

درس ۵: مسئله حمل و نقل

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



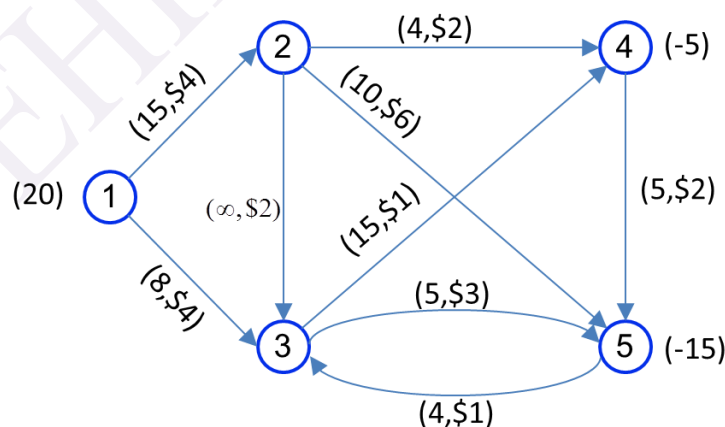
www.behinehyab.com

تا کنون به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی پرداختیم. در این بخش به بررسی انواع خاص مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مدل های خاص جریان در شبکه مانند مسئله حمل‌ونقل، مسیر بحرانی، مسئله جریان بیشین و مسئله کوتاهترین مسیر خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیع محصول همگن از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مورد نیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قیدهای ظرفیت بعضی از خطوط حمل‌ونقل را محدود می‌کند. هدف در این مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول‌ها است.

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره‌ها با دایره‌های شماره دار و کمان‌ها با کمان‌ها نشان داده شده‌اند. کمان‌ها جهت دار هستند. مثلاً مواد می‌توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد. کمان از گره i به گره j را به صورت $i-j$ نشان می‌دهیم.



در شکل فوق، به هر کمان یک ظرفیت و هزینه بر واحد مربوط به حمل در نظر گرفته می‌شود که در کنار هر کمان داده می‌شود. برای مثال در کمان $(2-4)$ ، جریان از ۰ تا ۴ واحد می‌تواند باشد و هزینه عبور

هر واحد از این کمان، ۲ دلار است. علامت ∞ به معنای کمان با ظرفیت نامحدود است. بالاخره، اعداد داخل پرانتز کنار گره‌ها میزان عرضه و تقاضا را نشان می‌دهد. در این شکل گره ۱ مبدا و عرضه در آن برابر با ۲۰ واحد است و گره‌ها ۴ و ۵ مقاصد هستند که به ۵ و ۱۵ واحد نیاز دارند که با علامت - نشان داده می‌شوند. در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره i به گره j با استفاده از کمان $i-j$ است.

مدل برنامه‌ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53} \\ \text{s.t.} \quad & \\ (1) \quad & x_{12} + x_{13} = 20 \\ (2) \quad & -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0 \\ (3) \quad & -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0 \\ (4) \quad & -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5 \\ (5) \quad & -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15 \\ & x_{12} \leq 15; x_{13} \leq 8; x_{23} \leq \infty; x_{24} \leq 4; x_{25} \leq 10; x_{34} \leq 15; x_{35} \leq 5; x_{45} \leq \infty; x_{53} \leq 4. \end{aligned}$$

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می‌کند که جریان خروجی از گره ۱ ($x_{12} + x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می‌کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23} + x_{24} + x_{25}$) است.

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱ و -۱ اخذ می‌کنند. به علاوه دقیقاً در دو معادله توازن ظاهر می‌شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره‌ای که از آن سرچشمه می‌گیرند و -۱- مربوطه به گره‌ای که به آن وارد می‌شوند. با توجه به موارد فوق، فرم عمومی مسئله کمترین جریان در شبکه را به n گره به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

مدل فوق، مدل عمومی مسئله جریان کمینه در شبکه است. برای شرایط خاص، مدل فوق قابل تبدیل به فرم های ساده تری است که در ادامه برخی از این مدل های خاص را بیان می‌کنیم.

مسئله حمل و نقل

مسئله حمل و نقل نوعی مدل جریان در شبکه است که در آن نقطه واسط (مانند گره های ۲ و ۳ در شکل فرم عمومی) وجود ندارد. برای بیان فرم ریاضی مسئله حمل و نقل، پارامترهای زیر تعریف می‌شود.

$$a_i : \text{تعداد واحدهای موجود در منبع } i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$b_j : \text{تعداد واحدهای مورد نیاز در مقصد } j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$c_{ij} : \text{هزینه حمل و نقل هر واحد از منبع } i \text{ به مقصد } j \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

فرض می‌شود که مجموع کل تعداد واحدهای موجود در منابع با تعداد واحدهای مورد نیاز در مقاصد برابر باشند، یعنی:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

اگر فرض فوق برقرار نباشد، با اعمال تغییراتی می‌توان فرض فوق را برقرار کرد که بعداً به آن خواهیم پرداخت.

اگر x_{ij} برابر تعداد واحدهایی که از منبع i به مقصد j حمل می‌شود در نظر گرفته شود، آنگاه مسئله حمل‌ونقل را می‌توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m (-x_{ij}) = -b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

مثال: محصولات یک شرکت بزرگ کنسرو سازی در سه کارخانه تولید می‌شود و به وسیله کامیون به چهار انبار مستقر می‌شوند. چون هزینه انتقال مبلغ قابل توجهی است، لذا مدیریت به دنبال کمینه کردن این هزینه‌ها است. اطلاعات مربوط به هزینه حمل در جدول زیر آمده است:

انبار / کارخانه	1	2	3	4	میزان تولید (عرضه) برحسب کامیون
1	464	513	654	867	75
2	352	416	690	791	125
3	995	682	388	685	100
میزان احتیاج (تقاضا) برحسب کامیون	80	65	70	85	

مدل برنامه‌ریزی خطی مسئله فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\text{Min } 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}$$

s.t.

$$\begin{array}{llllllll} (1) & x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & + x_{14} & & & & = 75 \\ (2) & & & & & x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & + x_{24} & = 125 \\ (3) & & & & & & & & & x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & + x_{34} & = 100 \\ (4) & x_{11} & & & & + x_{21} & & & & + x_{31} & & & & = 80 \\ (5) & & x_{12} & & & & + x_{22} & & & & + x_{32} & & & = 65 \\ (6) & & & x_{13} & & & & + x_{23} & & & & + x_{33} & & = 70 \\ (7) & & & & x_{14} & & & & + x_{24} & & & & + x_{34} & = 85 \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 4.$$

ارایه دستور حل سیمپلکس برای مسئله حمل و نقل

از آنجاییکه مسئله حمل و نقل حالتی خاص از مسئله برنامه ریزی خطی است، لذا می توان با استفاده از روش سیمپلکس حل کرد. ولی از آن جاییکه ساختار مسئله حمل و نقل خاص است می توان از روش ساده تری جواب بهینه را بدست آورد. به جای این که از جدول سیمپلکس برای یافتن جواب بهینه استفاده کرد، می توان از جدول زیر ذخیره اطلاعات جدول سیمپلکس در مسئله حمل و نقل استفاده کرد.

مقصد \ مبدا	1	2	...	n	عرضه
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2
...	...	...	...	...	...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m
تقاضا	d_1	d_2	...	d_n	

در صورتیکه متغیر اساسی یا غیر اساسی باشد، اطلاعات هر خانه به صورت زیر تعیین می شود.

x_{ij} یک متغیر غیراساسی است x_{ij} یک متغیر اساسی است

c_{ij}	
	0

c_{ij}	
	$c_{ij} - u_i - v_j$

قدم ابتدایی:

در این قدم یک جواب اساسی موجه بدست می‌آوریم. در مسئله حمل‌ونقل روش‌های مختلفی برای تولید جواب اولیه وجود دارد که در ادامه دو روش معروف ارائه می‌گردد.

روش گوشه شمال غربی (north west corner rule):

ابتدا متغیر x_{11} را انتخاب کنید که به عنوان متغیر اساسی در نظر می‌گیریم. در ادامه اگر x_{ij} متغیر اساسی باشد، حال چنانچه عرضه مبدأ i تمام نشده باشد، متغیر x_{ij+1} و در غیر این صورت متغیر x_{i+1j} را به عنوان متغیر اساسی انتخاب می‌کنیم.

برای مثال جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید. با توجه به این قاعده جواب اساسی اولیه به صورت زیر تولید می‌شود.

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14	13	22	17	50
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30	20	70	30	60	

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14 20	13	22	17	50 200
2	14	14	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	300	200	70	30	60	

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14 20	13	22	17	50 200
2	14	14 0	13	19	15	60
3	19	19	20	23	M	50
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	300	200	70	30	60	

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه		
1	16	30	14	20	13	22	17	50 200
2	14		14		13	19	15	60 0
3	19		19		20	23	M	50
4	M		0		M	0	0	50
تقاضا	300	200	70 10	30	60			

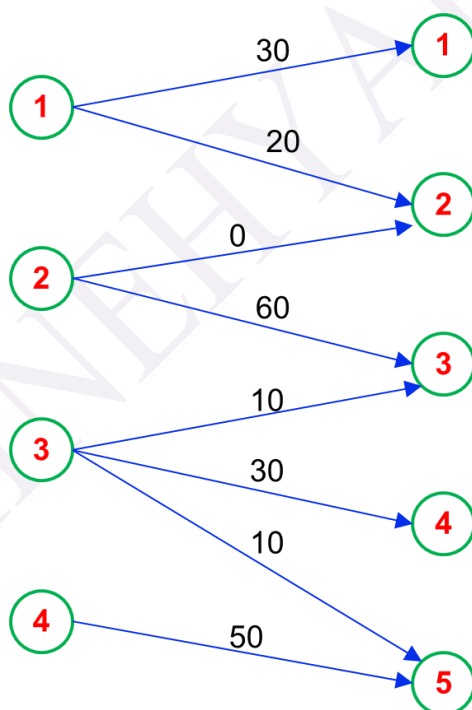
مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 200
2	14	14	0 → 60	19	15	60 0
3	19	19	20	23	M	50 40
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 100	30	60	

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 200
2	14	14	0 → 60	19	15	60 0
3	19	19	20	23 → 30	M	50 40 10
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 100	30 0	60	

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16	30 → 20	13	22	17	50 200
2	14	14	0 → 60	19	15	60 0
3	19	19	20	23 → 30 → 10	M	50 40 100
4	M	0	M	0	0	50
تقاضا	30 0	20 0	70 100	30 0	60 50	

مقصد \ مبدا	1	2	3	4	5	عرضه
1	16 30	14 20	13	22	17	50 200
2	14	14 0	13 60	19	15	60 0
3	19	19	20 10	23 30	M 10	50 40 100
4	M	0	M	0	0 50	50 0
تقاضا	30 0	20 0	70 100	30 0	60 50 0	

جواب اساسی اولیه به صورت زیر است.



روش تخمین فوگل (Vogel's Approximation)

روش قبلی هزینه را در نظر نمی‌گیرد، اما روش هایی که هزینه را در نظر نمی‌گیرد می‌تواند به جواب های منجر شود که هزینه کل بسیار زیاد شود. روش تخمین فوگل برای رفع این مشکل پیشنهاد شده است

و آنقدر اثر بخش است که گاهی برای بدست آوردن جواب بهینه تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش تخمین فوگل به این صورت عمل می‌کند که به ازای هر سطر یا ستونی که هنوز تحت بررسی است، تفاوت بین کوچکترین و ما قبل کوچکترین هزینه واحد c_{ij} محاسبه کنید. در سطر یا ستونی که تفاوت آن از همه بزرگتر است، متغیر که هنوز حذف نشده است و هزینه واحد آن از همه کمتر است را انتخاب می‌کند.

برای روشن شدن موضوع، جواب اساسی اولیه جدول سیمپلکس زیر را با استفاده از روش تخمین فوگل بدست آورید.

تکرار ۱:

مقصد مبدا	1	2	3	4	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	22	17	50	$16 - 13 = 3$
2	14	14	13	19	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	23	M	50	$19 - 19 = 0$
4	M	0	M	0	0	50	$0 - 0 = 0$
تقاضا	30	20	70	30	60		
اختلاف ستونی	$16 - 14 = 2$	$14 - 0 = 14$	$13 - 13 = 0$	$19 - 0 = 19$	$15 - 0 = 15$		

ستون با بیشترین اختلاف

$0 = \min(0, 23, 19, 22)$

ستون ۴ حذف می‌شود و $x_{44} = 30$ در نظر گرفته می‌شود.

تکرار ۲:

مقصد مبدا	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	17	50	$16 - 13 = 3$
2	14	14	13	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	M	50	$19 - 19 = 0$
4	M	0	M	0	20	$0 - 0 = 0$
تقاضا	30	20	70	60		
اختلاف ستونی	$16 - 14 = 2$	$14 - 0 = 14$	$13 - 13 = 0$	$15 - 0 = 15$		

ستون با بیشترین اختلاف

$0 = \min(0, 17, 15, M)$

سطر ۴ حذف می شود و $x_{45} = 20$ در نظر گرفته می شود.

تکرار ۳:

مقصد مبدا	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
1	16	16	13	17	50	$16 - 13 = 3$
2	14	14	13	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	M	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20	70	40		
اختلاف ستونی	$16 - 14 = 2$	$16 - 14 = 2$	$13 - 13 = 0$	$17 - 15 = 2$		

سطر با بیشترین اختلاف

$13 = \min(17, 13, 16, 16)$

سطر ۱ حذف می شود و $x_{13} = 50$ در نظر گرفته می شود.

تکرار ۴:

مقصد مبدا	1	2	3	5	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	13	15	60	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	M	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20	20	40		
اختلاف ستونی	$19 - 14 = 5$	$19 - 14 = 5$	$20 - 13 = 7$	$M - 15 = 2$		

$15 = \min(15, M, 40)$
 ستون با بیشترین اختلاف

ستون ۵ حذف می شود و $x_{25} = 40$ در نظر گرفته می شود.

تکرار ۵:

مقصد مبدا	1	2	3	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	13	20	$14 - 13 = 1$
3	19	19	20	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20	20		
اختلاف ستونی	$19 - 14 = 5$	$19 - 14 = 5$	$20 - 13 = 7$		

$13 = \min(13, 20)$
 ستون با بیشترین اختلاف

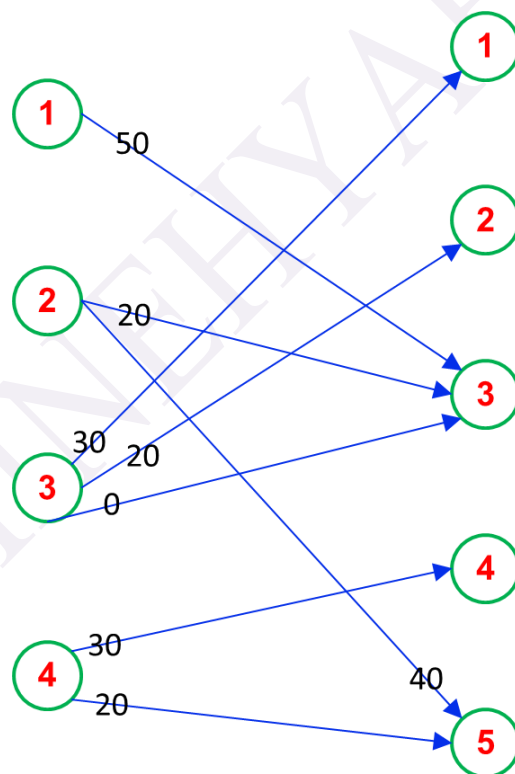
ستون ۳ حذف می شود و $x_{23} = 20$ در نظر گرفته می شود.

تکرار ۶:

مقصد مبدا	1	2	عرضه	اختلاف سطری
2	14	14	0	$14 - 14 = 0$
3	19	19	50	$19 - 19 = 0$
تقاضا	30	20		
اختلاف ستونی	$19 - 14 = 5$	$19 - 14 = 5$		

جدول نهایی است و داریم: $x_{33} = 0; x_{32} = 20; x_{31} = 30$

جواب اساسی اولیه برای مسئله حمل و نقل به صورت زیر می شود.



دستور توقف

هدف دستور توقف، آزمون بهینگی جواب اساسی موجه فعلی است. یک جواب اساسی موجه بهینه است

اگر و فقط اگر به ازای کلیه متغیرهای غیر اساسی x_{ij} رابطه $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ برقرار باشد.

برای کنترل شرایط بالا باید مقدار u_i و v_j را محاسبه کرد. در صورتیکه متغیر x_{ij} اساسی باشد آنگاه $c_{ij} = u_i + v_j$ خواهد بود که از حل دستگاه معادلات برای متغیرهای اساسی می‌توان u_i و v_j را محاسبه کرد. به دلیل این که تعداد معادلات یک واحد از تعداد متغیرها کمتر است می‌توان برای یافتن جواب این دستگاه معادلات، یکی از متغیرها را مساوی با مقدار دلخواه گرفت و با توجه به ساختار ساده دستگاه معادلات، مقدار سایر متغیرها را بدست آورد.

برای نشان دادن این موضوع، اگر متغیرهای اساسی x_{31} ، x_{32} ، x_{34} ، x_{21} ، x_{23} ، x_{13} ، x_{15} و x_{45} باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{array}{ll} x_{31} : 19 = u_3 + v_1 & x_{23} : 13 = u_2 + v_3 \\ x_{32} : 19 = u_3 + v_2 & x_{13} : 13 = u_1 + v_3 \\ x_{34} : 23 = u_3 + v_4 & x_{15} : 17 = u_1 + v_5 \\ x_{21} : 14 = u_2 + v_1 & x_{45} : 0 = u_4 + v_5 \end{array}$$

اگر $u_3 = 0$ قرار دهیم (چون بیشترین حضور در معادلات را دارد)، مقادیر سایر متغیرها به صورت زیر بدست می‌آید.

$$v_1 = 19; v_2 = 19; v_4 = 23; u_2 = 14 - 19 = -5; v_3 = 13 - (-5) = 18 \\ u_1 = 13 - 18 = -5; v_5 = 17 - (-5) = 22; u_4 = -22.$$

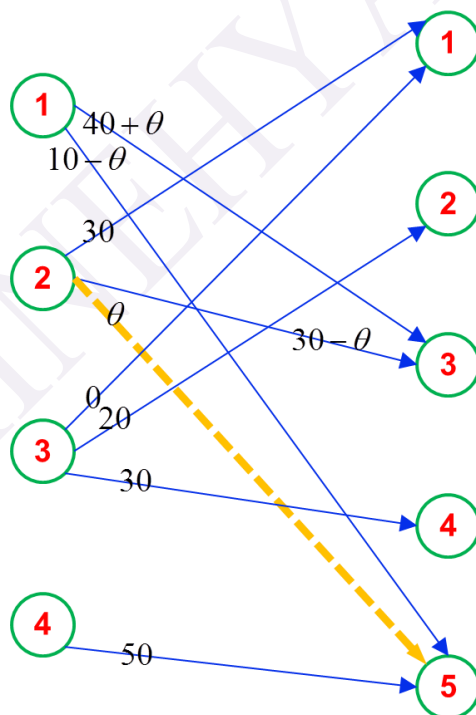
با در اختیار داشتن مقدار متغیرهای همزاد می‌توان شرایط بهینگی را کنترل کرد.

قدم تکراری

در این قدم، متغیر اساسی ورودی و متغیر اساسی خروجی را تشخیص می‌دهیم. در روش سیمپلکس مسئله حمل‌ونقل، متغیری که منفی‌ترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ را داشته باشد، به عنوان متغیر اساسی ورودی در نظر می‌گیریم. براساس مقادیر و از مرحله قبل، جدول سیمپلکس مسئله حمل‌ونقل به صورت زیر می‌شود.

مقصد مبدا	1	2	3	4	5	عرضه	u_i
1	16 +2	16 +2	13 40	22 +4	17 10	50	-5
2	14 30	14 0	13 30	19 +1	15 -2	60	-5
3	19 0	19 20	20 +2	23 30	M M-22	50	0
4	M M+3	0 +3	M M+4	0 -1	0 50	50	-22
تقاضا	30	20	70	30	60		
v_i	19	19	18	23	22		

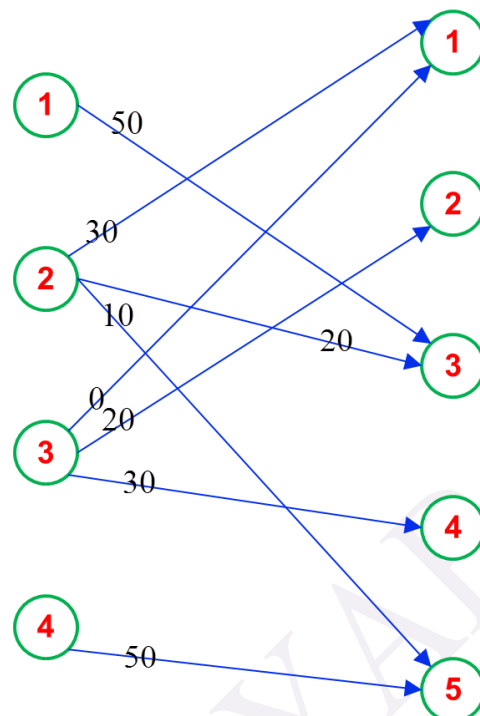
در جدول فوق، متغیر x_{25} دارای کمترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ است است و به عنوان متغیر ورودی استفاده می‌شود. برای یافتن متغیر اساسی خروجی از پایه یک سری کارهای زنجیری نسبتاً ساده به صورت زیر انجام می‌شود.



در شکل فوق، مقدار θ تا اندازه‌ای باید افزایش یابد که هزینه کمان منفی نشود لذا خواهیم داشت:

$$10 - \theta \geq 0; 30 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta = 10$$

با افزایش مقدار θ به اندازه ۱۰، متغیر x_{15} از جواب اساسی خارج می‌شود و x_{15} متغیر اساسی خروجی است. در این صورت جواب اساسی موجه جدید به صورت زیر می‌شود.



قبل از حل چند مثال، بیان رسمی روش سیمپلکس برای مسئله حمل‌ونقل را ادامه خواهیم داشت:

قدم ابتدایی: جواب اساسی موجه ابتدایی را با استفاده از یکی از دو روش شمال غربی یا روش تخمین فوگل بدست آورید.

دستور توقف: دستگاه معادله $c_{ij} = u_i + v_j$ را برای متغیرهای اساسی حل کنید و مقدار متغیرهای همزاد u_i و v_j را بدست آورید. در صورتیکه برای تمامی متغیرهای غیراساسی رابطه $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه جواب اساسی موجه فعلی بهینه است، در غیر این صورت به قدم تکراری بروید.

قدم تکراری:

قسمت ۱: متغیر غیر اساسی x_{ij} که منفی ترین مقدار $c_{ij} - u_i - v_j$ را به عنوان متغیر اساسی ورود در نظر بگیرید.

قسمت ۲: متغیر اساسی خروجی را براساس عکس العمل های زنجیره ای تعیین کنید.

قسمت ۳: جواب اساسی موجه جدید را مشخص کنید.

برو به قدم توقف.

BEHINEHYAB.COM

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**