

# درس ۱: برنامه‌ریزی خطی

تهیه شده توسط گروه آموزشی بهینه‌یاب



## تحقیق در عملیات چیست؟

تحقیق در عملیات را برخوردی علمی با تصمیم‌گیری‌هایی دانست که در جریان عملیات سیستم‌های سازمان یافته انجام می‌گیرند. به عبارت دیگر تحقیق در عملیات در رابطه با مسائل مربوط به هدایت و هماهنگی عملیات و فعالیت‌های گوناگون به کار گرفته می‌شود. تحقیق در عملیات در زمینه‌های گوناگونی نظیر اقتصاد، تجارت، صنعت، دولت، بهداشت و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد. تحقیق در عملیات به مسائل با نگرشی نظام گرا (systematic) بررسی می‌نماید و کوشش می‌کند تا تضاد منابع بخش‌های مختلف یک سازمان را به طوری حل نماید که بهترین نتیجه یا همان جواب بهینه برای کل سازمان ایجاد شود.

تحقیق در عملیات شامل بخش‌های مختلفی است که برنامه‌ریزی خطی ریاضی یکی از مهمترین بخش‌های آن است. در برنامه‌ریزی خطی از مدلی ریاضی به منظور تشریح مسئله مورد نظر استفاده می‌شود. کلمه خطی به معنای آن است که تمام روابط ریاضی این مدل لزوماً باید خطی باشند. تولد برنامه‌ریزی خطی به سال ۱۹۴۷ میلادی باز می‌گردد که در آن زمان جورج دانتزیگ (George Dantzig) برای پروژه محاسبات علمی برنامه‌های بهینه، روش سیمپلکس را برای حل مسائل عمومی برنامه‌ریزی خطی ابداع کرد. به قدری این ابداع در علم مدیریت تاثیر گذار بود که جورج دانتزیگ را تا پای جایزه نوبل پیش برد ولی هیچگاه موفق به گرفتن این جایزه نشد.

## فرموله کردن مسئله به صورت برنامه‌ریزی خطی

این بخش را با فرمول بندی یک مثال کوچک برنامه‌ریزی خطی ادامه می‌دهیم. این مثال به اندازه کافی ساده است که می‌توان آن را به صورت گرافیکی مورد بررسی قرار داد.

**مثال:** یک شرکت تولیدی درب و پنجره، داراه سه کارگاه است. در کارگاه ۱ قاب‌های آلومینیومی و قسمت‌های فلزی تولید می‌شود. در کارگاه ۲، قاب‌های چوبی تولید می‌شود و در کارگاه ۳، برش شیشه و سوار کردن آن به قاب ها انجام می‌شود. مدیریت این کارگاه ها به دنبال تولید دو محصول جدید هستند و از مرکز تحقیق در عملیات خواسته اند که میزان تولید از هر محصول را با توجه به ظرفیت کارگاه چند واحد

است. محصول ۱، دری با قابی آلومینومی و محصول ۲ پنجره‌ای شیشه با قاب چوبی است. با توجه به این که هر دو محصول برای جوشکاری نیاز به کارگاه ۳ دارد، ظرفیت این کارگاه باعث می‌شود که رقابتی بین این دو محصول ایجاد شود. در جدول زیر سود هر محصول، میزان استفاده از منابع و ظرفیت هر کارگاه آورده شده است.

| ظرفیت لازم برای تولید هر واحد<br>(در هر دقیقه) |   |   | ظرفیت موجود<br>(در هر دقیقه) |
|------------------------------------------------|---|---|------------------------------|
| محصول<br>کارگاه                                | 1 | 2 |                              |
| 1                                              | 1 | 0 | 4                            |
| 2                                              | 0 | 2 | 12                           |
| 3                                              | 3 | 2 | 18                           |
| سود هر واحد                                    | 3 | 5 |                              |

$x_1$  و  $x_2$  به ترتیب تعداد محصولات ۱ و ۲ در هر دقیقه است و  $z$  نشان دهنده سود حاصل از فروش در هر دقیقه است. در ادبیات تحقیق در عملیات به  $x_1$  و  $x_2$  متغیرهای تصمیم‌گیری (decision variables) و  $z$  را تابع هدف (objective function) گفته می‌شود.

برای تولید هر واحد محصول ۱، ۱ واحد از کارگاه ۱ مصرف می‌شود که در هر دقیقه کارگاه ۱ تنها ۴ واحد ظرفیت برای محصول جدید موجود دارد. این محدودیت به صورت جبری  $x_1 \leq 4$  نمایش داده می‌شود. به طور مشابه برای کارگاه شماره ۲، محدودیت  $2x_2 \leq 12$  برای محصول ۲ مورد نیاز است. ظرفیت کارگاه ۳ توسط هر دو محصول استفاده می‌شود که باعث محدودیت  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$  می‌شود. چون محصول‌ها نمی‌توانند منفی باشند، متغیرهای تصمیم‌گیری نامنفی هستند و نمایش ریاضی آن به صورت  $x_1 \geq 0$  و  $x_2 \geq 0$  می‌شود. به طور خلاصه نمایش ریاضی مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله به صورت زیر می‌شود.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

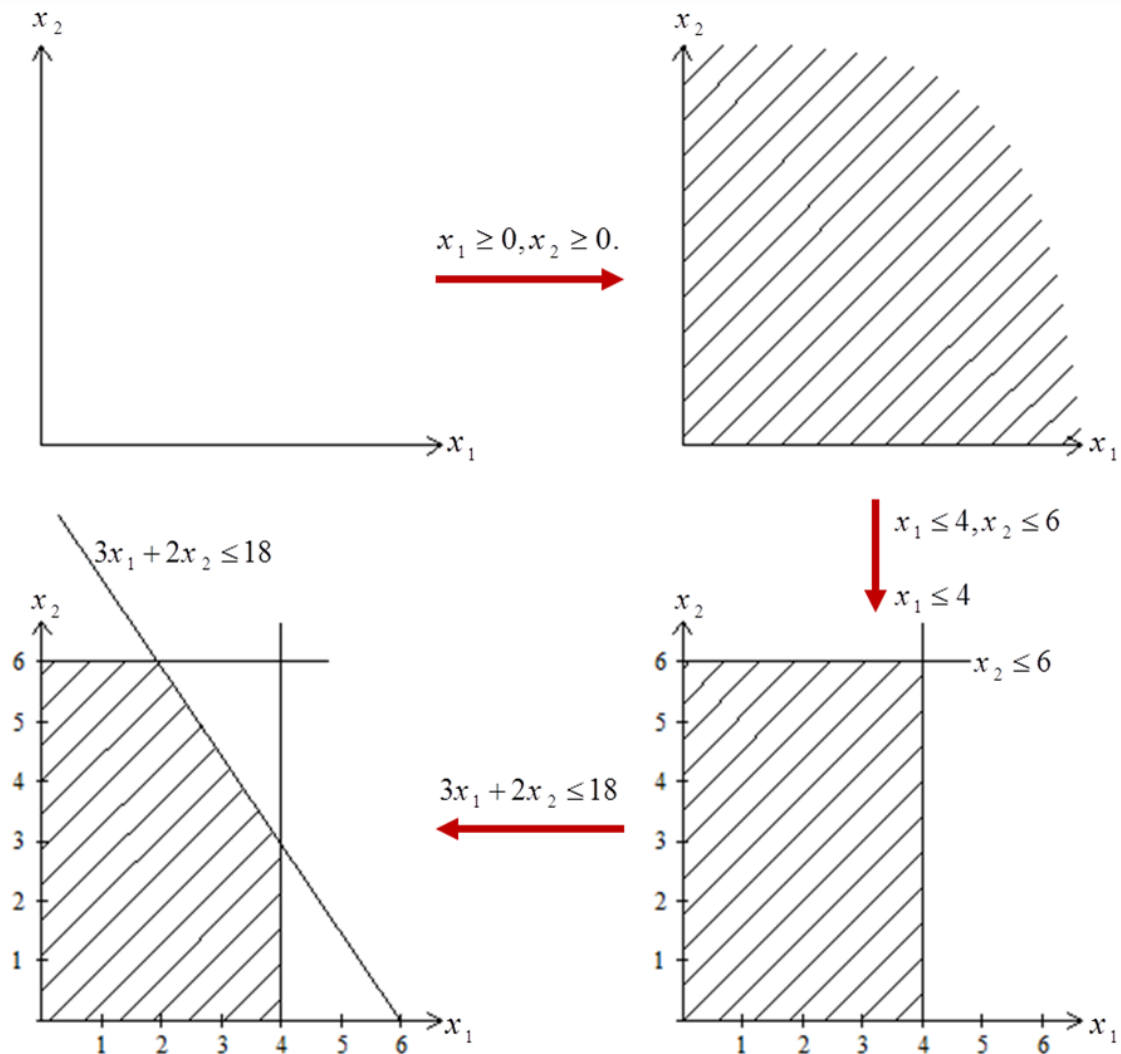
$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

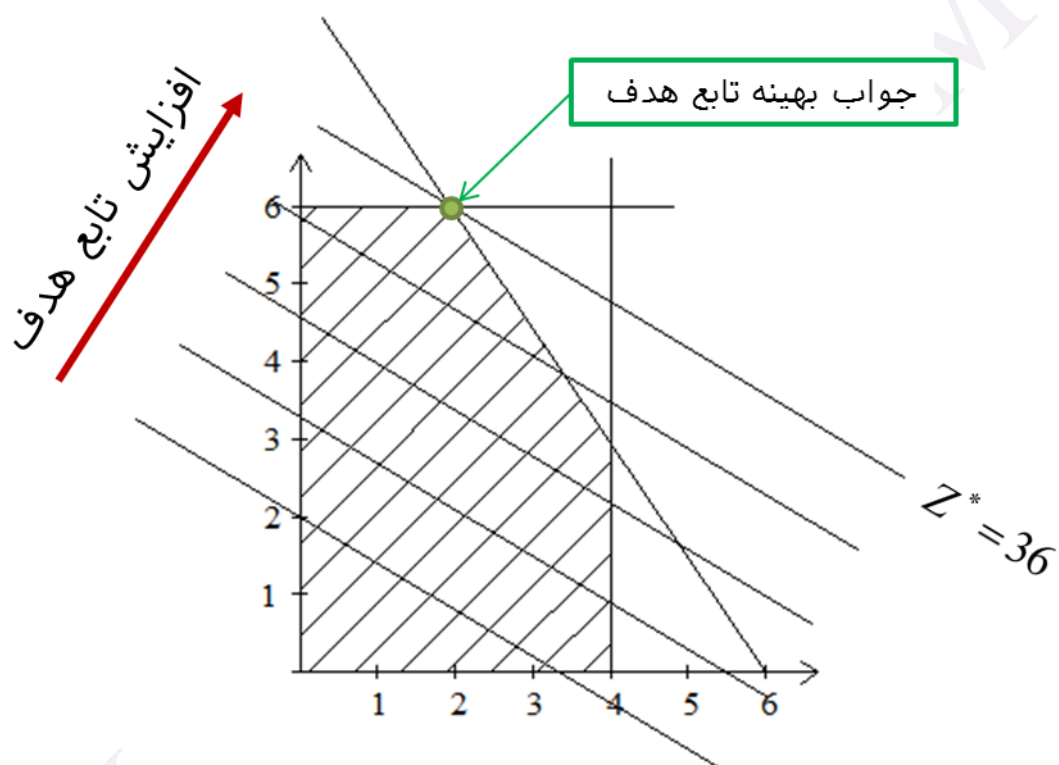
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

به دلیل این که این مدل برنامه‌ریزی خطی شامل تنها دو متغیر  $x_1$  و  $x_2$  است، می‌توان برای حل آن از روش ترسیمی بهره برد. این شیوه مستلزم رسم یک شکل با محورهای  $x_1$  و  $x_2$  است. هر یک از محدودیت‌ها بخشی از محور دوطبقه را پوشش می‌دهد که از اشتراک این محدودیت‌ها، فضای موجه یا امکان پذیر مسئله ایجاد می‌شود. ما به دنبال نقطه‌ای هستیم که بیشترین مقدار عبارت  $Z$  را ایجاد می‌کند. برای رسم ناحیه امکان پذیر محدودیت‌ها را تک تک به صورت زیر اضافه می‌کنیم.



**توجه:** برای اضافه کردن محدودیت  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$  به فضای امکان پذیر، کافی است که خط  $3x_1 + 2x_2 = 18$  را ابتدا رسم کنید. با توجه به این که نقطه مبدا  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  در رابطه  $3(0) + 2(0) \leq 18$  صدق می‌کند، فضای زیر خط  $3x_1 + 2x_2 = 18$  بیان ترسیمی محدودیت  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$  است. تنها گام باقی مانده یافتن نقطه‌ای است که مقدار  $Z = 3x_1 + 5x_2$  را در منطقه امکان پذیر بیشینه شود. فرض کنید که  $Z = 10$  باشد. اگر این مقدار در محدوده امکان پذیر قرار گرفت می‌توان این مقدار را افزایش داد. در غیر این صورت  $Z$  را به نحوی باید تغییر داد تا در محدودیت امکان پذیر جا بگیرید. از رسم  $3x_1 + 5x_2 = 10$  بر روی ناحیه امکان پذیر می‌توان ملاحظه کرد که تعداد زیادی از نقاط محدوده امکان پذیر روی این خط قرار می‌گیرند. با افزایش مقدار ۱۰ به ۲۰ خواهیم دید که بازهم

بخشی از خط  $3x_1 + 5x_2 = 20$  در داخل ناحیه امکان پذیر قرار می گیرد. به این ترتیب با افزایش مقدار ثابت خط، مجموعه‌ای از خصوص موازی رسم می شوند و در نهایت خطی انتخاب می شود که بیشترین اختلاف را با مرکز مختصات دارد. همکان طور که در شکل زیر پیداست، نقطه  $(2, 6)$  از خط  $3x_1 + 5x_2 = 36$  می گذرد و این نقطه  $(x_1 = 2, x_2 = 6)$  بیشترین عایدی را برای کارگاه ایجاد می نماید. لذا با تولید ۲ واحد از محصول ۱ و ۶ واحد از محصول ۲، بیشترین عایدی (۳۶) در دقیقه ایجاد می شود.



### بیان ریاضی مدل برنامه ریزی خطی

در این بخش می توان مسئله شرکت تولید درب و پنجره را تعمیم داد. در این مسئله ۳ کارگاه یا منبع با محدودیت ظرفیتی وجود دارند که باید دو محصول با توجه به نیازشان از این سه منبع استفاده کنند. اکنون فرض کنند  $m$  منبع را می خواهیم به  $n$  محصول رقیب تخصیص دهیم. فرض کنید که  $x_j$  حجم محصول  $j$  که  $j = 1, \dots, n$  و  $z$  معیار کارآمدی کلیه محصولات تولید شده است. همچنین فرض کنید  $c_j$  تغییر کارآمدی یا  $z$  در اثر هر واحد افزایش  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) باشد. همچنین  $b_i$  نشان دهنده مقدار موجود منبع

$i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) و بالاخره  $a_{ij}$  نشانگر مقداری از منبع  $i$  است که توسط محصول  $j$  مصرف می‌شود. خلاصه اطلاعات در جدول زیر آمده است.

| منبع \ محصول                             | میزان مصرف از منابع به ازای هر واحد از محصول |          |     |          | مقدار موجود از منبع |
|------------------------------------------|----------------------------------------------|----------|-----|----------|---------------------|
|                                          | 1                                            | 2        | ... | n        |                     |
| 1                                        | $a_{11}$                                     | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$               |
| 2                                        | $a_{21}$                                     | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ | $b_2$               |
| ...                                      | ...                                          | ...      | ... | ...      | ...                 |
| m                                        | $a_{m1}$                                     | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$               |
| مقدار تغییر به ازای هر واحد افزایش محصول | $c_1$                                        | $c_2$    | ... | $c_n$    |                     |
| میزان تولیدی محصول                       | $x_1$                                        | $x_2$    | ... | $x_n$    |                     |

با توجه به جدول بالا می‌توان فرم کلی مسئله تخصیص منابع را به زبان ریاضی به صورت زیر بیان کرد.

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

مدل فوق شکل استاندارد مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌نامیم. هر مسئله‌ای که به شکل فوق باشد یک

مسئله برنامه‌ریزی خطی است.

**توجه:** این شکل استاندارد در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد و در سایر منابع شکل‌های دیگری به

عنوان فرم استاندارد تعریف می‌شود.

## واژه‌های مربوط به مدل برنامه‌ریزی خطی

برای سادگی در بیان مسائل در برنامه‌ریزی خطی، واژگان متداول به صورت زیر تعریف می‌شود.

**تابع هدف (objective function):** به تابع  $C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$  که پیدا کردن حداکثر آن مورد نظر است اطلاق می‌شود.

**محدودیت کارکردی (functional constraint):** به تابعی که نشان دهنده میزان کل مصرف هر منبع برای کلیه محصولات است اطلاق می‌شود.

**محدودیت نامنفی بودن (non-negativity constraint):** به روابط  $x_j \geq 0$  اطلاق می‌شود.

**محدودیت‌ها (constraints):** به مجموعه محدودیت‌های کارکردی و نامنفی بودن اطلاق می‌شود.

**متغیرهای تصمیم (decision variables):** به متغیرهای  $x_j$  که میزان هر محصول را نشان می‌دهد اطلاق می‌شود.

**پارامترها (parameters):** به داده‌های  $a_{ij}$ ،  $b_i$  و  $C_j$  اطلاق می‌شود.

**نکته:** ممکن است مدل استاندارد با بسیاری از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی در واقعیت تفاوت داشته باشد. شکل‌های مجاز دیگر از مسئله برنامه‌ریزی خطی که امکان تبدیل به شکل استاندارد را دارد به صورت زیر است:

ممکن است به جای حداکثر کردن ( $Max$ )، حداقل کردن ( $Min$ ) در نظر باشد.

ممکن است برخی از محدودیت‌های کارکردی به صورت بزرگتر – مساوی باشند.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

ممکن است برخی از محدودیت‌های کارکردی به صورت تساوی باشند.

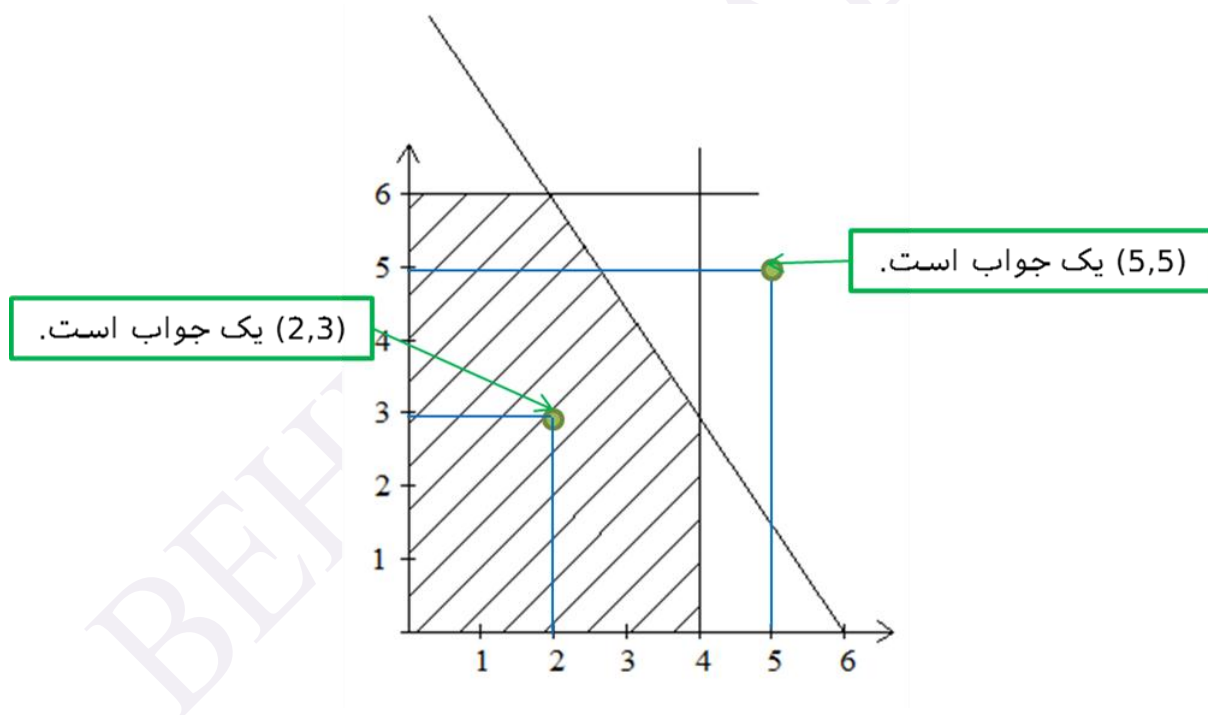


$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

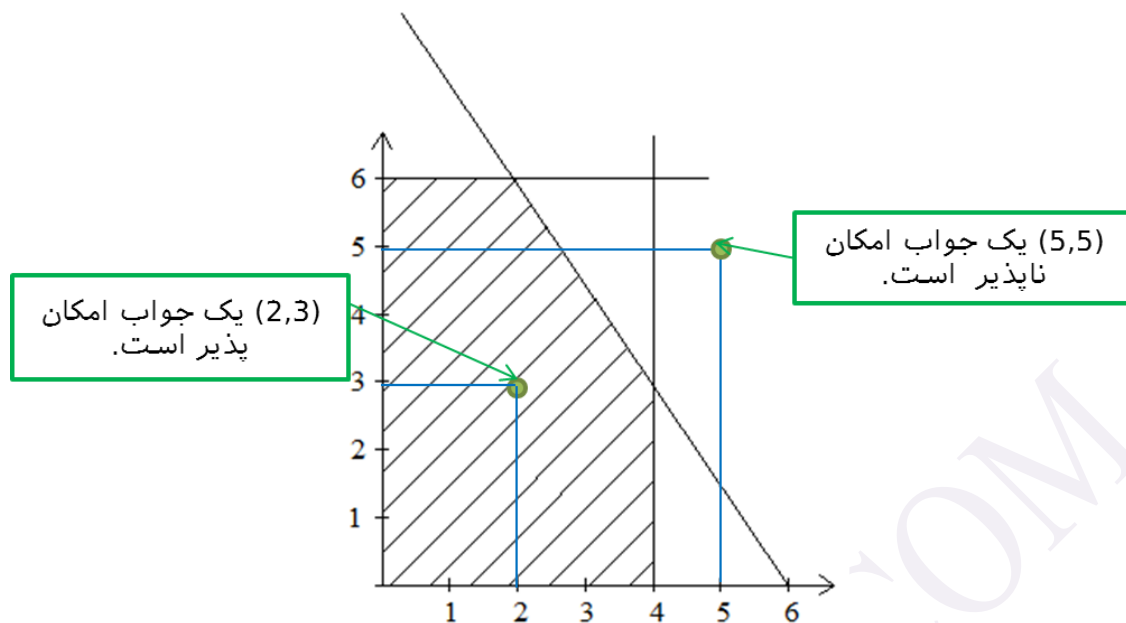
ممکن است برخی از متغیرهای بتوانند فقط منفی یا هم منفی یا مثبت (آزاد در علامت یا *unrestricted in sign*) باشند.

### واژه‌های مربوط به جواب‌های مدل

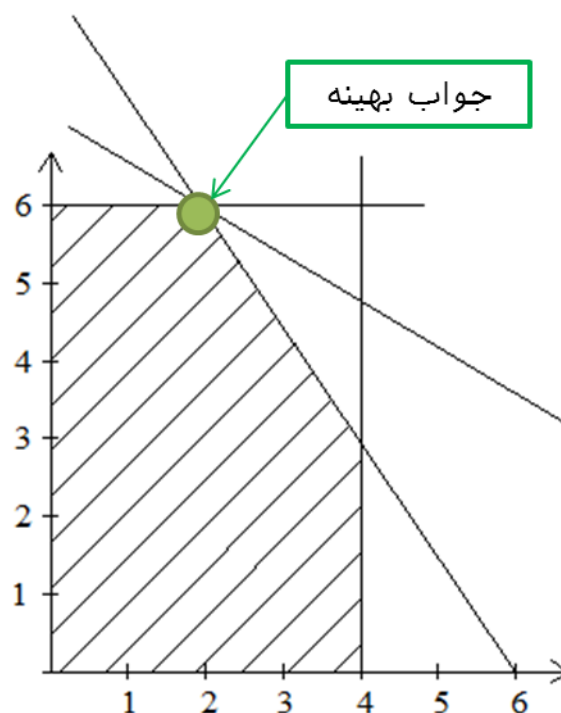
**جواب (solution):** به هر مجموعه از مقادیر که به متغیرهای تصمیم  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  اختصاص یابد، اطلاق می‌شود. برای مثال در شکل مثال قبلی، نقطه  $(2, 3)$  و  $(5, 5)$  جواب‌های مدل برنامه‌ریزی خطی هستند و این که در داخل یا خارج محدودیت باشند اهمیت ندارد.



**جواب موجه یا امکان پذیر (feasible solution):** به جوابی که در تمامی محدودیت‌ها (عملکردی و نامنفی بودن) صدق می‌نماید، اطلاق می‌شود. برای مثال در شکل فوق، نقطه  $(2, 3)$  جواب موجه و جواب  $(5, 5)$  یک جواب امکان ناپذیر است.



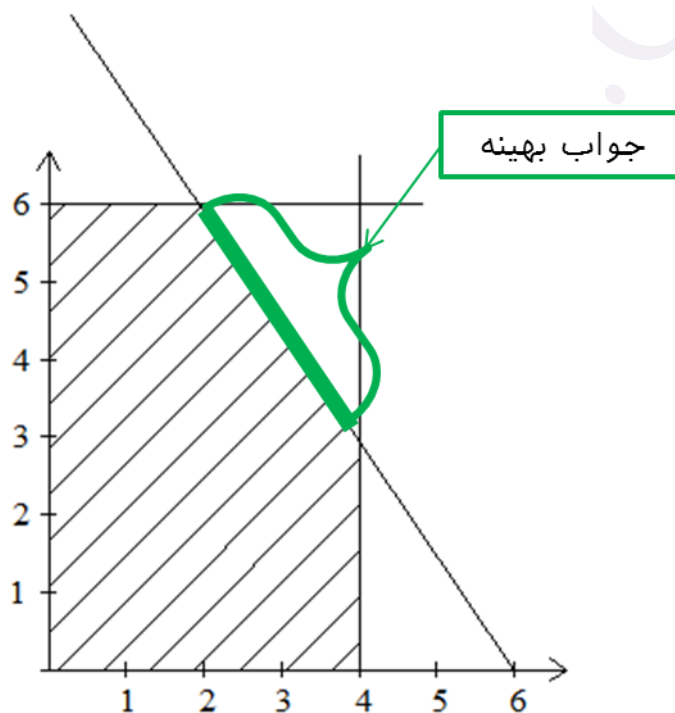
**جواب بهینه** (*optimal solution*): جوابی موجه است که به ازای آن (جواب بهینه)، مقدار تابع هدف مطلوب‌ترین است. در شکل زیر جواب بهینه مثال قبلی آورده شده است.



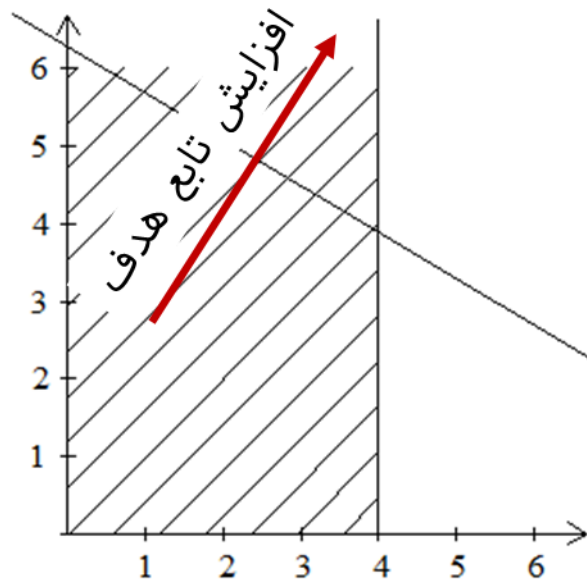
برای جواب بهینه چهار امکان وجود دارد:

۱- جواب بهینه یکتا: در این صورت جواب بهینه تنها یک نقطه از فضای امکان پذیر است (مشابه شکل فوق).

۲- جواب بهینه چندگانه (*multiple optimal solution*): غالباً مسئله برنامه‌ریزی خطی یک جواب یکتا دارد. ولی لزوماً این چنین نیست. در مثال قبلی اگر سودآوری محصول شماره ۲ از ۵ به ۲ واحد کاهش یابد، در این صورت خط تابع هدف به موازات خط  $3x_1 + 2x_2 = 18$  خواهد شد و از این رو تمامی نقاط روی خط  $3x_1 + 2x_2 = 18$  بین نقاط  $(2, 6)$  و  $(4, 3)$  جواب‌های بهینه مسئله خواهد بود.



۳- جواب بی‌کران (*unbound solution*): این جواب زمانی به وجود می‌آید که محدودیت‌ها نتوانند از افزایش لایتناهی تابع هدف ( $z$ ) در جهت مطلوب جلوگیری نمایند. در مثال قبلی اگر دو محدودیت  $2x_2 \leq 12$  و  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$  حذف شوند، فضای امکان پذیر به صورت زیر می‌شود که مقدار تابع هدف می‌تواند در جهت لایتناهی افزایش یابد.



۴- فاقد جواب (*infeasible solution*): در این صورت مسئله اصولاً جواب موجه ندارد. اگر در مثال قبلی، محدودیت  $2x_2 \leq 12$  به  $2x_2 \geq 12$  و محدودیت  $x_1 \leq 4$  به  $x_1 \geq 4$  تغییر نماید، فضای امکان پذیر تهی می‌شود و مسئله فاقد جواب خواهد شد.

**مثال:** یک منطقه شامل سه مزرعه است که دو عامل زمین و آب امکانات کاشت این مزارع را محدود می‌کند. اطلاعات مربوطه به آب موجود و زمین قابل کشت سه مزرعه در جدول زیر آمده است.

| آب موجود<br>(هزار متر مکعب) | زمین قابل کشت<br>(هکتار) | مزرعه |
|-----------------------------|--------------------------|-------|
| 600                         | 400                      | 1     |
| 800                         | 600                      | 2     |
| 375                         | 300                      | 3     |

محصولات مناسب کشت در این منطقه عبارتند از چغندر قند، پنبه و ذرت. حداکثر میزان کشت (برای حصول ترکیب متناسب) و میزان آب مصرفی و منافع فروش این سه محصول با هم متفاوت است که در جدول زیر آمده است.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com) مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی [behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com) و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**