حل کرد. ولی از آن جاییکه ساختار مسئله حمل و نقل خاص است می‌توان از روش ساده تری جواب بهینه را بدست آورد. به جای این که از جدول سیمپلکس برای یافتن جواب بهینه استفاده کرد، می‌توان از جدول زیر ذخیره اطلاعات جدول سیمپلکس در مسئله حمل‌ونقل استفاده کرد.

مقصد / مبدا	1	2	. . .	n	عرضه
1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2n}	s_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mn}	s_m
تقاضا	d_1	d_2	. . .	d_n	

در صورتیکه متغیر اساسی یا غیراساسی باشد، اطلاعات هر خانه به صورت زیر تعیین می‌شود.

x_{ij} یک متغیر غیراساسی است

c_{ij}
$c_{ij}-u_i-v_j$

x_{ij} یک متغیر اساسی است

c_{ij}
0

قدم ابتدایی:

در این قدم یک جواب اساسی موجه بدست می‌آوریم. در مسئله حمل‌ونقل روش های مختلفی برای تولید جواب اولیه وجود دارد که در ادامه دو روش معروف ارایه می‌گردد.

روش گوشه شمال غربی (*north west corner rule*):

ابتدا متغیر x_{11} را انتخاب کنید که به عنوان متغیر اساسی در نظر می‌گیریم. در ادامه اگر x_{ij} متغیر اساسی باشد، حال چنانچه عرضه مبدا i تمام نشده باشد، متغیر x_{ij+1} و در غیر این صورت متغیر x_{i+1j} را به عنوان متغیر اساسی انتخاب می‌کنیم.

برای مثال جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید. با توجه به این قاعده جواب اساسی اولیه به صورت زیر تولید می‌شود.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14	13	22	17	~~50~~ 20
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	20	70	30	60	

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	70	30	60	

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14 0	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	70	30	60	

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14 0	13 60	19	15	~~60~~ 0
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~70~~ 10	30	60	

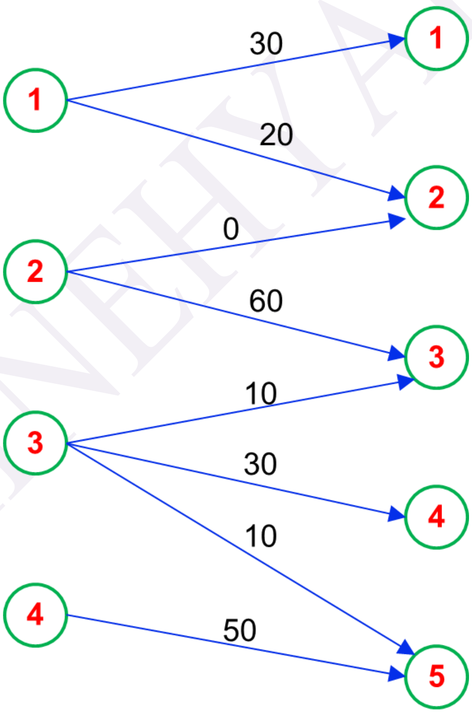
مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16; 30	14; 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14; 0	13; 60	19	15	~~60~~ 0
3	19	19	20; 10	23	M	~~50~~ 40
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~70~~ ~~10~~ 0	30	60	

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16; 30	14; 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14; 0	13; 60	19	15	~~60~~ 0
3	19	19	20; 10	23; 30	M	~~50~~ ~~40~~ 10
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~70~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	60	

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16; 30	14; 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14; 0	13; 60	19	15	~~60~~ 0
3	19	19	20; 10	23; 30	M; 10	~~50~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~70~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	~~60~~ 50	

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 — 30	14 — 20	13	22	17	~~50~~ ~~20~~ 0
2	14	14 — 0	13 — 60	19	15	~~60~~ 0
3	19	19	20 — 10	23 — 30	M — 10	~~50~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
4	M	0	M	0	0 — 50	~~50~~ 0
تقاضا	~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~70~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	~~60~~ ~~50~~ 0	

جواب اساسی اولیه به صورت زیر است.



روش تخمین فوگل (*Vogel's Approximation*)

روش قبلی هزینه را در نظر نمی‌گیرد، اما روش هایی که هزینه را در نظر نمی‌گیرد می‌تواند بـه جـواب های منجر شود که هزینه کل بسیار زیاد شود. روش تخمین فوگل برای رفع این مشکل پیشنهاد شده است

و آنقدر اثر بخش است که گاهی برای بدست آوردن جواب بهینه تقریبی مورد استفاده قرار مـی‌گیـرد. روش تخمین فوگل به این صورت عمل می‌کند که به ازای هر سطر یا ستونی که هنوز تحت بررسی است، تفـاوت بین کوچکترین و ما قبل کوچکترین هزینه واحد c_{ij} محاسبه کنید. در سطر یا ستونی که تفاوت آن از همه بزرگتر است، متغیر که هنوز حذف نشده است و هزینه واحد ان از همه کمتر است را انتخاب می‌کند.

برای روشن شدن موضوع، جواب اساسی اولیه جدول سیمپلکس زیر را با استفاده از روش تخمین فوگل بدست آورید.

تکرار۱:

مقصد / مبدا	1	2	3	4	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	22	17	50	$16-13=3$
2	14	14	13	19	15	60	$14-13=1$
3	19	19	20	23	M	50	$19-19=0$
4	M	0	M	0	0	50	$0-0=0$
تقاضا	30	20	70	30	60		
اختلاف ستونی	$16-14=2$	$14-0=14$	$13-13=0$	$19-0=19$	$15-0=15$		

ستون با بیشترین اختلاف

0=min(0,23,19,22)

ستون ۴ حذف می‌شود و $x_{44}=30$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۲:

مبدا \ مقصد	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	17	50	$16-13=3$
2	14	14	13	15	60	$14-13=1$
3	19	19	20	M	50	$19-19=0$
4	M	0	M	0	20	$0-0=0$
تقاضا	30	20	70	60		
اختلاف ستونی	$16-14=2$	$14-0=14$	$13-13=0$	$15-0=15$		

ستون با بیشترین اختلاف

0=min(0,17,15,M)

سطر ۴ حذف می‌شود و $x_{45}=20$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۳:

مبدا \ مقصد	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	17	50	$16-13=3$
2	14	14	13	15	60	$14-13=1$
3	19	19	20	M	50	$19-19=0$
تقاضا	30	20	70	40		
اختلاف ستونی	$16-14=2$	$16-14=2$	$13-13=0$	$17-15=2$		

سطر با بیشترین اختلاف

13=min(17و13و16و16)

سطر ۱ حذف می‌شود و $x_{13}=50$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار ۴:

مبدا \ مقصد	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	13	15	60	$14-13=1$
3	19	19	20	M	50	$19-19=0$
تقاضا	30	20	20	40		
اختلاف ستونی	$19-14=5$	$19-14=5$	$20-13=7$	$M-15=2$		
				ستون با بیشترین اختلاف	15=min(15,M,40)	

ستون ۵ حذف می‌شود و $x_{25}=40$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۵:

مبدا \ مقصد	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	13	20	$14-13=1$
3	19	19	20	50	$19-19=0$
تقاضا	30	20	20		
اختلاف ستونی	$19-14=5$	$19-14=5$	$20-13=7$		
			ستون با بیشترین اختلاف	13=min(13,20)	

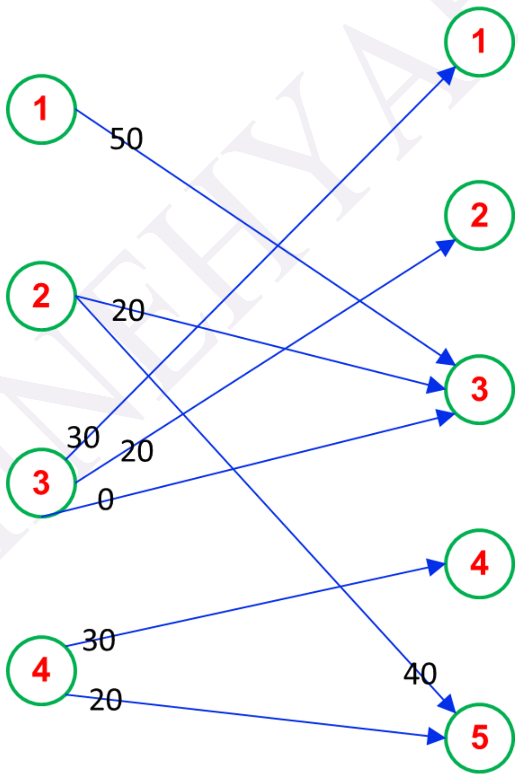
ستون ۳ حذف می‌شود و $x_{23}=20$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۶:

مبدا \ مقصد	1	2	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	0	$14-14=0$
3	19	19	50	$19-19=0$
تقاضا	30	20		
اختلاف ستونی	$19-14=5$	$19-14=5$		

جدول نهایی است و داریم: $x_{33}=0; x_{32}=20; x_{31}=30$

جواب اساسی اولیه برای مسئله حمل‌ونقل به صورت زیر می‌شود.



دستور توقف

هدف دستور توقف، آزمون بهینگی جواب اساسی موجه فعلی است. یک جواب اساسی موجه بهینه است اگر و فقط اگر به ازای کلیه متغیرهای غیر اساسی x_{ij} رابطه $c_{ij}-u_i-v_j \geq 0$ برقرار باشد.

برای کنترل شرایط بالا باید مقدار u_i و v_j را محاسبه کرد. در صورتیکه متغیر x_{ij} اساسی باشد آنگاه $c_{ij} = u_i + v_j$ خواهد بود که از حل دستگاه معادلات برای متغیرهای اساسی می‌توان u_i و v_j را محاسبه کرد. به دلیل این که تعداد معادلات یک واحد از تعداد متغیرها کمتراست می‌توان برای یافتن جواب این دستگاه معادلات، یکی از متغیرها را مساوی با مقدار دلخواه گرفت و با توجه به ساختار ساده دستگاه معادلات، مقدار سایر متغیرها را بدست آورد.

برای نشان دادن این موضوع، اگر متغیرهای اساسی x_{31} ، x_{32} ، x_{34} ، x_{21} ، x_{23} ، x_{13} ، x_{15} و x_{45} باشند، آنگاه داریم:

$$
\begin{array}{llll}
x_{31} : & 19 = u_3 + v_1 & x_{23} : & 13 = u_2 + v_3 \\
x_{32} : & 19 = u_3 + v_2 & x_{13} : & 13 = u_1 + v_3 \\
x_{34} : & 23 = u_3 + v_4 & x_{15} : & 17 = u_1 + v_5 \\
x_{21} : & 14 = u_2 + v_1 & x_{45} : & 0 = u_4 + v_5
\end{array}
$$

اگر $u_3 = 0$ قرار دهیم (چون u_3 بیشترین حضور در معادلات را دارد)، مقادیر سایر متغیرها به صورت زیر بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&v_1 = 19; v_2 = 19; v_4 = 23; u_2 = 14 - 19 = -5; v_3 = 13 - (-5) = 18 \\
&u_1 = 13 - 18 = -5; v_5 = 17 - (-5) = 22; u_4 = -22.
\end{aligned}
$$

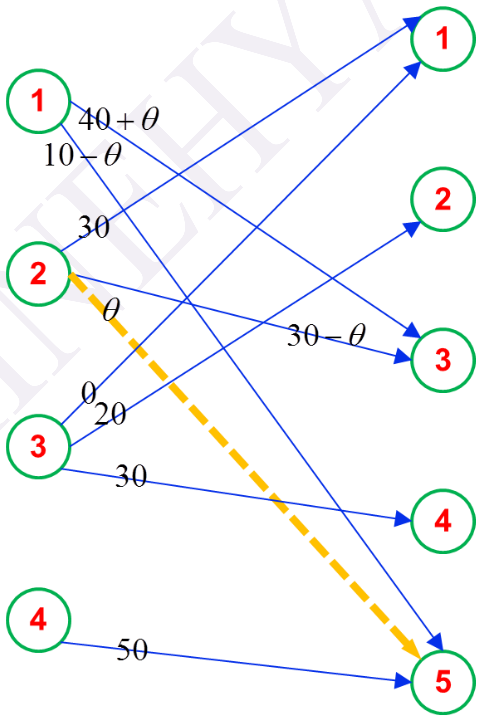
با در اختیار داشتن مقدار متغیرهای همزاد می‌توان شرایط بهینگی را کنترل کرد.

قدم تکراری

در این قدم، متغیر اساسی ورودی و متغیر اساسی خروجی را تشخیص می‌دهیم. در روش سیمپلکس مسئله حمل‌ونقل، متغیری که منفی ترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ را داشته باشد، به عنوان متغیر اساسی ورودی در نظر می‌گیریم. براساس مقادیر و از مرحله قبل، جدول سیمپلکس مسئله حمل‌ونقل به صورت زیر می‌شود.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	5	عرضه	u_i
1	16 / +2	16 / +2	13 / 40	22 / +4	17 / 10	50	-5
2	14 / 30	14 / 0	13 / 30	19 / +1	15 / -2	60	-5
3	19 / 0	19 / 20	20 / +2	23 / 30	M / M-22	50	0
4	M / M+3	0 / +3	M / M+4	0 / -1	0 / 50	50	-22
تقاضا	30	20	70	30	60		
v_j	19	19	18	23	22		

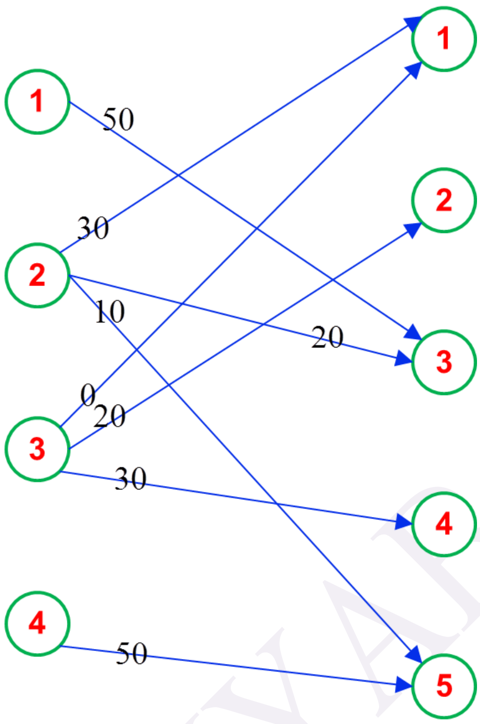
در جدول فوق، متغیر x_{25} دارای کمترین مقدار $c_{ij}-u_i-v_j$ است و بـه عنـوان متغیـر ورودی استفاده می‌شود. برای یافتن متغیر اساسی خروجی از پایه یک سری کارهای زنجیری نسبتا ساده به صـورت زیر انجام می‌شود.



در شکل فوق، مقدار θ تا اندازه‌ای باید افزایش یابد که هزینه کمان منفی نشود لذا خواهیم داشت:

$$10-\theta \geq 0; 30-\theta \geq 0 \rightarrow \theta = 10$$

با افزایش مقدار θ به اندازه ۱۰، متغیر x_{15} از جواب اساسی خارج می‌شود و x_{15} متغیر اساسی خروجی است. در این صورت جواب اساسی موجه جدید به صورت زیر می‌شود.



قبل از حل چند مثال، بیان رسمی روش سیمپلکس برای مسئله حمل‌ونقل را ادامه خواهیم داشت:

قدم ابتدایی: جواب اساسی موجه ابتدایی را با استفاده از یکی از دو روش شمال غربی یا روش تخمین فوگل بدست آورید.

دستور توقف: دستگاه معادله $c_{ij} = u_i + v_j$ را برای متغیرهای اساسی حل کنید و مقدار متغیرهای همزاد u_i و v_j را بدست آورید. در صورتیکه برای تمامی متغیرهای غیراساسی رابطه $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه جواب اساسی موجه فعلی بهینه است، در غیر این صورت به قدم تکراری بروید.

قدم تکراری:

قسمت ۱: متغیر غیر اساسی x_{ij} که منفی ترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ را به عنوان متغیر اساسی ورود در نظر بگیرید.

قسمت ۲: متغیر اساسی خروجی را براساس عکس العمل های زنجیره‌ای تعیین کنید.

قسمت ۳: جواب اساسی موجه جدید را مشخص کنید.

برو به قدم توقف.

عدم تعادل عرضه و تقاضا

فزونی عرضه کل از تقاضای کل

وقتی مقدار عرضه کل از تقاضای کل بیشتر باشد یعنی $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$، باید یک ستون تقاضای مجازی با میزان تقاضایی معادل $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ به جدول حمل و نقل اضافه شود. هزینه های حمل هر واحد کالا برای این ستون مجازی، چون واقعا کالایی حمل نمی شود، صفر در نظر گرفته می شود.

فزونی تقاضا کل از عرضه کل

وقتی مقدار عرضه کل از تقاضای کل کمتر باشد یعنی $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$، باید یک سطر مجازی با میزان ظرفیت معادل $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ به جدول حمل و نقل اضافه شود. از آن جایی که چنین عرضه ای وجود ندارد، هزینه ارسال آن صفر خواهد بود.

حل مسایل غیراستاندارد حمل و نقل

در الگوریتم حمل و نقل شرط اساسی تساوی مجموع میزان کالای عرضه شده و مقدار تقاضا بیان شد. برای حالتی که تعادل عرضه و تقاضا برقرار نبود، با اضافه کردن سطر یا ستون مجازی مسئله را به فرمت استاندارد تبدیل کردیم.

فرم های غیراستاندارد دیگری نیز وجود دارد، مانند **خانــه امکــان ناپــذیر** یــا *impossible cell*، و آن حالتی است که ارسال کالا بین مبدا و مقصد خاص تقریبا امکان پذیر نباشد که بر اثر فقدان راه ارتباطی بین مبدا مقصد خاص یا فاصله زیاد بین آن دو پدید آید. دیگر فرم غیراستاندارد وقتـی بـه وجـود مـی ایـد کـه ظرفیت عرضه کالا در مبدا دارای حدی معین باشد. **ظرفیت حد دار** یا *bounded capacity* بدین معناست که میزان عرضه، بین دو حد بالا و پایین قرار داشته باشد. برای مثال وجود خط تولید دومی که در هر زمان امکان به کارگیری آن وجود داشته باشد. در همین رابطه تقاضا می تواند دارای یـک حـد معـین نیـز باشـد. **تقاضای حد دار** یا *bounded demand* مثلا وقتی که میزان سفارش های رسیده برای تحویل کالا از یـک انبار خیلی پراکنده باشد و بخواهیم یک محدوده مناسب برای آن تعیین شود.

خانه امکان ناپذیر یا *Impossible cell*

گاه در مسائل واقعی وضعیتی پیش می اید که امکان ارسال کالا از یک مبدا خاص بـه مقصـدی معـین وجود ندارد. عدم استفاده از یک مسیر، با تخصیص هزینه معادل M به خانه ای که نشان دهنده آن مسیر در جدول مسئله حمل و نقل است صورت می پذیرد.M عدد بزرگی است که بیانگر هزینه حمل یک واحد کـالا است. در روش حمل و نقل، به خانه ای که دارای هزینه ای معادل M باشد به جهت آن که هـدف الگـوریتم حداقل کردن هزینه است مقداری تخصیص نمی یابد و متغیر مربوطه به ان خانه در جدول نهایی غیراساسی می ماند. قابل ذکر است که اگر هزینه این خانه برابر $-M$ شود، متغیر مربوط به این خانه اساسی خواهد شد.

عرضه حد دار یا *bounded capacity*

مسئله حمل و نقلی را در نظر بگیرید که دارای مبدایی با ظرفیت حد دار باشد. برای این منظور مثـالی می زنیم.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	19	7	3 (100)	21	100
2	15 (50)	21	18 (100)	6 (150)	300
3	11 (100)	14 (100)	15	22	200
تقاضا	150	100	200	150	600

فرض کنید کارخانه اول بتواند ظرفیت خود را با اضافه کردن شیفت دوم و سوم به دو تا سه برابر برساند و در هنگام لزوم به راحتی آن را تعطیل کند. با اضافه کردن این فرض جدید، کارخانه اول دارای ظرفیتی معادل C_1 است که:

$$100 \le C_1 \le 300$$

ظرفیت اصلی (بدون اضافه کردن شیفت دوم وسوم) به عنوان حد پایینی مدنظر قرار می گیرد. حد بالایی ظرفیت در صورت اضافه شدن یک سطر جدید، در جدول زیر (با اضافه کردن سطر ۲-۱) اصلاح شده است.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	مجازی	عرضه
1	19	7	3 (100)	21	M	100
1-2	19	7 (100)	3 (100)	21	0	200
2	15	21	18	6 (150)	0 (150)	300
3	11 (150)	14	15	22	0 (50)	200
تقاضا	150	100	200	150	200	800

هزینه های حمل برای این سطر دقیقا همان هزینه های قبلی است و میزان عرضه آن معادل تفاوت دو حد است(که اینجا برابر ۲۰۰ است). اضافه شدن مبدا جدید موجب فزونی عرضه بر تقاضا می شود و نیاز به یک ستون مجازی دارد. توجه کنید که خانه مجازی در سطر ۱، امکان ناپذیر است و هزینه ای معادل M دارد. این امر موجب می شود که کارخانه شماره ۱، دارای حداقل ظرفیتی معادل ۱۰۰ باشد. اگر این سلول برابر با M نباشد، این امکان وجود دارد که جریان از گره ۱ به گره مجازی صورت گیرد و دیگر محل عرضه ۱ به محل های تقاضا سرویس ندهد و حداقل عرضه محل ۱ برآورده نشود. بنابراین کارخانه شماره ۱ می تواند ۱۰۰ واحد کالا در شیفت اول و ۲۰۰ واحد کالا در شیفت های اضافه شده بعدی(سطر ۲-۱) در حالت بهینه تولید کند.

تقاضای حد دار

مانند حالت قبل یک مسئله حمل و نقل می تواند دارای تقاضای حددار باشد.

مثال: مسئله قبل را مجددا بدون در نظرگرفتن شیفت های اضافی برای کارخانه شماره ۱ در نظر بگیرید. فرض کنید تقاضا برای گره ۱ (ستون ۱) بین دو حد ۱۰۰ تا ۲۵۰ تغییر کند، یعنی مقدار D_1 بین ۱۰۰ و ۲۵۰ باشد.

$$100 \le D_1 \le 250$$

جدول اصلاح شده اولیه با اضافه شدن ستون جدید ۲-۱ به صورت زیر می شود.

مبدا \ مقصد	1	1-2	2	3	4	عرضه
1	19	19	7	3 100	21	100
2	15	15 50	21	18 100	6 150	300
3	11 100	11 100	14	15	22	200
مجازی	M	0	0 100	0	0	100
تقاضا	100	150	100	200	150	700

تقاضا برای ستون ۱ معادل ۱۰۰ است. ستون ۲ نشان دهنده هر میزان تقاضای اضافی علاوه بر حداقل تقاضای مقصد ۱، همان ۱۰۰، است. هزینه های ستون ۲-۱ همان هزینه های نهایی ستون ۱ است و مقدار تقاضای ان معادل *250-100=150* (اختلاف بین حد بالا و حد پایین) است. سطر مجازی دارای ظرفیتی معادل ۱۰۰ است که برای تعادل عرضه و تقاضا در نظر گفته شده است. مقدار ۱۰۰ به این صورت بدست آمده است چون در جدول اولیه مقدار تقاضا برابر ۱۵۰ بود برای برآورده شدن تقاضای حد بالا که برابر ۲۵۰ است می بایستی ۱۰۰ واحد به عرضه برای ایجاد تعادل بین عرضه و تقاضا اضافه گردد تا در صورت افزایش تقاضا به بیش از ۱۵۰، مقدار تقاضای اضافی از گره مجازی خارج شود.

مقصد اول از محل عرضه مجازی، هیچ مقدار را تقاضا نمی کند و لذا مقدار هزینهM در نظر گرفته شده است. سوال این است که چرا باید مقدار هزینه را M در نظر گرفت؟ اگر از گره مجازی به گره ۱ مقصد جریانی برقرار شود، این جریان در واقع وجود ندارد و مقصد ۱ که شامل گره های ۱ و ۲-۱ است در مجموع ۱۵۰ واحد جریان دریافت می کنند که از حد پایین بیشتر است و مقادیر بین حد پایین (۱۰۰) و ۱۵۰ پوشش داده نمی شود. با این کار تضمین می شود که حداقل ورودی به گره ۱ برابر ۱۰۰ خواهد بود.

تولید با هزینه های متفاوت

مسئله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	19	7	3 100	21	100
2	15 50	21	18 100	6 150	300
3	11 100	14 100	15	22	200
تقاضا	150	100	200	150	600

فرض کنید که هزینه تولید سه کارخانه به علت تفاوت در هزینه نیروی انسانی، تجهیزات و منابع اولیه، متفاوت باشد. هدف این است که ستاده های کارخانه ها به گونه ای بین چهار انبار توزیع شود کـه مجمـوع هزینه تولید و حمل حداقل شود. اگر هزینه تولید هر واحد محصول در سه کارخانه بـه ترتیـب معـادل ۵۰، ۶۲ و ۵۴ باشد، هزینه حمل و تولید با افزودن هزینه های تولید به هزینه های حمل هر واحد خواهد بود. در شکل زیر جواب بهینه برای این حالت نشان داده شده است.

$69 = 19 + 50$ $80 = 18 + 62$

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	69	57	53 100	71	100
2	77 50	83	80 100	68 150	300
3	65 100	68 100	69	76	200
تقاضا	150	100	200	150	600

$68 = 14 + 54$

تولید با هزینه های متفاوت

در برخی موارد، محصول یک کارخانه را می توان در بازارهای مختلف با قیمت های متفاوتی فروخت. قیمت فروش هر واحد محصول به انبارهای چهارگانه مسئله قبل به ترتیب مساوی ۱۰۰، ۱۰۵، ۱۱۰، و ۱۱۵ است. با توجه به این که در مسئله حمل و نقل به دنبال کمینه کردن هزینه هستیم، قیمت فروش با علامت منفی در نظر گرفته می شود لذا هر کدام از اعداد داخل مستطیل های کوچک بالایی از تفاضل قیمت فروش هر واحد(منفی)، و هزینه حمل و تولید(مثبت) بدست می آید.

$-31=-100+69$　　$-30=-110+80$

مبدا / مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	−31	−48	−57 (100)	−44	100
2	−23 (50)	−22	−30 (100)	−47 (150)	300
3	−35 (100)	−37 (100)	−41	−39	200
تقاضا	150	100	200	150	600

$-37=-105+68$

همان طور که مشاهده می شود، طرح بهینه توزیع کالا در این جدول دقیقا مشابه طرح های ارایه شده در جدول های اولیه و تولید با هزینه های متفاوت می شود. اضافه کردن یک مقدار ثابت به ستون های هزینه، تغییری در طرح توزیع ایجاد نمی کند.

مثال: یک شرکت کمپودسازی در سه محل شیگالو، کلیولند، و بوستون کارخانه دارد. در هفته گذشته میزان تولید این سه کارخانه به ترتیب ۳۵، ۵۰، و ۴۰ واحد بوده است. شرکت می‌خواهد ۴۵ واحد را به دالاس، ۲۰ واحد از آن به آتلانتا، و ۳۰ واحد را به سانفرانسیسکو و ۳۰ واحد دیگر را به فیلادلفیا حمل نماید. هزینه تولید و توزیع هر کارخانه به هر مرکز توزیع در جدول زیر آمده است. بهترین روش حمل چیست؟

کارخانه \ انبار	دالاس 1	آتلانتا 2	سانفرانسیسکو 3	فیلادلفیا 4	عرضه (تعداد)
کلیولند 1	8	6	10	9	35
شیکاگو 2	9	12	13	7	50
بوستون 3	14	9	16	5	40
نیازها (تعداد)	45	20	30	30	[125]

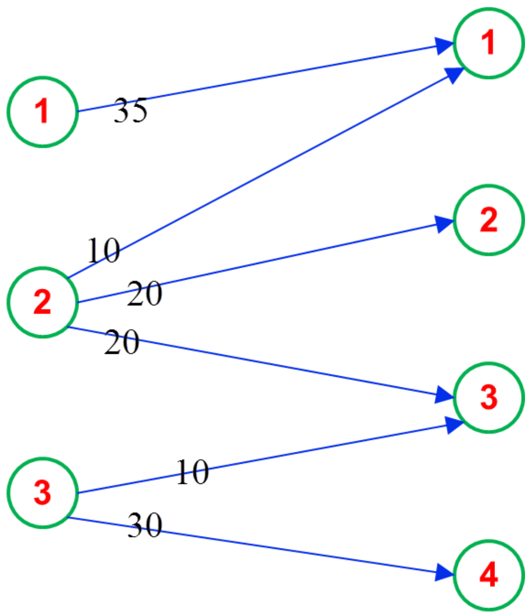
حل:

گام یافتن جواب اساسی اولیه:

۱-روش گوشه شمالی غربی

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	8 35	6	10	9	~~35~~ 0
2	9 10	12 20	13 20	7	~~50~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
3	14	9	16 10	5 30	~~40~~ ~~30~~ 0
تقاضا	~~45~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	

جواب اساسی اولیه به روش گوشه شمالی غربی با تابع هدف $z = 1180$ به صورت زیر است.



۲ –روش تقریب فوگل

کاربرد روش تقریب فوگل برای یافتن جواب اساسی اولیه به صورت زیر می‌شود.

تکرار۱:

مقصد / مبدا	1	2	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	8	6	10	9	35	2
2	9	12	13	7	50	2
3	14	9	16	5 30	~~40~~ 10	4 سطربا بیشترین اختلاف
تقاضا	45	20	30	~~30~~ 0		
اختلاف ستونی	1	3	3	2		

ستون ۴ حذف می‌شود و $x_{34} = 30$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۲:

مبدا \ مقصد	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
1	8	6	10	35	2
2	9	12	13	50	3
3	14	9 10	16	~~10~~ 0	5 سطربا بیشترین اختلاف
تقاضا	45	~~20~~ 10	30		
اختلاف ستونی	1	3	3		

سطر ۳ حذف می‌شود و $x_{32} = 30$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۳:

مبدا \ مقصد	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
1	8	6 10	10	~~35~~ 25	2
2	9	12	13	50	3
تقاضا	45	~~20~~ ~~10~~ 0	30		
اختلاف ستونی	1	6 ستون با بیشترین اختلاف	3		

ستون ۲ حذف می‌شود و $x_{12} = 10$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار۴:

مبدا \ مقصد	1	3	عرضه	اختلاف سطری
1	8	10	~~35~~ 25	2
2	9 (45)	13	~~50~~ 5	4
تقاضا	~~45~~ 0	30		
اختلاف ستونی	1	3		

ستون با بیشترین اختلاف

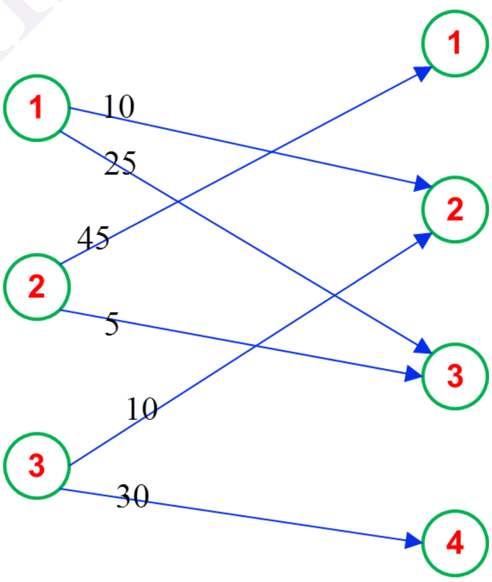
ستون ۱ حذف می‌شود و $x_{21}=45; x_{13}=25; x_{23}=5;$ در نظر گرفته می‌شود.

لذا جواب اساسی اولیه از روش فوگل به صورت زیر می‌شود.

$$x_{34}=30; x_{32}=10; x_{12}=10; x_{21}=45; x_{13}=25; x_{23}=5.$$

مقدار تابع هدف فوق برابر با $Z=1020$.

از مقایسه مقدار تابع هدف دو روش گوشه شمال غربی و تخمین فوگل می‌توان فهمید که روش تخمین فوگل منجر به جواب اساسی با تابع هدف بهتری می‌شود. لذا جواب اولیه مورد استفاده در ادامه الگوریتم به صورت زیر است.



قدم توقف: با فرض $u_1 = 0$ ، مقدار متغیرهای همزاد به صورت زیر می‌شود.

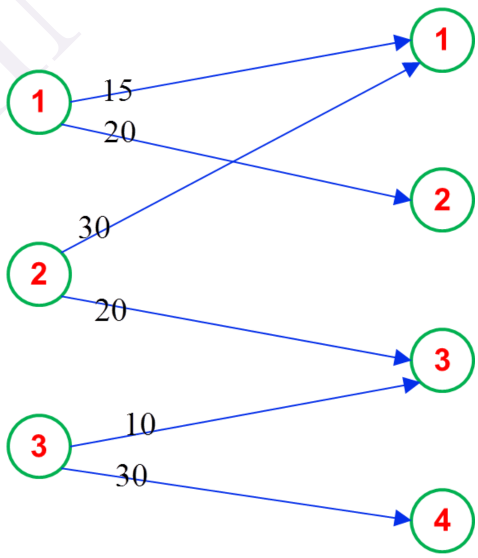
$$v_1 = 6; v_2 = 6; v_3 = 10; v_4 = 2; u_1 = 0; u_2 = 3; u_3 = 3$$

در جدول زیر، مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ برای متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌شود.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8 $\boxed{+2}$	6	10	9 $\boxed{7}$	35	0
2	9	12 $\boxed{+3}$	13	7 $\boxed{2}$	50	3
3	14 $\boxed{+5}$	9	16 $\boxed{3}$	5	40	3
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	6	6	10	2		

چون هیچ متغیر غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ برقرار نیست لذا به جواب بهینه رسیدیم. ملاحظه می‌شود که تقریب فوگل منجر به جواب بهینه رسیده است.

برای تمرین بیشتر، فرض کنید که جواب اولیه به صورت زیر داده شده است:



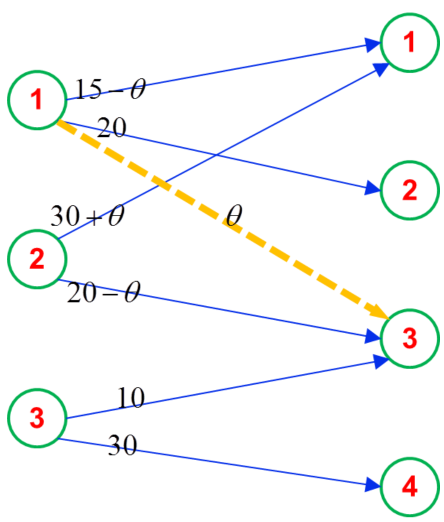
قدم توقف: با فرض $u_1 = 0$ ، مقدار متغیرهای همزاد به صورت زیر می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} 8=u_1(=0)+v_1 \\ 6=u_1+v_2 \\ 9=u_2+v_1 \\ 13=u_2+v_3 \\ 16=u_3+v_3 \\ 5=u_3+v_4 \end{array}\right\} \rightarrow v_1=8; v_2=6; v_3=12; v_4=1; u_1=0; u_2=1; u_3=4.$$

در جدول زیر، مقدار $c_{ij}-u_i-v_j$ برای متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌شود.

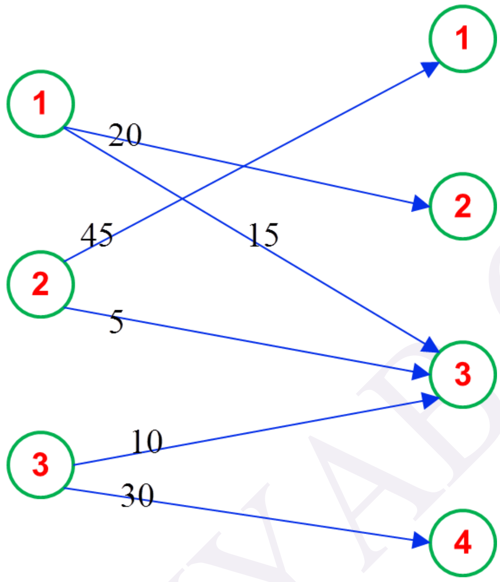
مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8	6	10 -2	9 +8	35	0
2	9	12 +5	13	7 +5	50	1
3	14 +2	9 -1	16	5	40	4
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	8	6	12	1		

قدم تکراری: چون برای دو متغیر غیراساسی $c_{ij}-u_i-v_j<0$ است، لذا جواب اساسی موجه فعلی بهینه نیست و نیاز به پیدا کردن جواب بهبود یافته داریم. x_{13} را به عنوان متغیر ورودی در نظر می‌گیریم. برای یافتن متغیر اساسی خروجی به صورت زیر عمل می‌شود.



$$\left.\begin{array}{l}15-\theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 15 \\ 20-\theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 20\end{array}\right\} \rightarrow \theta_{\max}=15$$

لذا متغیر اساسی x_{11} از پایه خارج و متغیر غیراساسی x_{13} به پایه وارد می‌شود. لذا جواب اساسی فعلی به صورت زیر می‌شود.



دستور توقف:

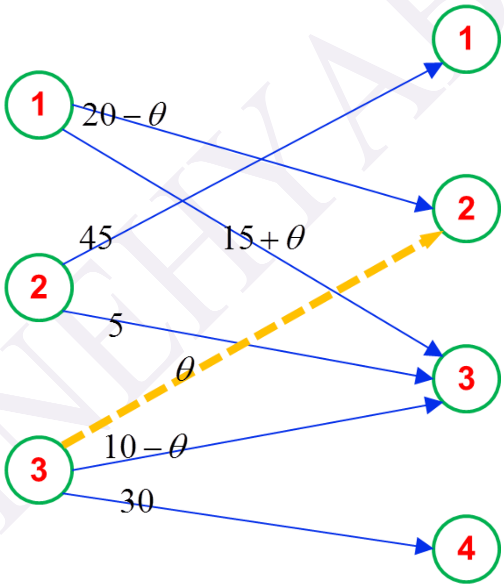
با فرض $u_1=0$ می‌توان مقدار متغیرهای همزادی را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$v_1=6; v_2=6; v_3=10; v_4=-1; u_1=0; u_2=3; u_3=6.$$

در جدول زیر مقدار $c_{ij}-u_i-v_j$ متغیرهای غیر اساسی آورده شده است.

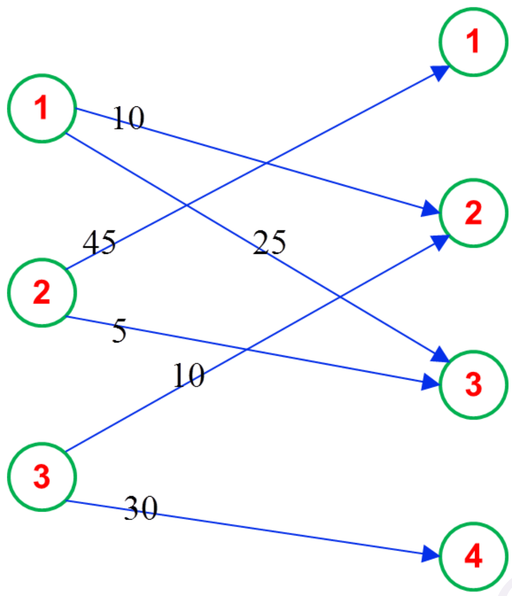
مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8 / 2	6	10	9 / +10	35	0
2	9	12 / +3	13	7 / +5	50	3
3	14 / +2	9 / -3	16	5	40	6
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	6	6	10	-1		

قدم تکراری: متغیر غیر اساسی x_{32} وارد پایه می‌شود. برای یافتن اینکه کدام متغیر اساسی خارج می‌شود، به صورت زیر عمل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} 20-\theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 20 \\ 10-\theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 10 \end{array}\right\} \rightarrow \theta_{\max} = 10$$

با $\theta = 10$ ، متغیر اساسی x_{33} از پایه خارج شده و متغیر غیر اساسی x_{32} لذا جواب اساسی به صورت زیر می‌شود.



قدم توقف: با فرض $u_1 = 0$ می‌توان مقدار متغیرهای همزادی را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$v_1 = 6; v_2 = 6; v_3 = 10; v_4 = 2; u_1 = 0; u_2 = 3; u_3 = 3.$$

در جدول زیر مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ متغیرهای غیر اساسی آورده شده است.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	8 $\boxed{+2}$	6	10	9 $\boxed{+7}$	35	0
2	9	12 $\boxed{+3}$	13	7 $\boxed{+2}$	50	3
3	14 $\boxed{+5}$	9	16 $\boxed{+1}$	5	40	3
تقاضا	45	20	30	30		
v_j	6	6	10	2		

شرط بهینگی برقرار است و لذا جواب اساسی فعلی، جواب بهینه است.

تمرین: مسئله حمل‌ونقل با جدول هزینه زیر مفروض است. با استفاده از روش قاعده گوشه شمال غربی و روش تخمین فوگل یک جواب اساسی ابتدایی پیدا کنید. تعداد تکرارهای سیمپلکس در هر یک از دو جواب های اولیه را با هم مقایسه کنید.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه
1	3	7	6	4	5
2	2	4	3	2	2
3	4	3	8	5	3
نیازها	3	3	2	2	

حل:

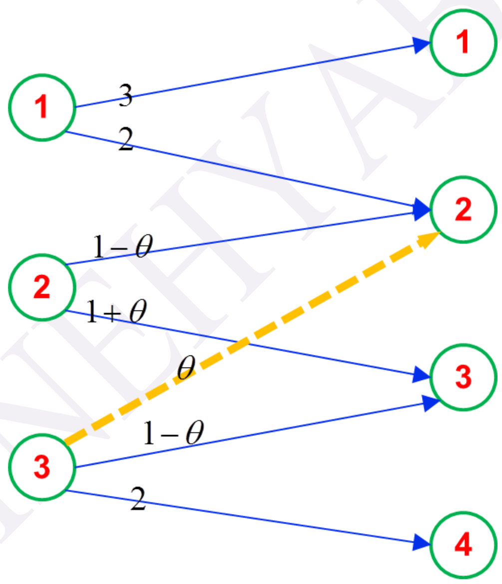
الف) روش گوشه شمال غربی:

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{7}$ 2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	5	0
2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{2}$	2	-3
3	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{5}$ 2	3	2
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	7	6	3		

مقدار تابع هدف جدول فوق برابر با ۴۸ است. مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

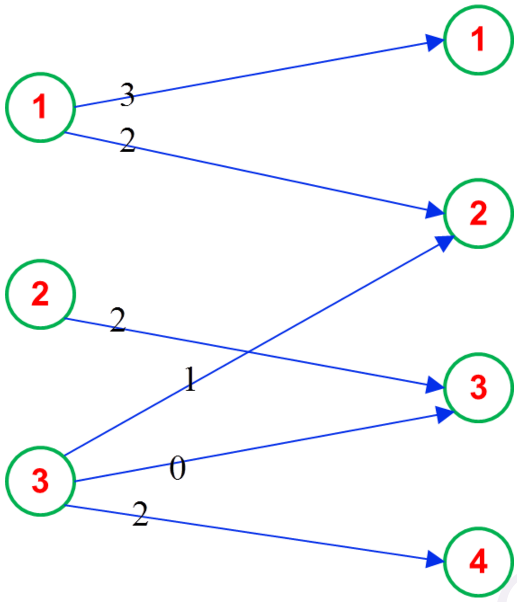
مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7	6 0	4 +1	5	0
2	2 +2	4	3	2 +2	2	-3
3	4 -1	3 -6	8	5	3	2
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	7	6	3		

متغیر x_{32} به عنوان متغیر اساسی ورودی در نظر گرفته می‌شود. برای تعیین متغیر اساسی خروجی به صورت زیر عمل می‌کنیم.



$$1-\theta \ge 0 \rightarrow \theta_{\max} = 1$$

متغیر x_{22} به عنوان متغیر خروجی از جواب اساسی در نظر گرفته شود که در این صورت جواب اساسی فعلی به صورت زیر می‌شود.



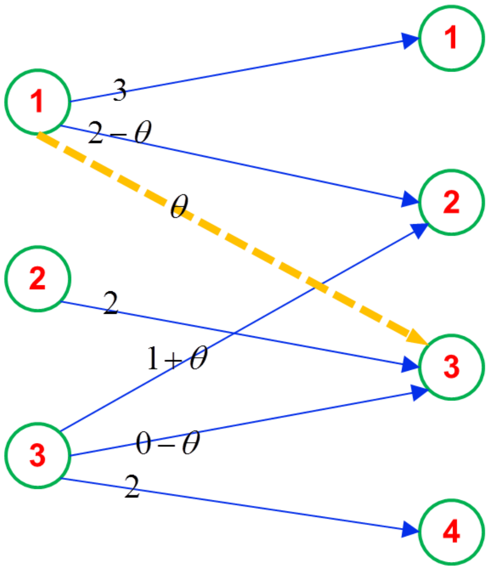
با فرض $u_1 = 0$ ، سایر متغیرهای همزاد به صورت زیر است:

$$v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 7; v_4 = 4; u_1 = 0; u_2 = -4; u_3 = 1.$$

مقدار تابع هدف در این تکرار برابر با ۴۲ است. مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

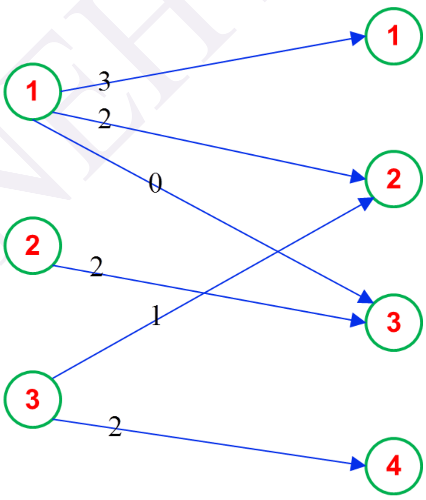
مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7	6 (-1)	4 (0)	5	0
2	2 (+3)	4 (+6)	3	2 (+2)	2	-4
3	4 (0)	3	8	5	3	1
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	2	7	4		

یکی از $c_{ij} - u_i - v_j$ نامثبت هستند، لذا شرط بهینگی برقرار نیست. متغیر x_{13} وارد متغیرهای اساسی می‌شوند.



$2-\theta \geq 0; -\theta \geq 0 \rightarrow \theta_{\max} = 0$

با $\theta = 0$ متغیر x_{33} از جواب اساسی خارج و متغیر x_{13} وارد جواب اساسی می‌شود. لذا جواب اساسی به صورت زیر می‌شود.



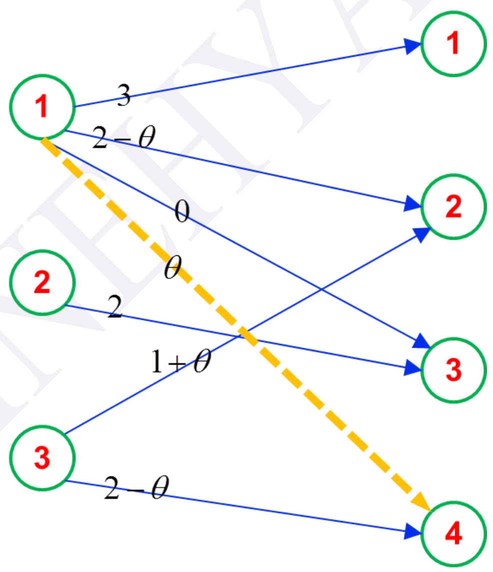
مقدار تابع هدف در این تکرار برابر ۴۲ است. مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

$v_1 = 3; v_2 = 7; v_3 = 6; v_4 = 9; u_1 = 0; u_2 = -3; u_3 = -4.$

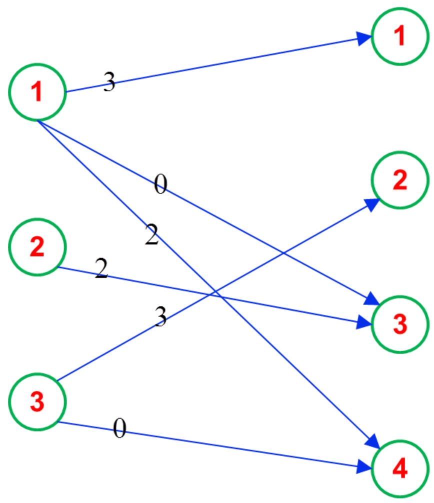
برای کنترل بهینگی از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

مقصد / مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7	6	4 -5	5	0
2	2 +2	4 0	3	2 -4	2	-3
3	4 5	3	8 6	5	3	-4
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	7	6	9		

متغیر x_{14} به عنوان متغیر ورودی به جواب اساسی در نظر گرفته شود. متغیر خروجی از پایه به صورت زیـر بدست می آید.



با قرار دادن $\theta = 2$، متغیر x_{12} از جواب های اساسی خارج می‌شود و جواب اساسی به صورت زیر می‌شود.



مقدار تابع هدف جواب اساسی فوق برابر با ۳۲ می‌شود. با فرض $u_1 = 0$ ، سایر متغیرهای همزاد بـه صـورت زیر است:

$$v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 6; v_4 = 4; u_1 = 0; u_2 = -3; u_3 = 1.$$

برای کنترل بهینگی از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

مقصد / مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7 $\boxed{+5}$	6	4	5	0
2	2 $\boxed{+2}$	4 $\boxed{+5}$	3	2 $\boxed{+1}$	2	-3
3	4 $\boxed{0}$	3	8 $\boxed{+1}$	5	3	$+1$
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	2	6	4		

با توجه به‌ای نکه کمان های غیراساسی مقدار نامنفی دارند، لذا به جواب بهینه رسیدیم. مقـدار تـابع هـدف برابر ۳۲ می‌شود. تعداد تکرارهای برای رسیدن به جواب بهینه برابر ۳ است.

ب) جواب اولیه با استفاده از روش تخمین فوگل به صورت زیر است.

مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	3	7	6	4	5	1
2	2	4	3 — 2	2	$\cancel{2}0$	0
3	4	3	8	5	3	1
تقاضا	3	3	$\cancel{2}0$	2		
اختلاف ستونی	1	1	3	2		
			ستون با بیشترین اختلاف			

$x_{23} = 2$

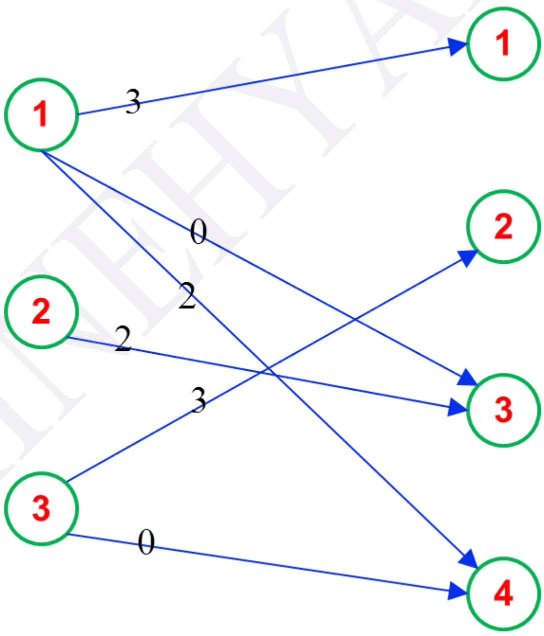
مبدا \ مقصد	1	2	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	3	7	6	4	5	1
3	4	3 — 3	8	5	$\cancel{3}0$	1
تقاضا	3	$\cancel{3}0$	$\cancel{2}0$	2		
اختلاف ستونی	1	4	2	1		
		ستون با بیشترین اختلاف				

$x_{32} = 3$

مبدا \ مقصد	1	3	4	عرضه	اختلاف سطری
1	3	6, 0	4	5	1
3	4	8	5	~~3~~0	1
تقاضا	3	~~2~~0	2		
اختلاف ستونی	1	2	1		
		ستون با بیشترین اختلاف			

$x_{13} = 0$

جواب بدست آمده از تخمین فوگل به صورت زیر است.



مقادیر متغیرهای همزاد به صورت زیر است:

$$v_1 = 3; v_2 = 2; v_3 = 6; v_4 = 4; u_1 = 0; u_2 = -3; u_3 = 1.$$

مقدار متغیرهای همزاد غیراساسی $c_{ij} - u_i - v_j$ به صورت زیر است.

مقصد / مبدا	1	2	3	4	عرضه	u_i
1	3	7 $\boxed{0}$	6	4	5	0
2	2 $\boxed{+2}$	4 $\boxed{+5}$	3	2 $\boxed{+1}$	2	-3
3	4 $\boxed{0}$	3	8 $\boxed{+1}$	5	3	1
تقاضا	3	3	2	2		
v_j	3	2	6	4		

همان طور که مشاهده می‌شود، $c_{ij}-u_i-v_j$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی نامنفی است و لذا به جواب بهینه رسیدیم. تعداد تکرار برای رسیدن به جواب بهینه با روش تخمین فوگل برابر یک است.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**