درس 14: نظریه بازی

(به روز شده در ۲۳ تیرماه ۱۴۰۱)

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

بازی توصیفی از فعالیت های اقتصادی، اجتماعی و سیاسی افراد است. هر یک از این فعالیت ها یا بازی ها دارای ساختار و قواعدی هستند که بازیکنان طبق آن به انجام بازی برای رسیدن به اهداف خود می پردازد. این قواعد و ساختار به ما می گویند که هر بازیکن چه اقداماتی می تواند انجام دهد و دلیل آن چیست. برای تحلیل این فعالیت ها لازم است که قواعد هر بازی را بشناسیم تا در قالب آن بتوان تحلیل نمود که افراد چگونه از بین اعمال مختلف دست به **انتخاب** می زنند و چه پیامدی برای آن ها دارد.

تعریف نظریه بازی

در دنیای واقعی هر فردی در تصمیم گیری های خود با **عکس العمل** دیگران مواجه است. پیامد موقعیت هایی که فرد در آن قرار می گیرد از یک طرف بستگی به تصمیمات وی از طرف دیگر بستگی به تصمیمات دیگران دارد. از این رو افراد در زندگی واقعی خود همواره با حالاتی مواجه اند که می توانند با دیگران **هم سویی** یا **تضاد** داشته باشند. این ویژگی ها عامل مهمی برای توجه صاحب نظران به **نظریه بازی ها** بوده است. آن ها به دنبال این بودند تا نشان دهند چگونه بازی ها، جنگ ها، رفتارهای اقتصادی و سایر فعالیت ها در اتخاذ تصمیمات استراتژیک با هم مشابهت دارند. در واقع می توان گفت این مبنایی برای شکل گیری نظریه بازی ها بود. هدف این نظریه ارایه روشی برای بیان حقایقی از زندگی انسان است که بیانگر تضاد و هم سویی است. از طرف دیگر، به هر حال ویژگی نظریه بازی ها به گونه ای بود که می توانست در تبیین رفتار اقتصادی مفید واقع شود.

در این راستا اولین مطالعه جامع و منظم به منظور به کارگیری نظریه بازی ها در اقتصاد، توسط ون نویمن و اسکار مورگنشترن در سال ۱۹۴۴ صورت گرفت که نظرات آن ها در کتابی تحت عنوان **"نظریه بازی و رفتار اقتصادی"** منتشر گردید. نظریه بازی ها پس از تحولات متعددی که در آن به وجود آمد، برای کمک به توضیح این که کدام تصمیم ها در خصوص همکاری یا عدم همکاری با رقبا نتیجه بخش تر است، به کار گرفته شد. جان نش، جان هارسنی و ریچارد سلتون سه نظریه پردازی بودند که به خاطر مطالعات بدیع خود در زمینه نظریه بازی در سال ۱۹۹۴ برنده جایزه نوبل اقتصاد شدند.

به هر حال، تصور عمومی از بازی به معنی تفریح و سرگرمی است که این تعبیر با آنچه در نظریه بازی ها طرح می‌شود تفاوت اساسی دارد. در نظریه بازی، یک بازی مجموعه ای از **قواعد، ترتیبات و مناسباتی** است که برای تمام بازیکنان شناخته شده است. به بیان دیگر یک بازی مجموعه ای از قواعد شناخته شده برای تمام بازیکنان است که معین می کند هر یک از آن ها چه انتخابهایی می توانند داشته باشند و هر انتخاب، چه پی آمدی را دنبال دارد. اغلب بازی ها دارای چند ویژگی مشترک هستند.

اولا بازی ها قواعدی دارند که عملکرد بازیکنان طبق آن شکل می گیرد و این قواعد، پیامد هر تصمیمی را به آن تصمیم مربوط می سازد.

ثانیا هر بازی دارای تعدادی تصمیم گیرنده عقلایی یا بازیکن است که به طور جدی در تلاش و رقابت برای کسب بهترین نتیجه می باشند.

عناصر بازی و تقسیم بندی بازی ها

بازی ها را می توان از جنبه های مختلفی تقسیم بندی نمود. این تقسیم بندی را می توان بر اساس تعداد بازیکنان، تعداد استراتژی ها، توافق و عدم توافق، اطلاعات کامل و اطلاعات ناقص انجام داد. در این جا به برخی از این تقسیم بندی ها اشاره می کنیم.

بازیکن

در یک بازی، به هر تصمیم گیرنده ای بازیکن می گویند. بنابراین بازیکن فردی است که در فضای استراتژیک بازی اقدام به تصمیم گیری می کند و این تصمیمات مبتنی بر رفتار عقلایی او است، به گونه ای که بتواند با در نظر گرفتن رفتار رقبای خود به بهترین نتیجه ممکن برسد. بازی ها بر حسب تعداد بازیکن به بازی های دو نفره، سه نفره و یا n نفره تقسیم می شوند. البته توجه داریم که در یک بازی دو نفره، ممکن است هر بازیکن خود شامل یک گروه باشد، مانند بازی دو نفره بین دو کشور در مورد تعیین نرخ تعرفه های گمرکی.

استراتژی

استراتژی بیانگر عمل یا مجموعه ای از اعمال است که یک بازیکن می تواند با توجه به اطلاعاتی که دارد، انتخاب نماید. در یک بازی، هر بازیکن تعدادی استراتژی دارد که می تواند هر کدام را متناسب با شرایط و اهداف خود انتخاب نماید. استراتژی های یک بازیکن ممکن است محدود باشد، مانند بازی سکه که فقط دو استراتژی وجود دارد و یا بازی شطرنج که تعداد حرکات معین است. در حالت کلی، بازیکن دارای n استراتژی است. اما یک مسئله را در نظر بگیرید که دو بنگاه وجود دارد. در تعیین سطح تولید، بی نهایت استراتژی وجود دارد که در این حالت، تعداد استراتژی ها نامحدود است.

برد[1]

به طور کلی آنچه را که در یک بازی عاید بازیکن می‌شود، برد می گوییم. برد می تواند بیانگر سود، مطلوبیت، و ... باشد. **برد کل بازی** از جمع برد تمامی بازیکنان بعد از اتمام بازی بدست می اید. بر این اساس، برد کل ملاک دیگری در تقسیم بندی بازی ها است که آن ها را به سه نوع تقسیم می کند.

در **نوع اول**، مجموع برد بازیکنان صفر می باشد، مانند بازی دو نفره پرتاب سکه که برد یک بازیکن معادل باخت بازیکن دیگر است. در این جا جمع جبری برد دو بازیکن صفر است که اصطلاحا به آن بازی **دو نفره با برد کل صفر** یا *Two-person game with zero sum* یا **بازی جمع صفر** گفته می‌شود.

نوع دوم، بازی های است که جمع برد هر دو بازیکن در هر شرایطی برابر با عدد ثابتی است، مانند دو تولید کننده که بازار فروش یک کالا را در اختیار دارند و مصرف کنندگان این کالا در هر شرایطی مبلغ ثابتی را صرف خرید این کالا می کنند. در این حالت مجموع برد دو بازیکن برابر با مبلغ را صرف خرید این کالا می کنند. در این حالت مجموع برد دو بازیکن برابر با مبلغ ثابتی است که متقاضیان بابت آن کالا می پردازند. چنین بازی را **بازی با برد کل ثابت** یا به طور خلاصه **بازی جمع ثابت** می گویند. بازی نوع اول با نوع دوم تفاوتی ندارد قابل تبدیل به هم هستند.

[1] Payoff

نوع سوم، بازی هایی است که برد کل آن متغیر است، زیرا برد کل بر حسب انتخاب استراتژی های بازیکنان تغییر می کند.

بازی های همکارانه و غیرهمکارانه

یکی از ملاک های مهم در تقسیم بندی بازی ها این است که آیا پیش از انجام بازی بین بازیکنان مذاکره ای صورت می گیرد یا نه. اگر بین بازیکنان مذاکره ای صورت گیرد و توافقی هم به وجود بیاید و اجرا گردد، اصطلاحا به آن **بازی همکارانه**[۲] می گویند. اما اگر چنین مذاکراتی وجود نداشته باشد و یا به یک توافق قابل اجرا منجر نشود، آن را **بازی غیر همکارانه**[۳] می گویند. در واقع بازی توافقی، بازیکنان این امکان را دارند تا با هم ارتباط برقرار کرده و با هم مذاکره نمایند تا به یک قرارداد قابل اجرا برسند.

بازی های استراتژیک و تصادفی

شطرنج مثالی از یک بازی استراتژیک است که در آن بازیکنان حرکاتی را انجام می دهند و به همدیگر عکس العمل نشان می دهند. در چنین بازی هایی، انتخاب استراتژی ها و نتیجه حاصل از بازی به هوش، استعداد و تدبیر بازیکن بستگی دارد. در مقابل، بازی هایی وجود دارند که انتخاب استراتژی ها و نتیجه آن ها عمدتا به صورت اتفاقی یا تصادفی است. مثلا دو فرد در بازی پرتاب سکه را در نظر بگیرید که هر کدام از آن سکه ای در دست دارد و آن را پرتاب می کند. به عنوان مثال از قبل مشخص شده که اگر هر دو شیر بیاند، اولی ۱۰۰ ریال به دومی می پردازد. این یک بازی تصادفی است و بازیکن در انتخاب ها خود، اختیاری ندارد و هوش و تدبیر در آن نقشی ایفا نمی کند. بنابراین تفاوت اساسی بین بازی تصادفی و استراتژیک عبارت از میزان به کارگیری هوش و مهارت توسط بازیکنان است.

بازی های با اطلاعات کامل و ناقص

تقسیم بندی دیگری از بازی ها وجود دارد که بر مبنای میزان اطلاعات بازیکنان از وضعیت بازی می باشد. از هر بازیکن، تعداد بازیکنان، استراتژی ها هر یک از آن ها و همچنین میزان برد و باخت در پایان

---
[2] Cooperative games
[3] Noncooperative games

بازی را بداند، آن را **بازی با اطلاعات کامل**[۴] می گویند. اما در یک بـازی ممکـن اسـت بازیکنـان شـناخت کاملی از برد و باخت بازی نداشته باشند که به آن **بازی با اطلاعات ناقص**[۵] می گویند.

بازی های ایستا و پویا

بازی ایستا، بازی است که در آن حرکات بازیکنان، **همزمان**[۶] اسـت. در ایـن بـازی هـا، بـرای بازیکنـان شرایط به گونه ای توصیف می‌شود که گویا همه آن ها در یک لحظه اقدام به تصمیم گیـری مـی کننـد. در بازی پویا، حرکات بازیکنان به صورت متوالی و دنباله ای است یعنی یک بازیکن با مشاهده حرکـت بـازیکن اول، اقدام به حرکت می کند. اگر در بازی پویا، بازیکن دوم نتواند حرکت بازیکن اول را مشاهده نماید، ایـن بازی تفاوت چندانی با بازی ایستا ندارد. در این حالت، تنها تفاوت در این است که به یکی از بازیکنان، امتیاز انجام **اولین حرکت** را داده ایم که طبق آن می تواند **شروع کننده بازی** باشد. از جمله بـازی هـای ایسـتا می توان به بازی سنگ-کاغذ-قیچی و از جمله بازی های پویا یا دنباله ای می توان به بـازی شـطرنج اشـاره کرد.

تعادل

تعادل به معنی یک وضعیت ساکن است که تمایلی به تغییر از آن وجود ندارد. در نظریه بازی نیز تعادل وضعیت را نشان که بازیکنان انگیزه ای برای تغییر آن ندارند. لذا یافتن تعادل بازی، به معنی یافتن راه حلی برای بازی است که در آن، هر بازیکن بر اساس استدالال ها، پیش بینی ها و ترجیحات خود و همچنـین در پاسخ به رفتار رقبا، رفتار خود را شکل داده است و هیچ تمایلی برای بر هم زدن آن ندارد. در نظریـه بـازی، تعادل به معنای بهترین وضعیت یا بهترین راه حل نیست،. بلکه راه حلی برای بازی است که بازیکنان انگیزه ای برای خروج از آن ندارد.

[4] Complete information
[5] Incomplete informtation
[6] Simulaneous

بازی های ایستا با اطلاعات کامل

بازی ایستا به بازی گفته می‌شود که در آن حرکت بازیکنان به طور **همزمان** انجام می‌شود و هیچ تقدم و تاخیر وجود ندارد. گویی بازیکنان بدون اینکه همدیگر را ملاقات و یا رفتار همدیگر را مشاهده کنند، صرفا براساس حدس ها و اطلاعات خود، استراتژی های خود را انتخاب می کنند. از طرف دیگر فرض می‌شود که در این بازی ها، **اطلاعات کامل** وجود دارد. اطلاعات کامل بدین معنی است که هر بازیکن، تعداد بازیکنان، استراتژی های آن ها و بردهای پایان بازی را می داند. در اینجا منظور از برد، منافع حاصل از بازی مانند سود یا مطلوبیت است. در ادامه مهمترین نوع بازی ایستا با اطلاعات کامل بیان خواهد شد.

بازی های دونفره

در این بازی، دو نفر در بازی نقش دارند و از نوع غیر همکارانه هستند. در ادامه به طور خاص به یک نوع خاص از این نوع بازی با عنوان بازی دو نفره جمع صفر می پردازیم.

در **بازی های دونفری جمع صفر** یا ***Two Person-Zero Sum Game*** ، دو بازیگر حضور دارند که یکی از بازیگرها، بازیگر ۱ یا بازیگر سطری و دیگری بازیگر ۲ یا بازیگر ستونی هستند. بازیگر ۱ تنها مجاز به انتخاب یکی از سیاست ها از بین m سیاست خود است. به طور مشابه بازیگر ۲ یا بازیگر ستونی مجاز به انتخاب یکی از n سیاست است.

علت **جمع صفر** خواندن این بازی آن است که مقدار برد یکی دقیقا با میزان باخت بازیگر دوم مساوی است و جمع جبری برد خالص هر دو بازیگر برابر **صفر** است.

اگر بازیگر ۱ یا بازیگر سطری i-امین سیاست خود و بازیگر ۲ یا بازیگر ستونی نیز j-امین سیاست خود را انتخاب کند، بازیگر ۱ مقدار a_{ij} دریافت (برد) و بازیگر ۲ نیز مقدار a_{ij} را پرداخت (باخت) می کند. دریافتی یک بازیگر از محل پرداخت بازیگر دیگر امکان پذیر است و بهمین خاطر بازی را **مجموع صفر** (***Zero-sum***) می نامیم زیر حاصل جمع دریافت ها و پرداخت های بازیگران صفر است و منافع دو بازیگر کاملا در تضاد با هم باشند.

ماتریس پرداخت یا **بازده** (***Pay-off Matrix***) در این نوع بازی ها معمولا از دید بازیگر ۱ یا بازیگر سطری نوشته می‌شود. اگر $a_{ij} > 0$ یعنی بازیگر ۱ a_{ij} واحد را از بازیگر ۲ دریافت می کند و اگر $a_{ij} < 0$ یعنی بازیگر ۱ a_{ij} واحد به بازیگر ۲ پرداخت می کند. ماتریس پرداخت یا بازده به صورت زیر می‌شود.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & n \\
1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
$$

برای روشن شدن موضوع یک مثال می زنیم. دو بازیگر در یک بازی همزمان با یکدیگر یک یا دو انگشت خود را نشان می دهند. اگر تعداد انگشتان آن ها مساوی باشد، بازیگر اول مقدار یک دلار را به بازیگر دوم می پردازد و در غیر این صورت، بازیگر دوم باید یک دلار را به بازیگر اول بپردازد. به این ترتیب، هر بازیگر می تواند یکی از دو سیاست زیر را اتخاذ نماید.

- ✓ یک انگشت خود را نشان دهد.
- ✓ دو انگشت خود را نشان دهد.

جدول زیر بازده بازیگر اول بر حسب دلار را در صورت انتخاب هر یک از سیاست ها نشان می دهد.

		بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	−۱	۱
	سیاست ۲	۱	−۱

نکته: در نظریه بازی ها، سیاست قاعده ای از پیش تعیین شده است که مشخص می کند هر بازیگر در تقابل هر پیشآمد که در هر یک از مراحل می تواند رخ دهد، چه واکنشی باید داشته باشد و هر بازیگر قبل از شروع بازی سیاست هایی که خود و طرف مقابل می تواند اتخاذ نماید را تعیین کرده و جدول بازده را از دیدگاه خود بدست می آورد.

نظریه بازی بر مبنای **دو** فرض استوار است.

- ✓ هر دو بازیگر عاقل و منطقی هستند و هر دو بازیگر نهایت توان خود را در مصاف حریف به کار می بندد تا بهترین نتیجه دست یابد.
- ✓ هر بازیگر در هنگام انتخاب سیاست خود فرض می کند که رقیب وی با فهمیدن این سیاست چه سیاستی را انتخاب می کند.

مثال: دو سیاست مدار در یک مبارزه انتخاباتی در مقابل یکدیگر قرار دارند. برای دو روز آخر قبل از انتخابات که از اهمیت بسزایی برخوردار است باید برنامه مبارزاتی تهیه شود. هر دو سیاست مدار می خواهند دو روز باقی مانده را در دو شهر (الف) و (ب) بگذرانند. آن ها می توانند در هر شهر یک روز یا در یک شهر دو روز به سر برند. هر سیاست مدار از برنامه حریف تا وقتی که اعلام نشود بی اطلاع است.

این دو رقیب از مدیران برنامه خود در این دو شهر خواسته اند تا اثرات تصمیم خود و رقیب را در مورد گذراندن یک یا دو روز در این دو شهر بر حسب پیش بینی افزایش یا کاهش تعداد رای بیابند.

برای اینکه این مسئله در غالب یک بازی دو نفری – جمع صفر فرموله شود. در ابتدا باید دو طرف بازی (که در این جا دو سیاست مدار هستند) سیاست های هر کدام و همچنین جدول بازده تعیین شود.

هر یک از سیاست مداران سه سیاست پیش رو دارند.

- ✓ سیاست۱: گذراندن یک روز در هر شهر
- ✓ سیاست ۲: گذراندن هر دو روز در شهر (الف)

✓ سیاست ۳: گذراندن هر دو روز در شهر (ب)

سه گونه جدول بازده برای این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود.

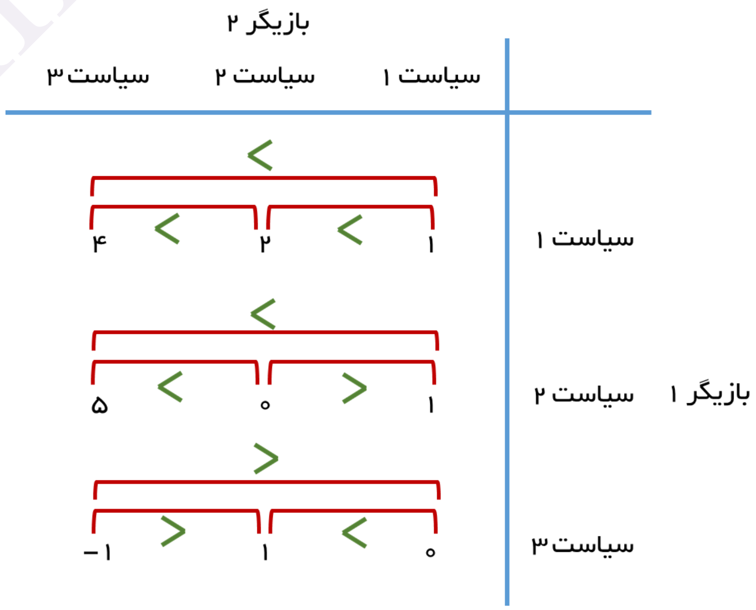
گونه اول:

فرض کنید جدول بازده دو سیاست مدار به صورت جدول زیر است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۱	۲	۴
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۰	۵
	سیاست ۳	۰	۱	-۱

در جدول فوق، بازیگر دوم هیچ سیاستی ندارد که مشخصا بدتر از سیاست دیگر باشد. در شکل زیر این وضعیت توضیح داده شده است.

توجه: برای بازیگر ۲، هر چه مقدار کمتر باشد، بهتر است.



اما برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۳ غالب است و صرف نظر از تصمیم بازیگر ۲ همواره سیاست ۱ بهتر از سیاست ۳ است. در شکل زیر این مفهوم نشان داده شده است.

توجه: در این حالت هر چه مقدار بیشتر باشد، بهتر است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲	۴
	سیاست ۲	۱	۰	۵
	سیاست ۳	۰	۱	−۱

در این حالت، سیاست ۳، **سیاست مغلوب** یا *Dominated Strategy* است و در هر مرحله سیاست مغلوب حذف می‌شود. به طور مشخص در هر مرحله سیاستی که از دیگر سیاست بدتر باشد می تـوان آن را کنار گذاشت. در این صورت جدول بازده به صورت زیر می‌شود.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲	۴
	سیاست ۲	۱	۰	۵

با توجه به این که هر دو بازیگر منطقی هستند، لذا بازیگر ۲ می داند که بازیگر ۱ فقط دو سیاست ۱ و ۲ را انتخاب می کند و سیاست ۳ را دیگر انتخاب نمی کند. در این جدول بازیگر دوم یک سیاســت مغلـوب دارد که سیاست ۳ است. در شکل زیر دلیل مغلوب بودن سیاست ۳ نشان داده شده است.

توجه: برای بازیگر ۲ هر چه مقدار بازده کمتر باشد، بهتر است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲	۴
	سیاست ۲	۱	۰	۵

با حذف سیاست مغلوب ۳، به جدول زیر می رسیم.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲
	سیاست ۲	۱	۰

در این جدول برای بازیگر اول، سیاست ۱ بر سیاست ۲ غالب است و سیاست ۲، سیاست مغلوب برای بازیگر ۱ است. که در این صورت جدول بازده به صورت زیر می‌شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۱	۲

همچنین برای بازیگر ۲، سیاست ۲ نسبت به سیاست ۱، سیاست مغلوب است و ناگزیر هر دو بازیگر سیاست ۱ را انتخاب می کنند.

بدین ترتیب، بازیگر اول همواره یک واحد از بازیگر دوم می برد و در این حالت ارزش بازی یا *Value of the Game* مساوی یک است. در صورتیکه ارزش بازی برابر با صفر باشد، بازی عادلانه یا *Fair Game* نامیده می‌شود.

گونه دوم:

در این حالت فرض کنید بازده جدول به صورت زیر باشد.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۳-	۲-	۶
	سیاست ۲	۲	۰	۲
	سیاست ۳	۵	۲-	۴-

در جدول فوق، سیاست مغلوبی وجود ندارد و دیگر امکان یافتن سیاست توسط حالت قبلی نیست. بازیگر اول با انتخاب سیاست ۱ می تواند از ۶ واحد برد تا ۳ واحد باخت داشته باشد. چون بازیگر ۲ منطقی است لذا سیاست ۱ را انتخاب می کند تا بازیگر ۱ ببازد. همچنین بازیگر ۱ با انتخاب سیاست ۳ می توان ۵ واحد برد داشته باشد ولی بازیگر ۲ این مجال را بازیگر ۱ نمی دهد و ۴ واحد باخت به او تحمیل می کند. همچنین با انتخاب سیاست ۲، بازیگر ۱ باختی را تجربه نخواهد کرد و به نظر سیاست خوبی باشد.

با تحلیل مشابه برای بازیگر ۲ می توان به این نتیجه رسید که با انتخاب سیاست های ۲،۱ و ۳ به ترتیب باختی برابر با ۵ ، ۰ و ۶ به بار می آید و به نظر می رسد که سیاست ۲ انتخاب عاقلانه ای است زیرا باخت کمتری دارد. لذا سیاست ۲ برای هر دو بازیگر، سیاست مناسب است.

به طور مشخص هر بازیگر باید طوری بازی کند که حداکثر باخت خود را حداقل کند. ضابطه حداقل کردن حداکثر یا *Minimax Criterion* معیار اساسی نظریه بازی در انتخاب سیاست است. این ضابطه به

معنی آن است که بازیگر اول باید سیاستی که **حداقل** بازده آن از همه **بزرگتر** و بازیگر دوم سیاستی که **حداکثر** بازده آن از همه **کوچکتر** باشد را انتخاب کند.

تعریف: اگر در یک بازی دو نفره مجموع صفر داشته باشیم:

$$v = \max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j(\max_i a_{ij})$$

آنگاه این بازی دارای **نقطه زین اسبی** (***Saddle Point***) دارد. در این صورت بهترین سیاست بازیگر ۱ انتخاب $\max_i(\min_j a_{ij})$ و بهترین سیاست بازیگر ۲ انتخاب سیاستی است که بازده برابر با $\min_j(\max_i a_{ij})$ باشد. به این سیاست، **سیاست خالص** یا ***Pure Strategy*** گفته می‌شود و مقدار v را **ارزش بازی** می نامند. در صورتیکه ارزش بازی برابر صفر باشد به این بازی، بازی عادلانه یا *Fair Game* می گویند.

در این بازی، وجود نقطه زین اسبی نقش تعیین کننده ای دارد و باعث می‌شود که هیچ بازیگری نتواند از سیاست حریف به نفع خود استفاده کنند. یعنی هر گاه بازیگر دوم حدس بزند یا مطلع شود که قرار است بازیگر ۱ سیاست ۲ را انتخاب کند، او با تغییر سیاستی غیر از ۲ تنها ضرر خود را افزایش می دهد و بنابراین هیچ یک انگیزه ای برای بررسی تغییر سیاست نخواهند داشت. به عبارت دیگر نقطه زینی در واقع برای بازی **نقطه تعادل** یا ***Equilibrium Point*** است. نقطه تعادل نقطه ای است که هیچ یک از بازیکنان از تغییر **یک جانبه** سیاست خود سودی نخواهد برد.

گونه سوم:

جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۰	-۲	۲
	سیاست ۲	۵	۴	-۳
	سیاست ۳	۲	۳	-۴

اگر هر دو بازیگر مثل حالت قبلی از ضابطه حداقل حداکثر پیروی کنند چه می‌شود.

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	حداقل	
بازیگر ۱	سیاست ۱	۰	-۲	۲	-۲	حداکثر
	سیاست ۲	۵	۴	-۳	-۳	
	سیاست ۳	۲	۳	-۴	-۴	
	حداکثر	۵	۴	۲		
				حداقل		

در صورتیکه مشابه گونه ۲ بازیگران از ضابطه حداقل حداکثر پیروی نمایـد، بـازیگر اول مـی دانـد کـه کمترین مقدار بازی مساوی ۲- است که حداکثر ستون حداقل یا *Min* است. بازیگر ۱ با انتخـاب سیاسـت ۱، بیش از ۲ واحد نخواهد باخت. به همین ترتیب، چون بیشترین مقدار بازی برابر ۲ است و بازیگر ۲ می تواند مطمئن باشد که با انتخاب سیاست ۳، بیشتر از ۲ واحد نبازد.

چون مقدار ارزش بازی بزرگتر از صفر است لذا این بازی نقطه زیـن اسـبی نـدارد. حـال ببینـیم وقتـی بازیگر ۱، سیاست ۱ و بازیگر ۲ سیاست ۳ را انتخاب کند چه اتفاقی می افتد. بازیگر ۱ با انتخاب سیاست ۱، ۲ واحد می برد و در این حالت بازیگر ۲، ۲ واحد می بازد. برای این که بازیگر ۲ از این باخت جلوگیری کند، سیاست ۲ را انتخاب می کند و به جای ۲ واحد باخت، ۲ واحد خواهد برد. بازیگر اول هـم منطقـی اسـت و

برای افزایش بازده خود، سیاست ۲ را انتخاب می کند و بازده خود را از ۲- بـه ۴ مـی رسـاند. بـا درک ایـن موضوع، بازیگر ۲ سیاست ۳ را انتخاب می کندکه ۴ واحد باخت را با ۳ واحد برد عوض مـی کنـد. باخـت ۳ واحدی بازیگر ۱ سبب می‌شود که این بازیگر باخت ۳ واحد را به برد ۲ واحد عضو کند و لذا این حرکت از نو ایجاد می‌شود. در واقع جواب به صورت سیاست ۱ برای بازیگر ۱ و سیاست ۳ برای بازیگر ۲ است که جوابی ناپایدار (*Unstable*) است.

یافتن جواب در مورد بازی هایی که نقطه زین اسبی ندارد به دلیل کاربردی بودن آن ضـرورت دارد. در ادامه روش یافتن جواب بهینه بازی هایی از این دست را بررسی می کنیم.

بازی های با سیاست مختلط یا Mixed strategy

اگر در یک بازی نقطه زین اسبی وجود نداشته باشد، نظریه بازی به هر بـازیگر توصـیه مـی نمایـد کـه سیاست های خود را براساس یک تابع توزیع احتمالی انتخاب نمایید. برای بیـان ایـن موضـوع فـرض کنیـد داشته باشیم.

x_i : احتمال آنکه بازیگر ۱ سیاست i را برگزینند($i=1,...,m$)

y_j : احتمال آنکه بازیگر 2 سیاست j را برگزینند($j=1,...,n$)

که در آنm و n تعداد سیاست های مربوط به بازیگران ۱ و ۲ است. بردار $(x_1,x_2,...,x_m)$ برنامـه بـازی بازیگر ۱ است و چون x_1 معرف احتمال است باید غیر منفی و جمعا مساوی یـک شـود $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. همـین طور برای بازیگر ۲ نیز y_j معرف احتمـال اسـت. در ادبیـات نظریـه بـازی $(x_1,x_2,...,x_m)$ و $(y_1,y_2,...,y_n)$ **سیاست** نامیده می شوند. هر بازیگر در بازی یکی از سیاست های خالص خود را انتخـاب مـی کنـد و ایـن انتخاب با استفاده از تابع توزیع احتمالی از طریق سیاست مختلط بدست می آید.

در واقع با تعریف سیاست مختلط، سیاست خالص در بازی های دارای نقطه زین اسبی، سیاست هـا بـه صورت $(0,0,...,1,0,...,0)$ است که در مولفه ۱ سیاست انتخابی بازیگر با توجه به نقطه زین اسبی است.

برای مشخص شدن موضوع، فرض کنید در گونه سوم مسئله انتخابات، بازیگران به ترتیب سیاست های مختلط $(x_1,x_2,x_3)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ و $(y_1,y_2,y_3)=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ را انتخاب کنند. این جواب بدین معنا است که بازیگر ۱ با احتمال ۰.۵ سیاست های ۱ و ۲ و بازیگر ۲ با احتمال ۰.۵ سیاست های ۲ و ۳ را انتخاب کنند. برای این منظور هر بازیگر یک سکه به هوا پرتاب می کند و براساس آن، یکی از دو سیاست قابل قبول خود را انتخاب می نماید.

مقدار *maximin* یا حد پایین ارزش بازی: سیاستی که صرف نظر از این که بازیگر دوم چه سیاستی را انتخاب کند مقدار امید ریاضی بازده یا برد بازیگر اول را حداکثر کند که به صورت $\underline{v}$ تعریف می‌شود. نمایش ریاضی این تعریف به صورت زیر می‌شود:

$$\underline{v}=\max_i(\min_j a_{ij})$$

مقدار *minimax* یا حد بالای ارزش بازی: سیاستی که صرف نظر از این که بازیگر اول چه سیاستی را انتخاب کند مقدار امید ریاضی بازده یا باخت بازیگر دوم را حداقل کند که به صورت $\overline{v}$ تعریف می‌شود. نمایش ریاضی این تعریف به صورت زیر می‌شود.

$$\overline{v}=\min_j(\max_i a_{ij})$$

اگر رابطه $\underline{v}<\overline{v}$ برقرار باشد، بازی نقطه پایدار ندارد و باید از سیاست مختلط استفاده کرد. حال اگر بازیگران از سیاست مختلط استفاده می کنند، v یا ارزش بازی به صورت زیر می‌شود.

$$v=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j$$

در این مثال:

$$v=\frac{1}{4}\times(-2+2+4-3)=\frac{1}{4}$$

قضیه اساسی بازی های دو نفره مجموع صفر

چنانچه دو بازیگر یک بازی دونفره مجموع صفر از سیاست های مختلط استفاده کنند، همواره مقدار ارزش بازی برابر با $v=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i y_j$ است. بنابراین اگر هر دو بازیگر از سیاست مختلط استفاده کنند آنگاه امید ریاضی بازده آن ها مساوی v خواهد بود و هیچکدام از بازیگران نمی توانند با تغییر یک جانبه سیاست خود به وضعیت بهتری برسند.

اکنون این سئوال مطرح می‌شود که چگونه سیاست بهینه هر بازیگر را مشخص کرد. برای این کار چند روش وجود دارد. در ادامه دو روش رایج بیان می‌شود.

روش حل ترسیمی

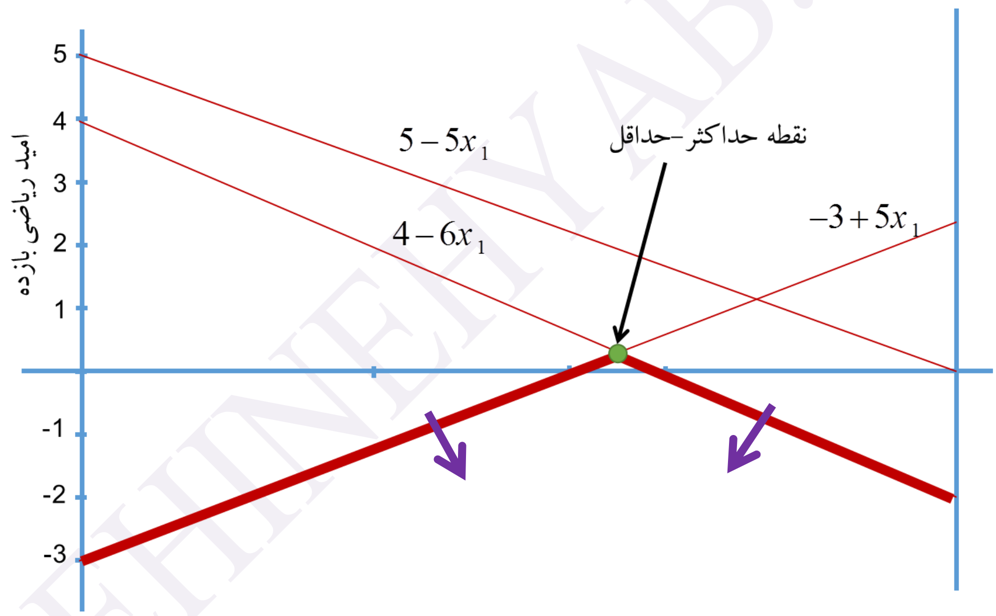
یک بازی با سیاست های مختلط را در نظر بگیرید که پس از حذف سیاست مغلوب تنها دو سیاست ساده باقی مانده باشد. به طور مشخص بازیگر ۱ را در نظر بگیرید که احتمال سیاست هایی که توسط وی انتخاب می‌شود به صورت (x_1,x_2) است به طوریکه $x_1=1-x_2$. در این حالت کافی است مقدار x_1 محاسبه شود. جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	x_1 سیاست ۱	۰	−۲	۲
	$1-x_1$ سیاست ۲	۵	۴	−۳

دریافتی بازیگر ۱ در صورت انتخاب سیاست ها توسط بازیگر ۲ به صورت زیر می‌شود.

بازیگر ۲	دریافتی بازیگر ۱
سیاست ۱	$0\times x_1+5(1-x_1)=5-5x_1$
سیاست ۲	$-2x_1+4(1-x_1)=4-6x_1$
سیاست ۳	$2x_1-3(1-x_1)=-3+5x_1$

بازیگر ۱ به دنبال آن است که حداقل دریافتی مورد انتظار خود را حداکثر کند که نمایش گرافیکی آن به صورت زیر می‌شود.



شکل (۱)

مقدار بهینه امید ریاضی در محل تقاطع دو خط $-3+5x_1$ و $4-6x_1$ قرار دارد که از حل جبری $4-6x_1=-3+5x_1$ بدست می آید که $x_1=\frac{7}{11}$ بدست می آید یعنی سیاست بهینه بازیگر ۱ به صورت $(x_1,x_2)=(\frac{7}{11},\frac{4}{11})$ خواهد بود که ارزش بازی به ترتیب زیر بدست می آید.

$$v = -3 + 5(\frac{7}{11}) = \frac{2}{11}$$

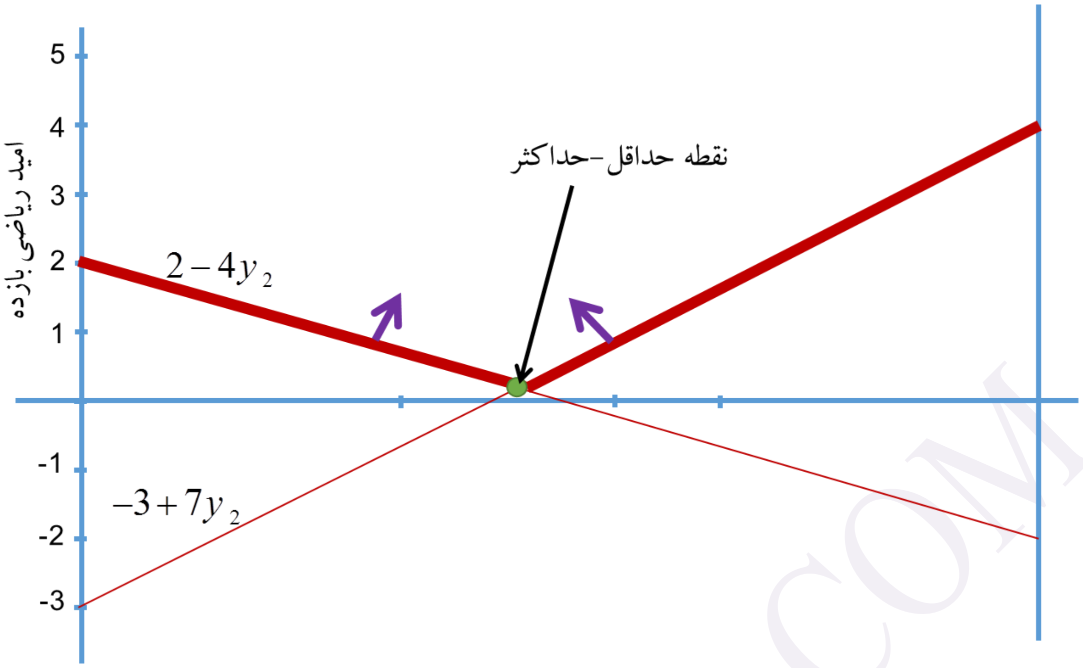
بنابراین نقطه بهینه برای بازیگر ۱ از برخورد سیاست های ۲ و ۳ برای بازیگر ۲ بدست می آید و لذا در سیاست بهینه بازیگر ۲، تنها سیاست های ۲ و ۳ نقش دارند و احتمال انتخاب سیاست ۱ در سیاست ترکیبی برابر با صفر است.

		بازیگر ۲		
			y_2	$1-y_2$
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۰	۲-	۲
	سیاست ۲	۵	۴	۳-

دریافتی بازیگر ۲ در صورت انتخاب سیاست ها توسط بازیگر ۱ به صورت زیر می‌شود.

بازیگر ۱	دریافتی بازیگر ۲
سیاست ۱	$-2y_2 + 2(1-y_2) = 2-4y_2$
سیاست ۲	$4y_2 - 3(1-y_2) = -3+7y_2$

بازیگر ۲ به دنبال آن است که حداکثر دریافتی مورد انتظار خود را حداقل کند که نمایش گرافیکی آن به صورت زیر می‌شود.



شکل (۲)

مقدار بهینه امید ریاضی در محل تقاطع دو خط $-3+7y_2$ و $2-4y_2$ قرار دارد که از حل جبری $2-4y_2=-3+7y_2$ بدست می آید که $y_2=\frac{5}{11}$ بدست می آید یعنی سیاست بهینه بازیگر ۲ به صورت $(y_1,y_2,y_3)=(0,\frac{5}{11},\frac{6}{11})$ خواهد بود که ارزش بازی به ترتیب زیر بدست می آید.

$$v=-3+7(\frac{5}{11})=\frac{2}{11}$$

نکته: هر سیاست مختلط برای بازیگر ۱ تضمین می دهد که ارزش منافع مورد انتظار حداکثر برابر با بزرگی ارزش بازی است.

نکته: هر سیاست مختلط برای بازیگر ۲ تضمین می دهد که ارزش مورد انتظار پرداختی وی حداقل برابر با بزرگی ارزش بازی است.

حل از طریق برنامه ریزی خطی

هر بازی با سیاست های مختلط (بدون محدودیت بر روی تعداد سیاست های ساده مانند روش ترسیمی) می توان به راحتی از طریق آن به یک مدل برنامه ریزی خطی حل کرد. برای ارایه این روش از یک مثال کمک می گیریم.

مثال: برای مسئله بازی سنگ – کاغذ – قیچی جدول بازده زیر را در نظر بگیرید.

			بازیگر ۲			
			y_1 سنگ	y_2 کاغذ	y_3 قیچی	حداقل
بازیگر ۱	x_1	سنگ	۰	۱-	۱	۱-
	x_2	کاغذ	۱	۰	۱-	۱-
	x_3	قیچی	۱-	۱	۰	۱-
		حداکثر	۱	۱	۱	

مقدار بازده مورد انتظار برای بازیگر ۱ براساس انتخاب بازیگر ۲ به صورت زیر است.

انتخاب بازیگر ۲	بازده مورد انتظار بازیگر 1
سنگ	$x_2 - x_3$
کاغذ	$-x_1 + x_3$
قیچی	$x_1 - x_2$

بازیگر ۲ به دنبال انتخاب سیاستی است که بازده یا جایزه مورد انتظار بازیگر ۱ را حداقل کند:

$$Min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2\}$$

و به طور متقابل بازیگر ۱ می کوشد که با توجه به این است که بازده یا جایزه خود را حداکثر نماید پس داریم:

$$Max\ \underbrace{Min\{x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2\}}_{V}$$

رابطه بالا را می توان به صورت یک برنامه ریزی خطی به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&Max\ V\\
&s.t.\\
&\quad V \le x_2 - x_3\\
&\quad V \le -x_1 + x_3\\
&\quad V \le x_1 - x_2\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0; V\ \ unbounded
\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر می‌شود.

$$x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{1}{3}, x_3^* = \frac{1}{3}$$

و ارزش بازی با v^* نشان داده می‌شود و در مدل فوق برابر با صفر می‌شود.

مقدار بازده مورد انتظار برای بازیگر ۲ براساس انتخاب بازیگر ۱ به صورت زیر است.

انتخاب بازیگر ۱	بازده مورد انتظار بازیگر ۲
سنگ	$-y_2+y_3$
کاغذ	y_1-y_3
قیچی	$-y_1+y_2$

بازیگر شماره ۱ به دنبال انتخاب سیاستی است که پرداخت مورد انتظار بازیگر شماره ۲ را حداکثر کند.

$$Max\ \{-y_2+y_3, y_1-y_3, -y_1+y_2\}$$

به طور متقابل نیز بازیگر شماره ۲ می کوشد که با توجه به این امر میزان این پرداختی مـورد انتظـار را حداقل نماید.

$$Min\ \underbrace{Max\ \{-y_2+y_3, y_1-y_3, -y_1+y_2\}}_{W}$$

رابطه بالا را می توان با استفاده از برنامه ریزی خطی به صورت یک مدل بهینه سازی بیان کرد.

$$\begin{aligned}
&Min\ W\\
&s.t.\\
&\quad W \ge -y_2+y_3\\
&\quad W \ge y_1-y_3\\
&\quad W \ge -y_1+y_2\\
&\quad y_1+y_2+y_3=1\\
&\quad y_1,y_2,y_3\ge 0; W\ \ unbounded
\end{aligned}$$

در صورت حل مدل فوق، جواب بهینه متغیرها به صورت زیر می‌شود.

$$y_1^*=\frac{1}{3}, y_2^*=\frac{1}{3}, y_3^*=\frac{1}{3}$$

W^* را ارزش بازی فوق می نامیم که برابر با صفر است.

نکته: مدل خطی بازیگر شماره ۱، **همزاد یا دوگان** مدل خطی بازیگر شماره ۲ است و داریم $V^{*}=W^{*}$.

نکته: در یک بازی دونفره مجموع صفر اگر مقدار ثابت C را به هر عنصر ماتریس بازده اضافه کنیم در این صورت استراتژی بهینه تغییر نمی کند و ارزش بازی برابر با C می‌شود.

مثال: ماتریس بازده زیر را در نظر بگیرید. با استفاده برنامه ریزی خطی ارزش بازی و سیاست های بهینه را بدست آورید.

بازیگر ۲

		y_1 ۱	y_2 ۲	y_3 ۳	حداقل
بازیگر ۱ x_1	۱	۳۰	۴۰	۳۶	۳۰
بازیگر ۱ x_2	۲	۶۰	۱۰	۳۶	۱۰
	حداکثر	۶۰	۴۰	۳۶	

به دلیل این که جدول بازده فوق دارای نقطه زین اسبی نیست، دارای سیاست بهینه مختلط است. برای محاسبه این سیاست از برنامه ریزی خطی استفاده می کنیم.

مدل برنامه ریزی خطی برای بازیگر ۱ به صورت زیر می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&Max\ V\\
&s.t.\\
&\quad V \le 30x_1+60x_2\\
&\quad V \le 40x_1+10x_2\\
&\quad V \le 36x_1+36x_2\\
&\quad x_1+x_2=1\\
&\quad x_1,x_2\ge 0;V\ \ unbounded
\end{aligned}
$$

مدل برنامه ریزی خطی برای بازیگر ۲ به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned}&Min\ \ W\\&s.t.\\&\quad W\ \geq 30y_1+40y_2+36y_3\\&\quad W\ \geq 60y_1+10y_2+36y_3\\&\quad y_1+y_2+y_3=1\\&\quad y_1,y_2,y_3\geq 0;W\ \ unbounded\end{aligned}$$

از حل مدل های برنامه ریزی خطی فوق، سیاست بهینه و ارزش بازی به صورت زیر می‌شود.

$$x_1=\frac{5}{6},x_2=\frac{1}{6},y_1=\frac{1}{2},y_2=\frac{1}{2},y_3=0,V^*=W^*=35$$

مثال: سیاست بهینه هر یک از بازیگران جدول بازده زیر را با استفاده از حـذف متـوالی سیاسـت هـای مغلوب تعیین کنید.

		بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲	بازیگر ۲ سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۳-	۱	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲	۱
بازیگر ۱	سیاست ۳	۱	۰	۲-

حل:

سیاست ۳ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۲ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	−۳	۱	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲	۱
حذف می شود	سیاست ۳	۱	۰	−۲

سیاست ۳ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۱ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲		حذف می شود
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	−۳	۱	۲
	سیاست ۲	۱	۲	۱

سیاست ۱ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۲ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲
حذف می شود	سیاست ۱	−۳	۱
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲

سیاست ۲ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۱ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۱	سیاست ۲ (حذف می شود)
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۲

بنابراین سیاست بهینه برابر با انتخاب سیاست ۲ برای بازیگر ۱ و سیاست ۱ برای بازیگر ۲ است که منجر به بازده ۱ برای بازیگر ۱ می‌شود.

مثال: سیاست بهینه هر یک از بازیگران جدول بازده زیر را با استفاده از حذف متوالی سیاست های مغلوب تعیین کنید.

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴
بازیگر ۱	سیاست ۱	۵	−۷	−۲	۲
	سیاست ۲	−۲	۲	−۵	۵
	سیاست ۳	−۲	۵	−۲	۷

حل:

سیاست های ۱ و ۴ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۳ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱ (حذف می شود)	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴ (حذف می شود)
	سیاست ۱	۵	۷-	۲-	۲
بازیگر ۱	سیاست ۲	۲-	۲	۵-	۵
	سیاست ۳	۲-	۵	۲-	۷

سیاست های ۱ و ۲ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۳ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۲	سیاست ۳
	حذف می شود سیاست ۱	۷-	۲-
بازیگر ۱	حذف می شود سیاست ۲	۲	۵-
	سیاست ۳	۵	۲-

سیاست ۲ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۳ حذف می‌شود.

		بازیگر ۲	
		سیاست ۲ (حذف می شود)	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۳	۵	۲-

بنابراین سیاست ۳ برای هر دو بازیگر سیاست بهینه است و بازده نهایی برای بازیگر ۲، برابر با ۲ و برای بازیگر ۱ برابر ۲- است.

مثال: با استفاده از معیار حداقل حداکثر، بهترین سیاست برای هر بازیگر را بدست آورید؟ آیا این بـازی نقطه زیر اسبی دارد؟ آیا این بازی پایدار است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۳	۱-	۳
بازیگر ۱	سیاست ۲	۳-	۱	۷
	سیاست ۳	۷	۳	۵

حل:

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	حداقل
	سیاست ۱	۳	۱-	۳	۱-
بازیگر ۱	سیاست ۲	۳-	۱	۷	۳-
	سیاست ۳	۷	۳	۵	۳ ← حداکثر
	حداکثر	۷	۳	۷	
			↑ حداقل		

سیاست بهینه، سیاست ۳ برای بازیگر ۱ و سیاست ۲ برای بـازیگر ۲ و بـازده نهـایی ۳ بـرای بـازیگر ۱ می‌شود. این بازی پایدار است و دارای نقطه زین اسبی دارد که این به دلیل برابری حداقل حداکثر با حداکثر حداقل است.

مثال: با استفاده از معیار حداقل حداکثر، بهترین سیاست برای هر بازیگر را بدست آورید؟ آیا این بازی نقطه زیر اسبی دارد؟ آیا این بازی پایدار است.

		بازیگر ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴
	سیاست ۱	۳	−۳	−۲	−۴
بازیگر ۱	سیاست ۲	−۴	−۲	−۱	۱
	سیاست ۳	۱	−۱	۲	۰

حل:

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴	حداقل
	سیاست ۱	۳	−۳	−۲	−۴	−۴
بازیگر ۱	سیاست ۲	−۴	−۲	−۱	۱	−۴
	سیاست ۳	۱	−۱	۲	۰	−۱ ← حداکثر
	حداکثر	۱	−۱	۲	۱	

حداقل

بهترین سیاست، سیاست ۳ برای بازیگر ۱ و سیاست ۲ برای بازیگر ۲ است که منجر بـه بـازده ۱ بـرای بازیگر ۲ می‌شود. این بازی پایدار است و دارای نقطه زین اسبی (3,2) است.

مثال: بازار محصولی در اختیار دو شرکت است. این دو شرکت برنامه بازاریابی سـال آینـده خـود را در دست تهینه دارند و سعی می کنند تا سهمی از بازار طرف مقابل را از آن خود کنند(مجموع فروش محصول

تقریبا ثابت است، لذا افزایش فروش هر شرکت تنها از طریق کاهش فروش شرکت دیگر امکان پـذیر اسـت). هر شرکت برای نیل به این مقصود سه راه پیش رو دارد.

- ✓ بهبود بسته بندی محصول
- ✓ افزایش تبلیغات
- ✓ کاهش قیمت محصول

هزینه اجرای هر سه راه حل تقریبا با یکدیگر برابر و به اندازه کافی زیاد اسـت، بـه طـوری کـه بودجـه بازاریابی هر شرکت تنها کفاف پیاده کردن یکی از سه راه حل را می دهد. اثرات انتخاب هر یـک از راه حـل ها توسط هر شرکت بر حسب درصد افزایش فروش شرکت *1*(بازیگر ۱) در جدول زیر نشان داده شده است.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
	سیاست ۱	۲	۳	۱
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۴	۰
	سیاست ۳	۳	۲−	۱−

هر شرکت سیاست خود را قبل از اطلاع از سیاست شرکت مقابل اتخاذ می نماید.

الف) بدون حذف سیاست های مغلوب و با استفاده از ضابطه حداقل حداکثر سیاست بهینه هر شرکت را مشخص کنید.

ب) حال سیاست های مغلوب را تا آنجا که ممکن است مشخص و حذف کنید. فهرست سیاسـت هـای مغلوب را به ترتیب حذف آن ها بنویسید. سرانجام، جدول بازده که دیگر در آن سیاست مغلوبی وجود ندارد را نشان دهید.

حل:

الف) سیاست های بهینه برای بازیگران این بازی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

		بازیگر ۲				
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	حداقل	
	سیاست ۱	۲	۳	۱	۱	حداکثر
بازیگر ۱	سیاست ۲	۱	۴	۰	۰	
	سیاست ۳	۳	−۲	−۱	−۲	
	حداکثر	۳	۴	۱		
				حداقل		

بهترین سیاست، سیاست ۱ برای بازیگر ۱ و سیاست ۳ به بازیگر ۲ و بازده نهایی برای بازیگر ۱ برابر با ۱ است.

ب)

سیاست ۱ برای بازیگر۲ توسط سیاست ۳ حذف می‌شود.

سیاست ۳ برای بازیگر ۱ توسط سیاست های ۱ و ۲ حذف می‌شود.

سیاست ۲ برای بازیگر ۲ توسط سیاست ۳ حذف می‌شود.

سیاست ۲ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۱ حذف می‌شود.

جواب بهینه، سیاست ۱ برای بازیگر ۱ و سیاست ۳ برای بازیگر ۲ است و بازده نهایی برای بازیگر ۱ برابر ۱ است.

مثال: دو تولید کننده که رقیب یکدیگر هستند هر کدام دو محصول تولید می کنند. سود هر دو محصول برابر است. میزان فروش تولید کننده دوم در مورد هر دو محصول، سه برابر تولید کننده اولی است.

در حال حاضر، هر دو تولید کننده می خواهند همگام با پیشرفت های فنی، اصلاحات اساسی در محصولات خود انجام دهند. لیکن برای آن ها روشن نیست که در مورد اصلاح و بازاریابی چه سیاستی را باید انتخاب کنند.

اصلاح همزمان هر دو محصول برای هر کدام از تولید کنندگان به ۱۲ ماه وقت نیاز دارد. راه دیگر این است که با یک برنامه ضربتی ابتدا یک محصول را اصلاح کرد تا به این ترتیب سعی شود که قبل از رقیب، محصول اصلاح شده را به بازار فرستاد. در این صورت، اصلاح یک محصول برای تولید کننده دوم ۹ ماه و برای تولید کننده اول ۱۰ ماه طول می کشد(زیرتولید کننده اول در حال حاضر تعهدات دیگری نیز دارد). اصلاح دومین محصول برای هر دو تولید کننده ۹ ماه طول می کشد.

چنانچه هر دو تولید کننده محصولات اصلاح شده خود را همزمان به بازار عرضه کنند، پیش بینی می‌شود که سهم تولید کننده اول در بازار ۸ درصد افزایش یابد(یعنی از ۲۵ درصد فعلی به ۳۳ درصد می رسد). به همین ترتیب، اگر تولید کننده اول بتواند محصول اصلاح شده خود را ۲، ۶ یا ۸ ماه زودتر از رقیب به بازار عرضه کند سهم او در کل بازار به ترتیب ۲۰،۳۰، و ۴۰ درصد افزایش می یابد. از طرف دیگر اگر این تولید کننده ۱، ۳، ۷ یا ۱۰ ماه دیرتر از رقیب محصولی را وارد بازار کنند سهم او در کل بازار به ترتیب ۴، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ درصد کاهش می یابد.

این مسئله را به صورت یک بازی دونفری جمع صفر فورموله کنید. در چارچوب ضابطه حداقل حداکثر، هر تولید کننده باید چه سیاستی را انتخاب کند؟

حل:

محصولات با برچسب A و B معرفی می شوند. سیاست های مورد استفاده توسط این تولید کننده به صورت زیر است.

سیاست ۱ – اصلاح همزمان هر دو محصول

سیاست ۲ – اصلاح ضربتی محصول A

سیاست ۳ - اصلاح ضربتی محصول B

p_{ij} را برابر با $\frac{1}{2}\times$ {(درصد افزایش فروش کارخانه ۱ در محصول A)+(درصد افزایش فروش کارخانه ۱ از محصول B)} وقتی کارخانه ۱ سیاست i و کارخانه ۲ سیاست j را اخذ نماید. در این صورت ماتریس بازده برابر می‌شود با:

		بازیگر ۲ سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۸	۱۰	۱۰
	سیاست ۲	۴	-۴	۱۳
	سیاست ۳	۴	۱۳	-۴

سیاست بهینه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

		بازیگر ۲ سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	
بازیگر ۱	سیاست ۱	۸	۱۰	۱۰	۸ حداکثر
	سیاست ۲	۴	-۴	۱۳	-۴
	سیاست ۳	۴	۱۳	-۴	-۴
	حداکثر	۸	۱۳	۱۳	
		حداقل			

در جدول فوق، سیاست بهینه برابر با اتخاذ سیاست ۱ (اصلاح همزمان برای هر دو محصول) برای هر دو کارخانه است. در این صورت کارخانه ۱ می تواند سهم خود را ۸ درصد افزایش دهد.

مثال: بازی دونفری زیر را در نظر بگیرید. در آغاز داور یک سکه را پرتاب و نتیجه آن را یادداشت می کند ضمنا به بازیگر اول نیز نشان می دهد. بازیگر اول دو راه در پیش دارد:

۱- صرف نظر کند و ۵ دلار به دومی بپردازد و بازی تمام می‌شود.

۲- شرط ببندد و بازی ادامه پیدا کند.

بازیگر دوم نیز دو راه در پیش خواهد داشت.

۱- صرفنظر کند و ۵ دلار به اولی بپردازد.

۲- درخواست اعلام نتیجه کند که در این صورت داور نتیجه پرتاب را اعلام می کند. چنانچه شیر باشد بازیگر دومی ۱۰ دلار به بازیگر اول و اگر خط باشد بازیگر اول همین مقدار به بازیگر دوم می پردازد.

الف) سیاست های ساده هر بازیگر را مشخص کنید.

ب) جدول بازده این بازی را تهیه کنید. با استفاده از سیاست مغلوب جدول را خلاصه کنید.

ج) با استفاده از ضابطه حداقل حداکثر، آیا این جدول بازده نقطه زین اسبی دارد؟

حل:

الف) سیاست های ساده بازیگر ۱

۱- صرفنظر کردن از شیر یا خط

۲- شرط بندی روی شیر یا خط

۳- صرفه نظر کردن از شیر و شرط بندی روی خط

۴- صرف نظر کردن روی خط و شرط بندی روی شیر

سیاست ساده بازیگر ۲:

۱- اگر بازیگر ۱ شرط بندی کرد، آنگاه درخواست اعلام نتیجه.

۲- اگر بازیگر ۱ شرط بندی کرد، آنگاه صرف نظر کردن از شرط بندی.

ب)

بازیکر ۱		بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲
	سیاست ۱	−۵	−۵
	سیاست ۲	۰	۵
	سیاست ۳	−۷٫۵	۰
	سیاست ۴	−۲٫۵	۰

سیاست ۱ و ۲ برای بازیگر ۱ توسط سیاست ۲ حذف می‌شود. لذا ماتریس بازده ساده شده به صورت زیر می‌شود.

بازیکر ۱		بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲
	سیاست ۲	۰	۵
	سیاست ۴	۲٫۵	۰

ج) به دلیل اینکه حداکثر حداقل (صفر) با حداقل حداکثر (۲.۵) برابر نیست لذا این بازی نقطه زین اسبی ندارد.

		بازیکن ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	
بازیکن ۱	سیاست ۱	۵-	۵-	۵-
	سیاست ۲	۰	۵	۰ حداکثر
	سیاست ۳	۷.۵-	۰	۷.۵-
	سیاست ۴	۲.۵	۰	۰
		۲.۵ حداقل	۵	

مثال: جدول بازده برای یک مسئله بازی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

		بازیکن ۲			
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳	سیاست ۴
	سیاست ۱	۵	۰	۳	۱
بازیکن ۱	سیاست ۲	۲	۴	۳	۲
	سیاست ۳	۳	۲	۰	۴

الف) مسئله پیدا کردن سیاست های مختلط حداقل-حداکثر را به مسئله معادل برنامه ریزی خطی تبدیل کنید.

ب) جواب بهینه مدل خطی بدست آمده را با استفاده از روش سیمپلکس بدست آورید.

حل:

الف)

$$
\begin{aligned}
&Max \quad x_4\\
&5x_1+2x_2+3x_3-x_4\geq 0\\
&\quad\quad 4x_2+2x_3-x_4\geq 0\\
&3x_1+3x_2 \quad\quad -x_4\geq 0\\
&x_1+2x_2+4x_3-x_4\geq 0\\
&x_1+\ x_2+x_3 \quad\quad =1\\
&x_1,x_2,x_3\geq 0
\end{aligned}
$$

ب) جواب بهینه مدل قسمت (الف) به صورت زیر می‌شود.

مقدار بهینه	متغیر
0.053	x_1
0.737	x_2
0.211	x_3
2.368	x_4

در این حالت ارزش بازی برابر با ۲.۳۶۸ می‌شود.

مثال: جدول بازده بازی ریاضی زیر را در نظر بگیرید.

		بازیگر ۲: سیاست ۱	بازیگر ۲: سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	۵	−۴
	سیاست ۲	−۲	۳

الف) ارزش بازی و سیاست مختلط هر بازیگر را در قالب ضابطه حداقل حداکثر و با استفاده از روش ترسیمی تعیین نمایید.

ب) در صورتیکه جدول بازده بازیگر ۲ را به عنوان پایه در نظر بگیریم، جواب بهینه مسئله بازی فوق الذکر را با استفاده از روش ترسیمی بیابید.

حل:

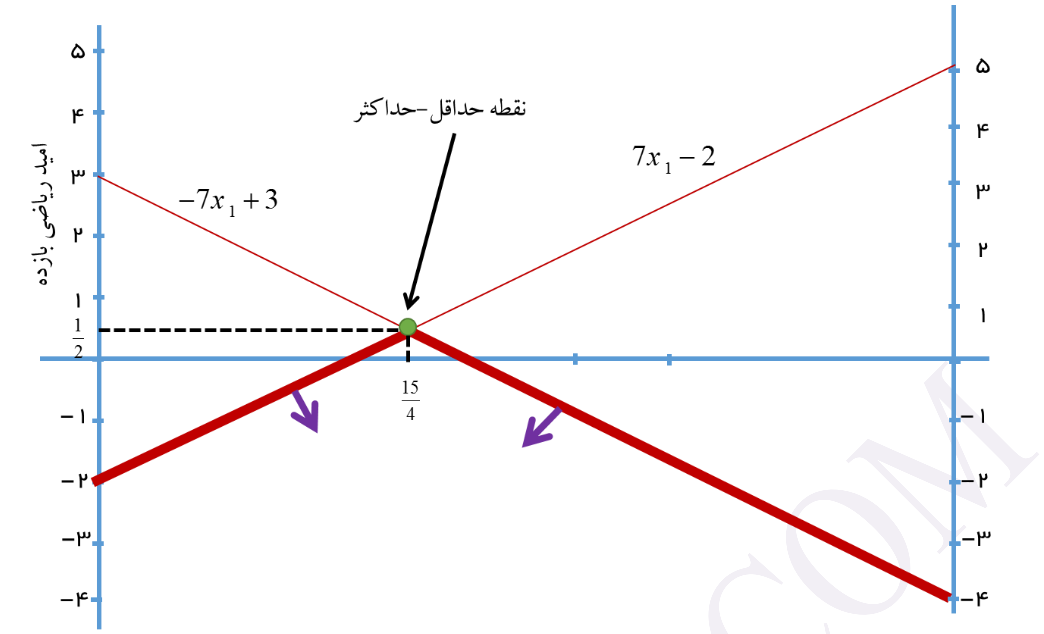
الف)

		بازیگر ۲ سیاست ۱	بازیگر ۲ سیاست ۲
بازیگر ۱	x_1 سیاست ۱	۵	۴-
	$1-x_1$ سیاست ۲	۲-	۳

لذا داریم.

		دریافتی بازیگر ۱
بازیگر ۲	سیاست ۱	$5x_1-2(1-x_1)=7x_1-2$
	سیاست ۲	$-4x_1+3(1-x_1)=3-7x_1$

و نمایش ترسیمی مسئله ریاضی فوق به صورت زیر می‌شود.



$$7x_1-2=-7x_1+3 \rightarrow (x_1^*,x_2^*)=(\frac{5}{14},\frac{9}{14}) \rightarrow v=7(\frac{5}{14})-2=0.5$$

امید ریاضی بازده برای سیاست مختلط (y_1,y_2) به صورت زیر است.

$$\left.\begin{array}{l}5y_1-4y_2=0.5\\-2y_1+3y_2=0.5\end{array}\right\} \rightarrow (y_1,y_2)=(0.5,0.5)$$

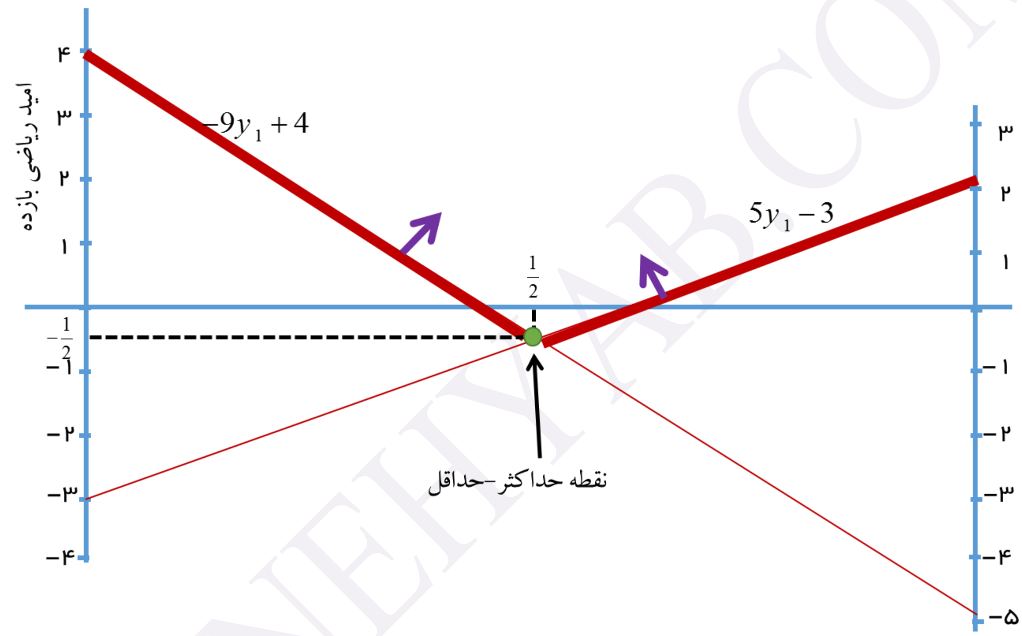
ب) از منظر بازیگر ۲، ماتریس بازده به صورت زیر می‌شود.

		بازیگر ۲	
		y_1 سیاست ۱	$1-y_1$ سیاست ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	−۵	۴
	سیاست ۲	۲	−۳

لذا داریم:

		دریافتی بازیگر ۲
بازیگر ۱	سیاست ۱	$-5y_1+4(1-y_1)=-9y_1+4$
	سیاست ۲	$2y_1-3(1-y_1)=-3+5y_1$

و نمایش ترسیمی مسئله بازی فوق به صورت زیر می‌شود.



$$-9y_1+4=5y_1-3 \rightarrow (y_1^*,y_2^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \rightarrow v=5(\frac{1}{2})-3=-0.5$$

مثال: برای جدول بازده زیر، ارزش بازی و سیاست مختلط بازیگر را به وسیله ضابطه حداقل–حداکثر و با استفاده از روش ترسیمی بیابید.

		بازیگر ۲		
		سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	سیاست ۱	۴	۳	۱
	سیاست ۲	۰	۱	۲

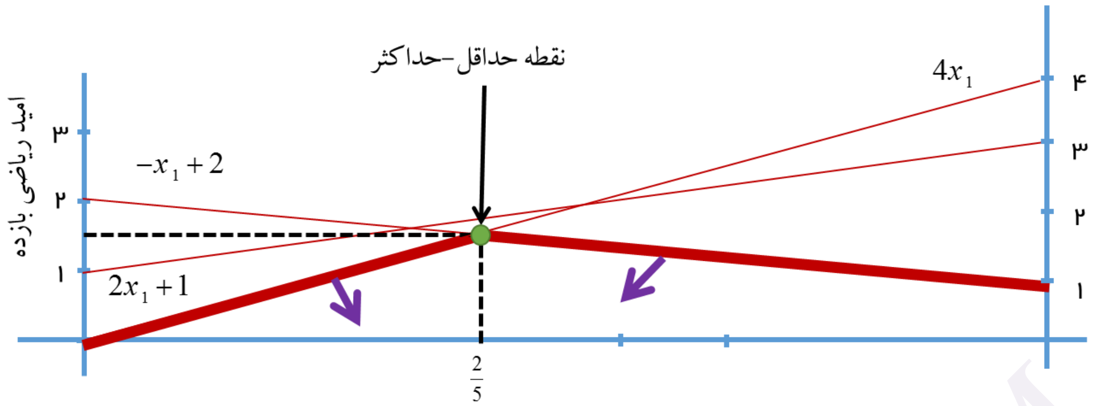
حل:

			بازیگر ۲		
			سیاست ۱	سیاست ۲	سیاست ۳
بازیگر ۱	x_1	سیاست ۱	۴	۳	۱
	$1-x_1$	سیاست ۲	۰	۱	۲

لذا داریم:

		دریافتی بازیگر ۱
بازیگر ۲	سیاست ۱	$4x_1 = 4x_1$
	سیاست ۲	$3x_1 + (1-x_1) = 2x_1 + 1$
	سیاست ۳	$x_1 + 2(1-x_1) = -x_1 + 2$

و نمایش ترسیمی مسئله بازی فوق به صورت زیر می‌شود.



$$4x_1=-x_1+2\rightarrow(x_1,x_2)=(\frac{2}{5},\frac{3}{5})\rightarrow v=\frac{8}{5}$$

برای محاسبه سیاست مختلط بازیگر ۲ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\left.\begin{aligned}4y_1+3y_2+y_3&=\frac{8}{5}\\ +y_2+2y_3&=\frac{8}{5}\\ y_1+y_2+y_3&=1\end{aligned}\right\}\rightarrow(y_1^*,y_2^*,y_3^*)=(\frac{1}{5},0,\frac{4}{5})$$

بازی های پویا با اطلاعات کامل

در بخش قبلی بازی های **ایستا** را بررسی کردیم که ویژگی اصلی آن ها این است که تصمیمات بازیکنان به طور **همزمان** اتخاذ می‌شود. اما در بازی های **پویا**[7] تصمیمات بازیکنان به صورت **متوالی** گرفته می‌شود. به عبارت دیگر ابتدا یک بازیکن حرکت می کند سپس بازیکن دیگر با مشاهده حرکت بازیکن اول، حرکت خود را انجام می دهد. این ویژگی باعث شده تا روش تحلیل این بازی ها با بازی های ایستا متفاوت باشد. تفاوت اصلی بازی های پویا و ایستا در این است که در بازی های ایستا، هر بازیکن، رفتار رقیب خود را حدس می زند و به آن واکنش نشان می دهد، ولی در بازی های پویا، حداقل یکی از بازیکنان، رفتار رقیب را مشاهده می کند و سپس به آن واکنش نشان می دهد. در ابتدا درس ابتدا **فرم گسترشی**[8] **یا درخت**

[7] Dynamic games
[8] Extensive form

بازی[9] را بررسی می کنیم که در تحلیل بازی های پویا نقش مهمی دارد. سپس به بحث تعادل بازی پویـا و در پایان نیز به برخی کاربردهای اقتصادی آن می پردازیم. در اینجا نیز فرض می‌شـود کـه اطلاعـات کامـل داریم و هر بازیکن دقیقا رقبای خود و استراتژی های آن ها را می شناسد و برد و باخت های پایان بـازی را نیز می داند. به عبارت دیگر بازیکنان با عدم اطمینان در مورد تعداد بازیکنان و ماهیت آن ها، استراتژی های آن ها و پیامدهای هر استراتژی، مواجه نیستند.

فرم گسترشی یا درخت بازی

ماهیت بازی ها که در آن تصمیمات بازیکنان به صورت متوالی اتخاذ می‌شود باعث شده تـا اسـتفاده از فرم گسترشی راه مناسبی برای نمایش این بازی ها باشد. بدین منظور بازیکنان از ۱ تا n شماره گذاری مـی شوند. در فرم گسترشی یک بازی، موارد زیر نشان می داده می‌شود:

۱- مجموعه بازیکنان

۲- ترتیب حرکات بازیکنان

۳- اعمال ممکنی که یک بازیکن می تواند در هر حرکت انجام دهد.

۴- اطلاعات هر بازیکن در هر حرکت

۵- برد بازیکنان در پایان بازی که ناشی از هر ترکیبی از حرکات بازیکنان است.

به هر حال یکی از راه های ساده برای نمایش بازی پویا، **فرم گسترشی** اسـت کـه معمـولا بـه صـورت درخت بازی نشان داده می‌شود. به عنوان مثال بازی زیر را در نظر بگیرید که دو بنگاه راجع به ورود (E) یا عدم ورود (S) به بازار تصمیم گیری می کنند.

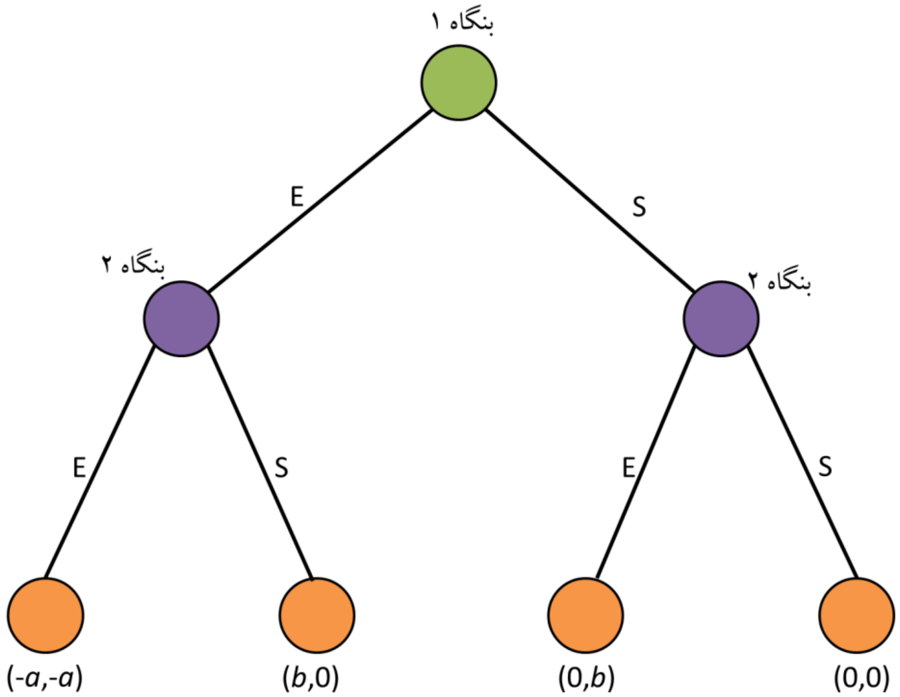
[9] Game Tree

		بنگاه ۲	
		E	S
بنگاه ۱	E	*a,-a*	*b,0*
	S	*0,b*	*0,0*

حال فرض کنید که حرکت بازیکنان به صورت متوالی انجام شود. بدین منظـور فـرض کنیـد کـه ابتـدا بنگاه ۱ و سپس بنگاه ۲ تصمیم گیری می کند. در اینجا با حرکات متوالی مواجه هستیم که می تـوان آن را با درخت بازی نشان داد.

هر یک از دایره های تو خالی را یک گره **تصمیم**[۱۰] و دایره های نارنجی را گره **پایانی**[۱۱] بازی می گوییم. هر بازی دارای یک گروه شروع است که با حرکت یکی از بازیکنان شروع می‌شود. در هـر گـره پایـانی، بردهای بازیکنان مشخص شده است که در داخل هر پرانتـز، رقـم اول بـرد بـازیکن ۱ و رقـم دوم بـرد بازیکن ۲ است. در مثال فوق، بازی با حرکت بنگاه ۱ شروع می‌شود که می تواند E یا S را انتخاب کند. سپس بنگاه ۲ با توجه به حرکت بنگاه ۱ دارای دو گره تصمیم است که در هر گره می تواند E یـا S را انتخاب کند.

[10] Decision node
[11] Terminal node



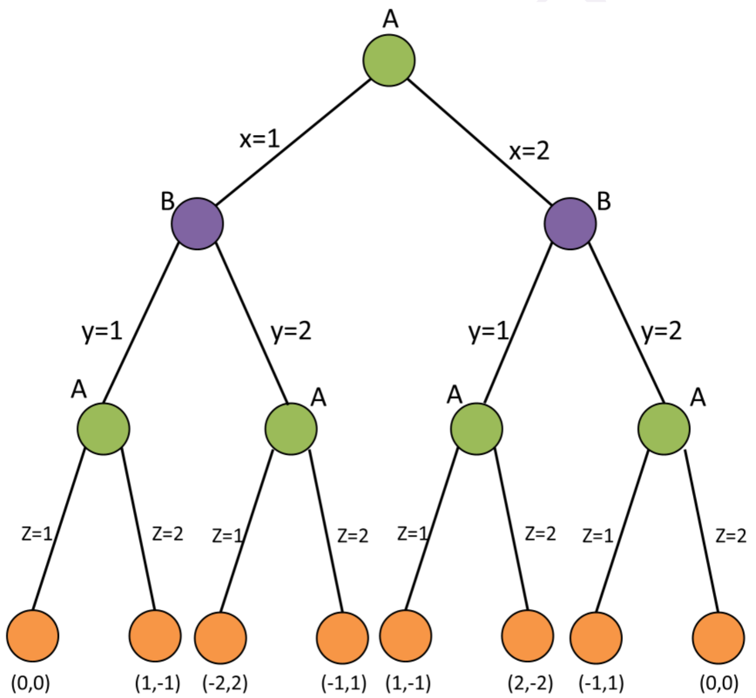
شکل (۳)

در این مثال، فرض بر این است که بنگاه ۲ ابتدا حرکت بنگاه ۱ را مشاهده می کند و سپس حرکت خود را انجام می دهد. لذا بنگاه ۲ که مرحله دوم این بازی را انجام می دهد دارای دو گره تصمیم است که آن ها را تفکیک می کند و دقیقا می داند در کدام گره قرار دارد.

مثال: فرض کنید بازیکن A در حرکت اول خود، عدد x را از مجموعه $\{1,2\}$ انتخاب می کند. در حرکت دوم بازیکن B با دانستن x، عدد y را از مجموعه $\{1,2\}$ انتخاب می کند. در حرکت سوم بازیکن A با آگاهی از y و با به خاطر داشتن x می تواند z را از مجموعه $\{1,2\}$ انتخاب نماید. بنابراین سه حرکت صورت گرفته است که نتیجه آن ها انتخاب اعداد x،y ، و z است. فرض کنید در پایان بازی، برد A برابر با $E(x,y,z)=x-2y+z$ و برد B برابر با $-E(x,y,z)$ است. برد بازیکن A به صورت زیر محاسبه می شود.

$E(1,1,1) = 1-2-1 = 0$
$E(2,1,1) = 2-2+1 = 1$
$E(1,1,2) = 1-2+2 = 1$
$E(2,1,2) = 2-2+2 = 2$
$E(1,2,1) = 1-4+1 = -2$
$E(2,2,1) = 2-4+1 = -1$
$E(1,2,2) = 1-4+2 = -1$
$E(2,2,2) = 2-4+2 = 0.$

این بازی را می توان با نمودار درختی نشان داد. این یک بازی دونفره است که سه مرحله دارد. در مرحله اول و سوم، بازیکن A و در مرحله دوم بازیکن B تصمیم می گیرد. در انتهای درخت، مقدار مولفه اول، برد بازیکن A و مقدار مولفه دوم، برد بازیکن B است.



شکل (۴)

مثال: دو شرکت کامپیوتری را در نظر بگیرید. شرکت A و شرکت B. شرکت A درصدد طراحی یک برنامه تبلیغاتی برای فروش یک نرم افزاری است که جدیدا طراحی کرده است. بعد از تحقیقات زیاد، شرکت به این نتیجه رسیده است که باید یکی از دو برنامه تبلیغاتی L یا W را در پیش گیرد. این دو برنامه تاثیری در کل فروش و درآمد شرکت ندارد بلکه تفاوت آن ها در مقدار فروش در زمان های مختلف است. در روش

L که روش فراگیر است بخش عمده محصول در سال اول بفروش مـی رسـد و بـرای سـال دوم فـروش کـم می‌شود زیرا بازار در سال اول اشباع می‌شود و هزینه این روش تبلیغ نسبت به روش W زیاد است. در روش تبلیغ W که روش آرام است سال اول فروش کمتر ولی در سال دوم فروش زیاد بوده و بازار اشباع می گردد و هزینه این روش کمتر از روش L می باشد. سود حاصل از دو روش تبلیغ در جدول زیر نوشته شده است:

جدول (۱) سود خالص شرکت A

سود و هزینه	روش L	روش W
سود ناخالص سال ۱	900	200
سود ناخالص سال ۲	100	800
کل سود ناخالص دو سال	1000	1000
هزینه تبلیغ	-570	-200
کل سود خالص دو سال	430	800

طبق جدول مذکور اگر شرکت A تنها شرکت تولید کننده نرم افزار در بازار باشد باید روش تبلیغ W را انتخاب کند زیر سود آن بیشتر از روش L می باشد.

مسئولین شرکت A متوجه می شوند که شرکت دیگری تحت عنوان شـرکت B در سـال دوم بـا مـارک متفاوت نرم افزار شرکت را مشابه سازی به بازار عرضه می کند و در نتیجه در سال دوم بازار به طور مساوی بین آن ها تقسیم خواهد شد. هزینه مشابه سازی برای این شرکت ۳۰۰ هزار ریال بوده است و سود شـرکت A و B را در صورت ورود شرکت B نشان می دهد:

جدول (۲) سود شرکت B در صورت ورود به بازار

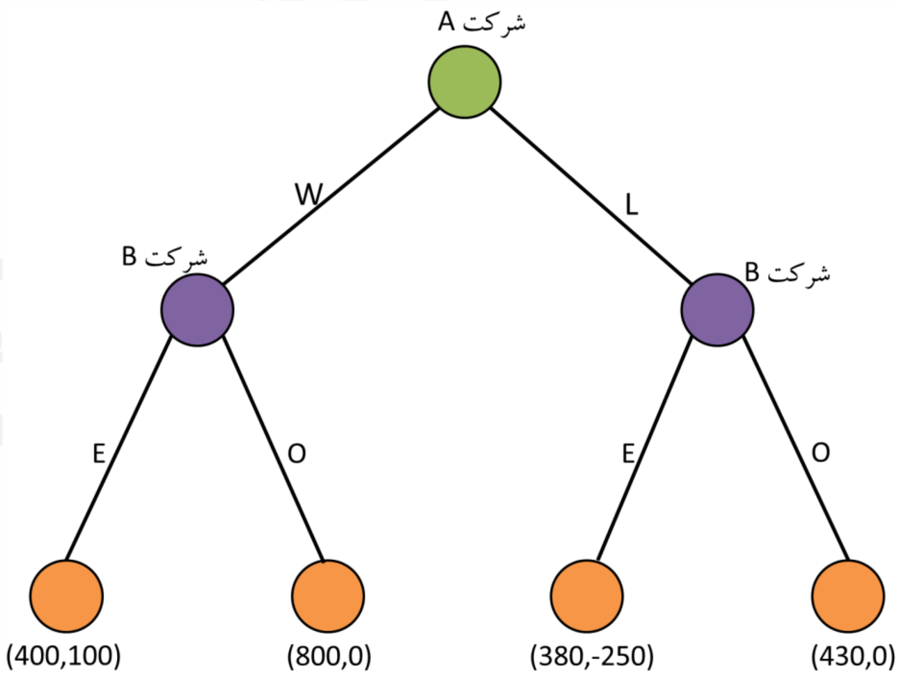
سود و هزینه	اگر شرکت A روش L را بکار برد	اگر شرکت A روش W را بکار برد
سود ناخالص سال ۱	0	0
سود ناخالص سال ۲	50	400
کل سود ناخالص دو سال	50	400
هزینه مشابه سازی	-300	-300
کل سود خالص دو سال	-250	100

جدول (۳) سود شرکت A در صورت ورود شرکت B

سود و هزینه	روش L	روش W
سود ناخالص سال ۱	900	200
سود ناخالص سال ۲	50	400
کل سود ناخالص دو سال	950	600
هزینه تبلیغ	-570	-200
کل سود خالص دو سال	380	400

پس ملاحظه می گردد که با ورود شرکت B سود شرکت A متاثر می‌شود و لذا بین این دو شرکت بازی رخ می دهد. ضمن اینکه در زمان ورود شرکت B، شرکت A در بازار فعالیت دارد. در این بازی، بازیکن A می تواند تصمیم بگیرد که روش L یا روش W را برای تبلیغ انتخاب کند و شرکت B نیز می تواند تصمیم بگیرد که در سال دوم وارد بازاد شود (E) یا نشود (O).

از انجایی که شرکت A در سال اول تصمیم می گیرد لذا قبل از شرکت B تصمیم گیری می کند. سپس نوبت به شرکت B در سال دوم می رسد. فرم بسط بافته بازی را می توان به صورت زیر نشان داد:



شکل (۵) فرم بسط یافته بازی

در این بازی A نشان دهنده شرکت A، B نشان دهنده شرکت B است. اگر شرکت A، روش L را انتخاب کند، شرکت B باید پیرامون ورود (E) یا عدم ورود (O) تصمیم گیری کند. همینطور اگر شرکت A روش W را انتخاب کند، شرکت B باید پیرامون ورود (E) یا عدم ورود (O) خود به بازار در سال دوم تصمیم گیری کند. برای هر دنباله تصمیم بازیکنان پیامد آن ها در آخر نشان داده شده است که اولی از سمت چپ متعلق به بازیکن A و دومی به بازیکن B تعلق دارد. در بازی مذکور a_1 گره اولی و گره تصمیم گیری بازیکن A است و شاخه های L و W نیز عمل های بازیکن A را نشان می دهند. b_1 و b_2 گره های تصمیم گیری بازیکن B و شاخه های E و O نیز عمل های او را نشان می دهند.

فرم گسترسی بازی با اطلاعات کافی[۱۲] و ناکافی[۱۳]

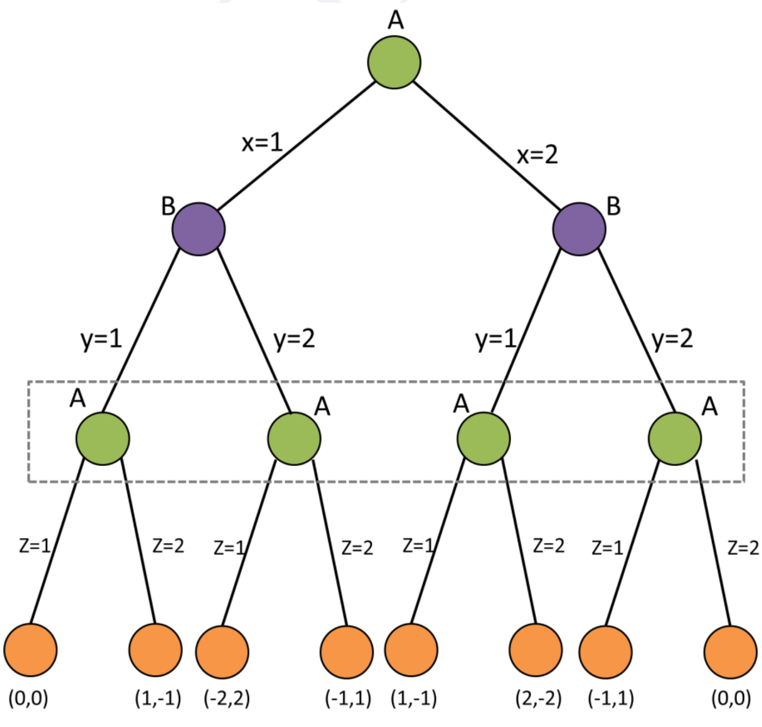
فرم گسترسی یا درخت بازی در بخش قبلی توصیف شد. در این شکل از بازی، حرکت بازیکنان به صورت **متوالی** است. بدین معنی که ابتدا یک بازیکن حرکت می کند و سپس نوبت به بازیکن دوم فرا می رسد، دقیقا حرکات بازیکن قبلی را مشاهده کرده باشد و آن را بداند، این بازی را **بازی پویا با اطلاعات کافی** می گویند. مانند شکل (۳) و شکل (۴) که بازیکنی که در نوبت حرکت قرار دارد، در زمان انجام حرکت خود، دقیقا **سابقه بازی**[۱۴] را می داند. این وضعیت باعث می‌شود تا بازیکن بداند که دقیقا در کدام گره تصمیم قرار دارد. در چنین حالتی می گوییم که مجموعه اطلاعات بازیکن مورد نظر فقط شامل یک گره تصمیم است که برای سادگی به آن **مجموعه اطلاعات تک گرهی**[۱۵] می گوییم. اما اگر بازیکن سابقه بازی یا حرکات بازیکنان قبلی را نداند، زمانی که نوبت حرکت به او می رسد، نمی داند در کدام گره تصمیم قرار دارد. در چنین حالتی او دارای مجموعه اطلاعاتی است که بیش از یک گره تصمیم دارد که به آن **مجموعه اطلاعات چند گرهی**[۱۶] می گوییم. به هر بازی که دارای مجموعه اطلاعات چند گرهی باشد، **بازی پویا با اطلاعات ناکافی** می گوییم. اما اگر در یک بازی هیچ مجموعه اطلاعاتی با بیش از یک گره تصمیم وجود نداشته باشد، به آن **بازی پویا با اطلاعات کافی** می گوییم.

---

12 Perfect information
13 Imperfect information
14 History of game
15 Singleton information set
16 Multiple-node information set

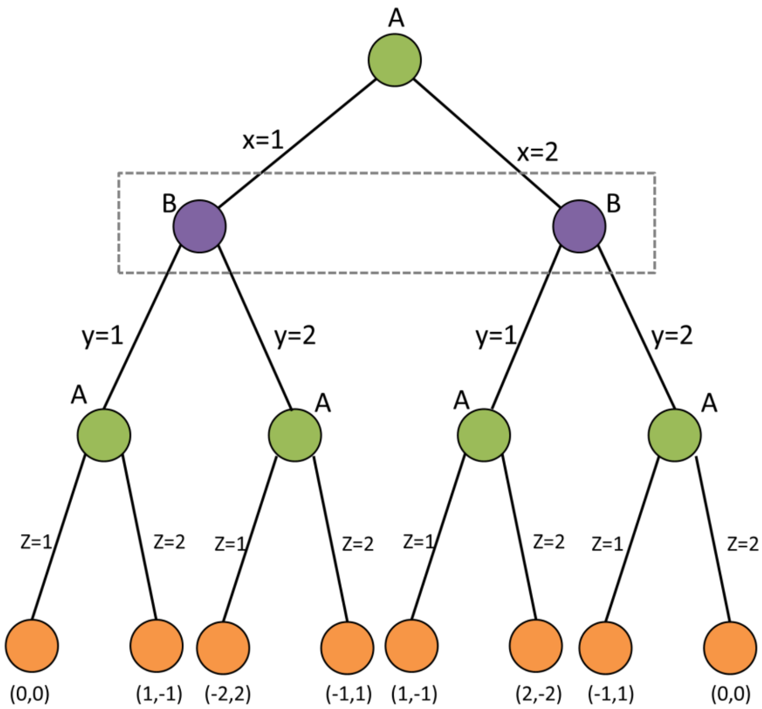
مثال: فرض کنید که در حرکت اول، بازیکن A عدد x را از مجموعه $\{1,2\}$ انتخاب می کند. در حرکت دوم بازیکن B با اطلاع از مقدار x، عدد y را از مجموعه $\{1,2\}$ را انتخاب می کند. در حرکت سوم بازیکن A بدون اطلاع از مقدار y و با فراموشی مقدار x، اقدام به انتخاب عدد z از مجموعه $\{1,2\}$ می کند.

برای نشان دادن این بازی باید به گونه ای عمل شود که بازیکن A حرکات گذشته را فراموش کرده باشد. نکته مهم این است که اطلاعات بازیکن A فقط مربوط به زمانی است که می خواهد عمل خود را انتخاب نماید، زیرا نه از عملکرد گذشته خود و نه از عملکرد بازیکن رقیب، هیچ گونه اطلاعاتی ندارد. لذا در حرکت اول، مجموعه اطلاعات بازیکن A فقط شامل یک گره است، اما در حرکت سوم، مجموعه اطلاعات او شامل **چهار گره** است. چون اطلاعات دیگری ندارد، نمی تواند بین این چهار گره هیچ گونه تمایزی قایل شود. ولی بازیکن B در حرکت دوم، دو گره تصمیم دارد که چون مقدار x را می داند، می تواند این دو گره را از هم متمایز کند و لذا هر گره تصمیم، یک مجموعه اطلاعات را تشکیل می دهد. بدین ترتیب این بازی دارای **اطلاعات ناکافی** است. نمایش این بازی به صورت زیر است که مجموعه تصمیم های بازیکن A در حرکت سوم در کادر خط چین قرار می گیرد.



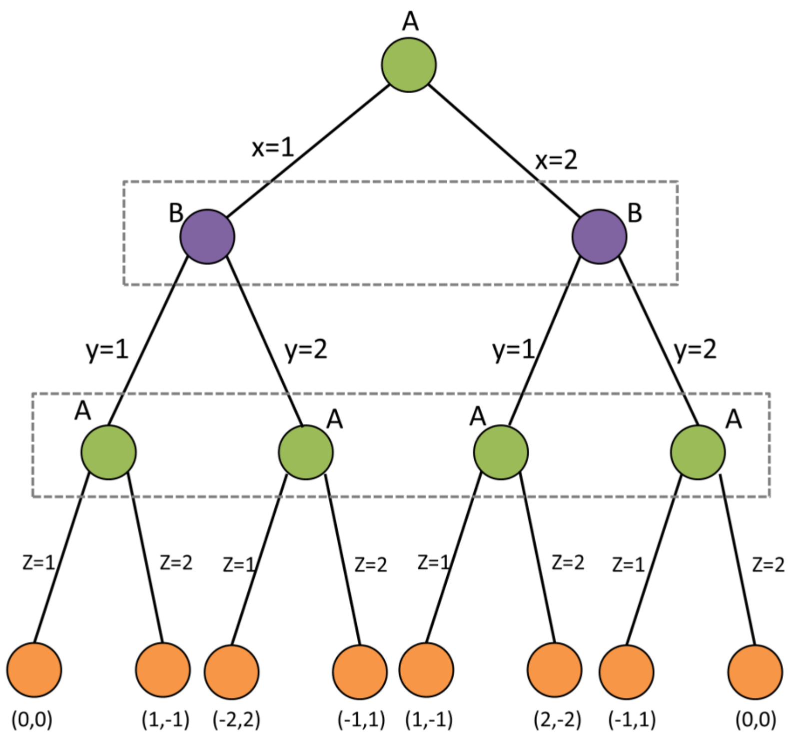
شکل (۶)

مثال: فرض کنید در حرکت اول، بازیکن A عدد x را از مجموعه $\{1,2\}$ انتخاب می کند. در حرکت دوم بازیکن B بدون اطلاع از مقدار x عدد y را از مجموعه $\{1,2\}$ انتخاب می کند. در حرکت سوم بازیکن A با اطلاع از x و y اقدام به انتخاب x از مجموعه $\{1,2\}$ می کند. در این مثال مجموعه اطلاعات بازیکن B شامل دو گره تصمیم است، اما برای بازیکن A، هر گره تصمیم یک مجموعه اطلاعات را تشکیل می دهد. بدین ترتیب این بازی دارای **اطلاعات ناکافی** است.



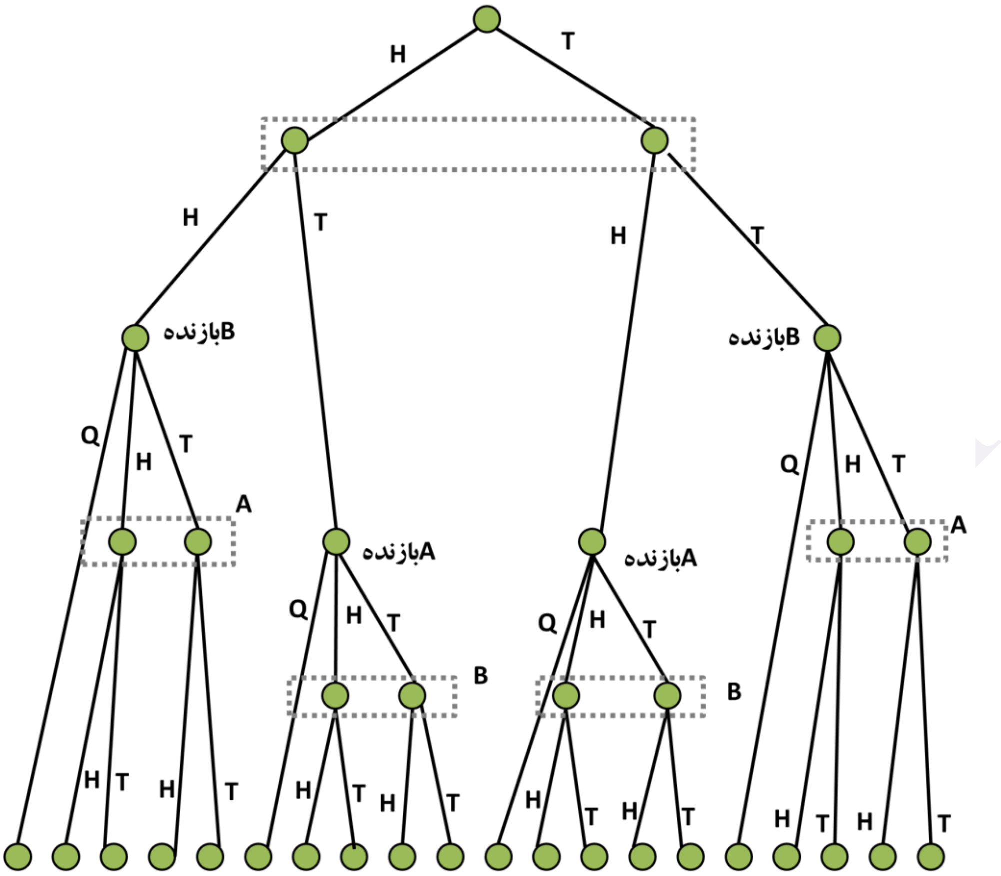
شکل (۷)

مثال: فرض کنید در مثال قبل، هر بازیکن در زمان حرکت خود، اطلاعی از حرکت بازیکن دیگر و حرکات قبلی خود ندارد. در این صورت بازیکن A دارای ۴ انتخاب (۱،۱)، (۲،۱)، (۱،۲)، و (۲،۲) و بازیکن B دارای دو انتخاب ۱ و ۲ است. در اینجا حرکات بازیکن A به صورت ساده شامل یک جفت عدد است که مستقل از حرکت بازیکن دیگر است، زیرا چیزی در مورد آن نمی داند.



شکل (۸)

مثال: فرض کنید دو نفر در بازی سکه شرکت کرده اند که در مرحله اول، ابتدا فرد A سکه خود را پرتاپ می کند. سپس فرد B بدون مشاهده نتیجه پرتاب A، سکه خود را پرتاب می کند. حال هر دو بازیکن نتیجه این مرحله را مشاهده می کنند. در این مرحله اگر نتیجه هر دو پرتاب، شیر (H) یا خط (T) باشد، مبلغ ۵۰۰۰ ریال و در غیر این صورت، B همان مبلغ را خواهد برد. در مرحله دوم، بازیکن بازنده حق تصمیم گیری در مورد ادامه یا اتمام بازی را دارد. لذا بازیکن بازنده اکنون می تواند یکی از استراتژی های اتمام بازی (Q) یا ادامه بازی را انتخاب نماید. اگر تصمیم به ادامه بازی بگیرد در این صورت سکه خود را پرتاب می کند که نتیجه آن شیر یا خط است. سپس بازیکن برنده نیز بایستی قبل از مشاهده نتیجه سکه بازیکن بازنده، سکه خود را پرتاب کند. در این مرحله نیز اگر نیز هر دو پرتاب، شیر یا خط باشد، بازنده مرحله اول بایستی مبلغ ۱۰۰۰۰ ریال (دو برابر مرحله اول) به برنده مرحله اول بپردازد. ولی اگر نتیجه هر دو پرتاب، یکسان نباشد (یکی شیر و دیگری خط) برد هر دو بازیکن صفر می‌شود. در واقع به بازنده مرحله اول فرصتی داده شده تا دست به یک ریسک بزند تا بازی را وارد مرحله دوم نماید که یا باخت قبلی خود را دو برابر می کند یا آن را به صفر می رساند.



برد بازیکن A	5	10	0	0	10	-5	0	-10	-10	0	-5	0	-10	-10	0	5	10	0	0	10
برد بازیکن B	-5	-10	0	0	-10	5	0	10	10	0	5	0	10	10	0	-5	-10	0	0	-10

شکل (۹)

در اینجا ابتدا بازیکن A اولین حرکت را انجام که در گره شروع بازی قـرار دارد و مجموعـه اطلاعـات او شامل همان یک گره است. اما بازیکن B در زمان انجام حرکـت خـود، دو گـره تصـمیم در داخـل مجموعـه اطلاعات خود دارد چون از تصمیم بازیکن A مطلع نیست. در مرحله دوم، ابتدا هر بازیکن (بازنده) دارای یک گره هستند. اما در مرحله دوم، بازیکنی که برنده مرحله اول بوده است، دارای دو مجموعه اطلاعات است که هر کدام شامل دو گره است.

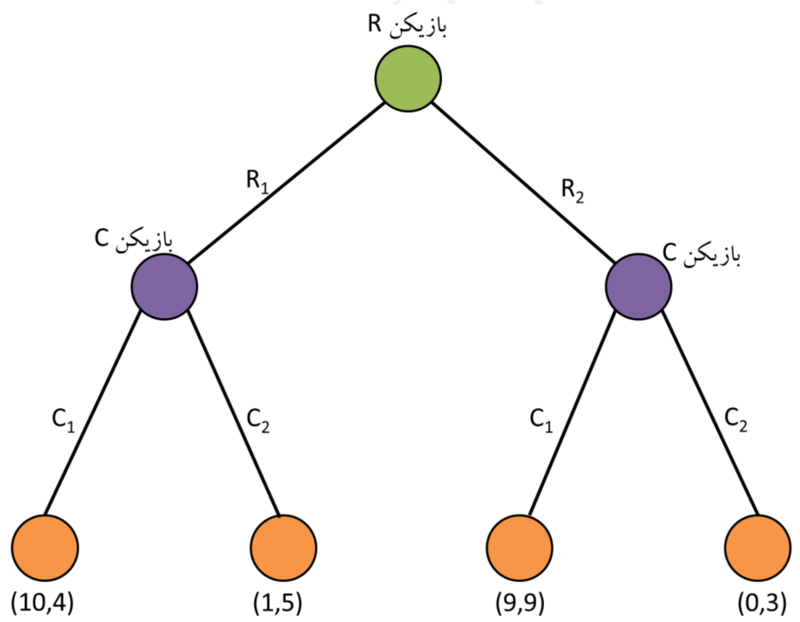
تعادل نش در بازی پویا با اطلاعات کامل: روش استنتاج معکوس[۱۷]

اگر بازی پویا با اطلاعات کامل باشد، می توان آن را با روش ساده ای به نـام **روش استنتاج معکــوس** حل نمود. بدین منظور بازی ایستای زیر را در نظر بگیرید.

[17] Backward induction

		بازیگر C	
		سیاست C_1	سیاست C_2
بازیگر R	سیاست R_1	$\overset{+}{10}, 4$	$\overset{+}{1}, \overset{+}{5}$
	سیاست R_2	$9, \overset{+}{9}$	$0, 3$

اگر این بازی را به صورت **ایستا** (یعنی وقتی که حرکت بازیکنان به طور همزمان انجام می‌شود) حل کنیم، تعادل بازی به صورت (R_1,C_2) می باشد که برد R برابر با یک و برد C برابر با ۵ است. اما اگر بازی را به صورت پویا در نظر بگیریم، ابتدا باید فرض کنیم که یکی از بازیکنان حرکت خود را انجام می دهد و سپس دیگری با مشاهده حرکت اولی، اقدام به حرکت می کند. در این جا فرض کنید که ابتدا R و سپس C حرکت خود را انجام می دهد. فرم گسترشی این بازی در نمودار شکل (۱۰) آمده است:



شکل (۱۰)

حال سئوال این است که بازیکن R کدام استراتژی را باید انتخاب کند؟ اگر R_1 را انتخاب کند، شاید برد ۱۰ را بدست اورد. از طرف دیگر اگر R_2 را انتخاب کند، می تواند به برد ۹ برسد. آیا این برد بدان معنا است که او باید R_1 را بازی کند؟

پاسخ منفی است، R یک بازیکن **عقلایی** است که به دو سوال زیر پاسخ می دهد.

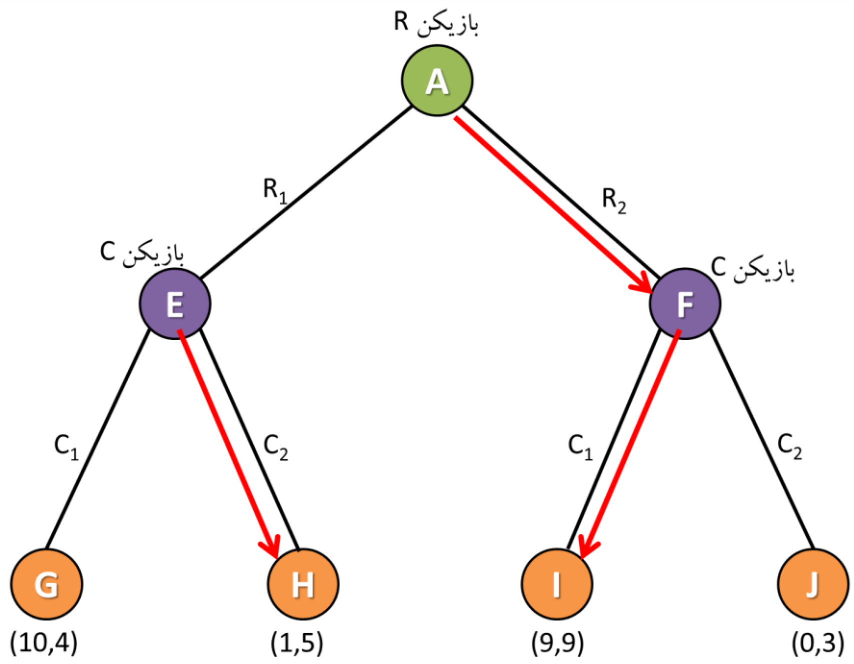
الف) از خود می پرسد که بازیکن C چه کاری انجام خواهد داد اگر من R_1 را انتخاب کنم؟

ب) از خود می پرسد که بازیکن C چه کاری انجام خواهد داد اگر من R_2 را انتخاب کنم؟

بازیکن R به سوال (الف) بدین صورت پاسخ می دهد که C، C_2 را انتخاب می کند زیرا برد ۵ را به برد ۴ ترجیح می دهد. اما پاسخ سوال (ب) این است که C،C_1 را انتخاب می کند زیرا برد ۹ را به برد ۳ ترجیح می دهد. بنابراین، R به این نتیجه می رسد که بهترین انتخاب وی، R_2 است زیرا برد ۹ به برد ۱ ترجیح دارد. اگر بازیکن R، R_2 را انتخاب کند، بازیکن C، C_1 را انتخاب می کند. بنابراین تعادل بازی (R_2,C_1) خواهد بود. نتیجه بازی با حالتی که حرکات به صورت همزمان انجام شود **متفاوت** است، زیرا در بازی همزمان یا بازی ایستا، نتیجه این بازی به صورت (R_1,C_2) است.

به طور خلاصه برای استفاده از **روش استنتاج معکوس**، از مراحل آخر شروع کرده و به ابتدای بازی بر می گردیم. بدین منظور تصور کنید که بازیکن C در گره E باشد، در این صورت بهترین انتخاب او C_2 است. بدین ترتیب بازی از E به H می رسد که برد R و C به ترتیب ۱ و ۵ خواهد بود. اگر بازیکن C در گره F باشد، C_1 را انتخاب می کند که در این حالت، برد R و C به ترتیب ۹ و ۹ است.

حال به بررسی رفتار R می پردازیم. R در گره A قرار دارد و رفتار C را حدس می زند. وی می داند که اگر R_1 را انتخاب کند، مسیر بازی به صورت $A \to E \to H$ است که به برد ۱ خواهد رسد. اگر R_2 را انتخاب کند، مسیر بازی به صورت $A \to F \to I$ است که به برد ۹ می رسد. از مقایسه گره های H و I مشخص است که از نظر R، I به H برتری دارد و لذا R_2 بهتر است. بنابراین تعادل این بازی به صورت (R_2,C_1) است و **مسیر تعادلی بازی** نیز به صورت $A \to F \to I$ است.



شکل (۱۱)

لازم به ذکر است که در این بازی، مجموعه اطلاعات بازیکن *R* فقط یک گره تصمیم دارد که با *A* نشان داده شده است. این در حالی است که بازیکن *C* دارای دو مجموعه اطلاعات است که یکی شامل گره *E* و دیگری شامل گره *F* است. از انجا که هر مجموعه اطلاعات فقط شامل یک گره است، لذا این **بازی با اطلاعات کامل** است.

تعادل نش در بازی پویا با اطلاعات کامل: روش بازی فرعی کامل

برای بازی های پویا می توان تعادل نش را براساس مفهموم **تعادل نش در بازی فرعی کامل**[18] بدست آورد. این روش عمومی تر از روش استنتاج معکوس است. برای استفاده از این روش ابتدا لازم است مفاهیمی مانند **بازی فرعی** و استراتژی را در بازی های پویا مطرح کرده و سپس به تعادل در بازی فرعی کامل بپردازیم.

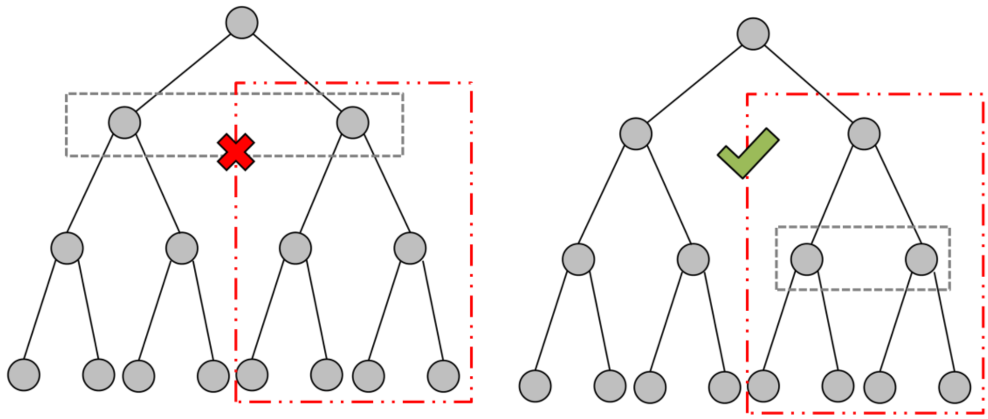
بازی فرعی

اصطلاح بازی فرعی در رابطه با فرم گسترشی بازی ها مطرح می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

[18] Sub-game perfect Nash equilibrium

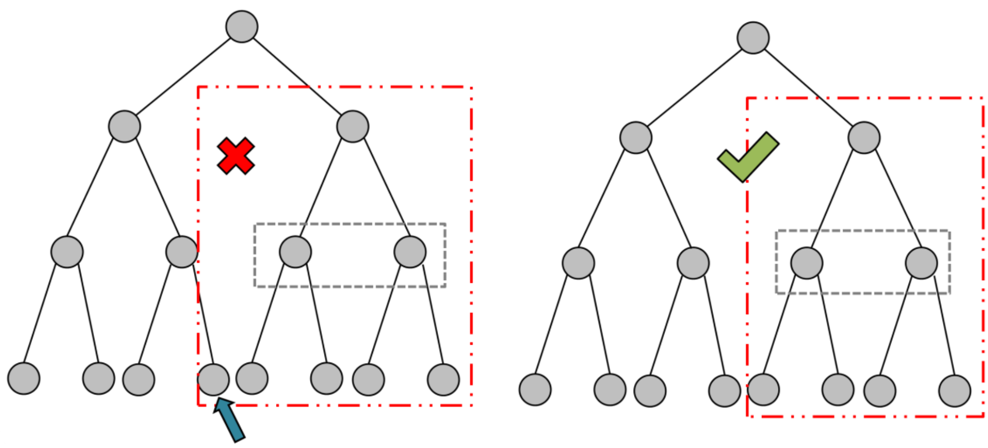
بازی فرعی بخشی از فرم گسترشی بازی پویا یا زیرمجموعه ای از آن است. در درخت بازی یا فرم گسترشی بازی، زیر مجموعه ای از آن که دارای خواص زیر باشد، یک بازی فرعی است:

الف) از یک گره تصمیم شروع می‌شود که این گره الزاما تنها گره در مجموعه اطلاعات است. به عبارت دیگر، بازی فرعی نمی تواند از مجموعه اطلاعات چند گرهی، شروع شود بلکه بایستی از **مجموعه اطلاعات تک گرهی** شروع شود. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است.



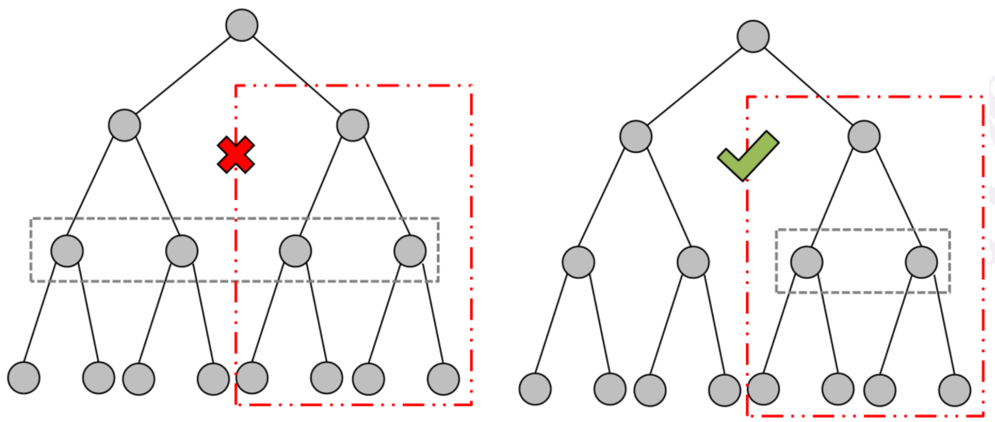
شکل (۱۲) شرط الف، شروع یک بازی فرعی از مجموعه اطلاعات تک گرهی

ب) شامل تمامی گره ها و شاخه هایی باشد که از **گره شروع بازی فرعی** منشعب می شوند. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است.



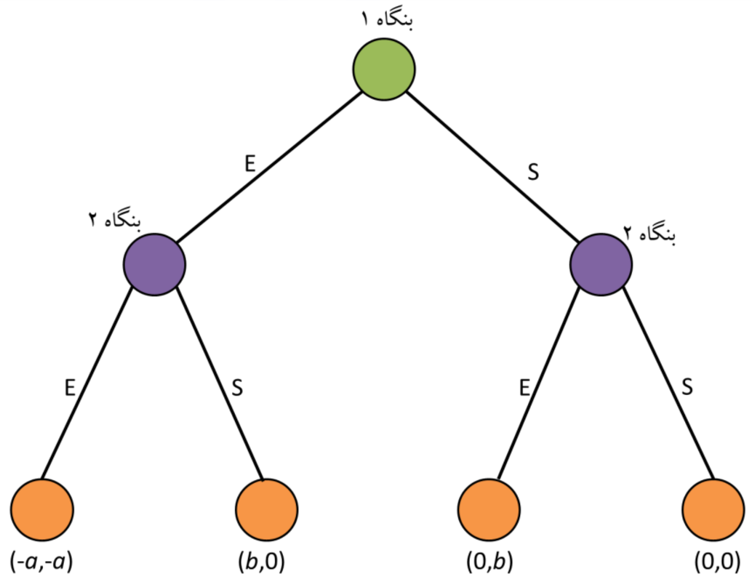
شکل (۱۳) شرط ب، انشعاب تمامی گره ها از گره شروع بازی

ج) **هیچ مجموعه اطلاعاتی را قطع نکند**. به عبارت دیگر در ادامه مسیر تا رسیدن به پایان بازی، اگر یک مجموعه اطلاعات چند گرهی برخورد کند، تمام گره ها آن را شامل شود. در شکل زیر این حالت نشان داده شده است.



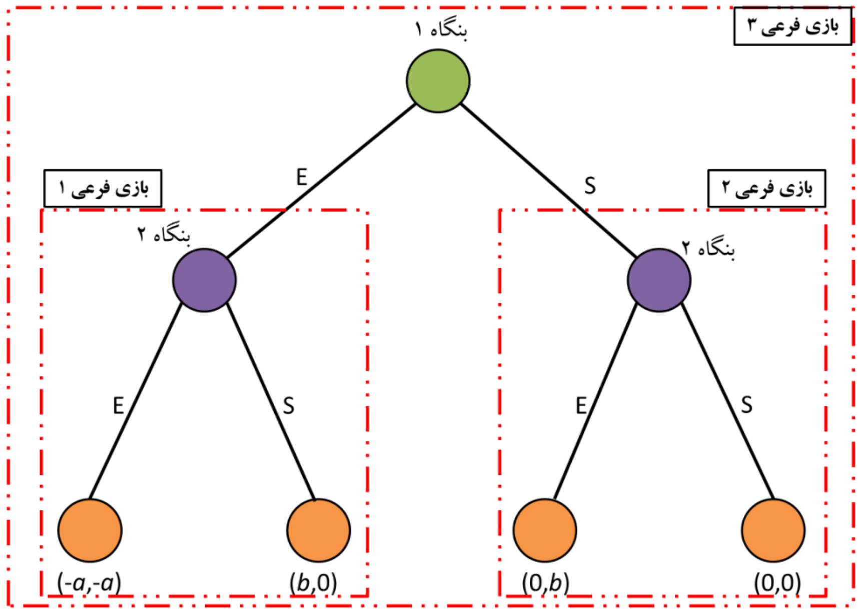
شکل (۱۴) شرط ج، عدم قطع مجموعه اطلاعاتی در یک بازی فرعی

طبق تعریف فوق، هر بازی حداقل یک بازی فرعی دارد که همان بازی اصلی است. شکل (۱۵) را در نظر بگیرید.



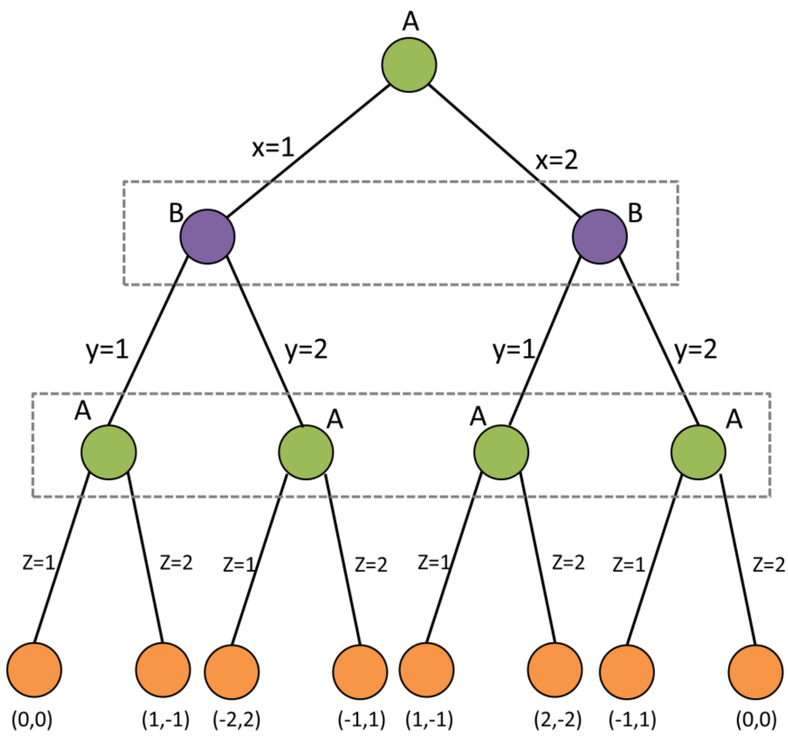
شکل (۱۵)

در این شکل **سه بازی فرعی** وجود دارد. زیرا به جز گره اولیه می توان بـازی را از دو گـره دیگـر نیـز شروع کرده و به پایان رساند که هر کدام شرایط بازی فرعی را دارند.



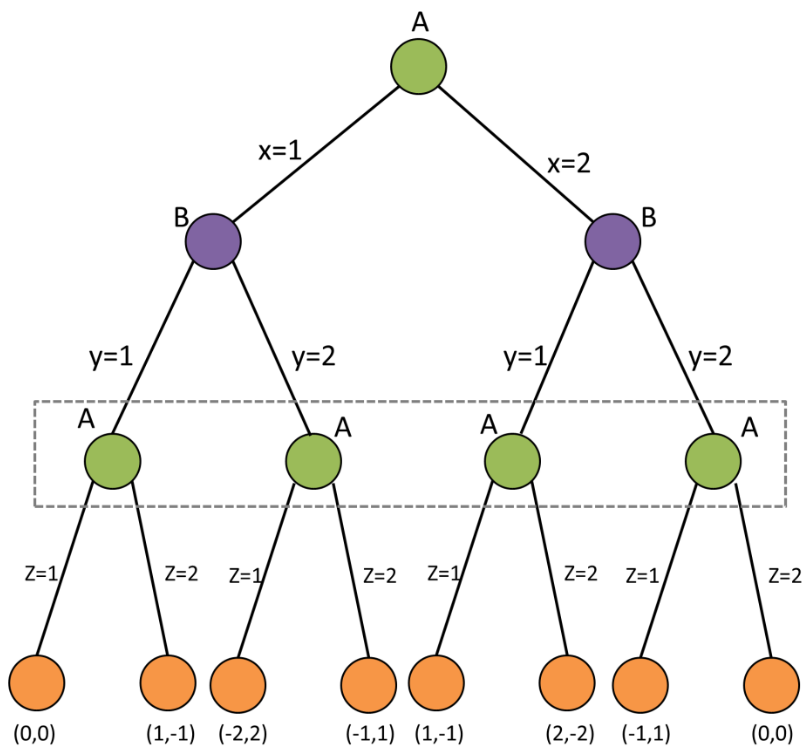
شکل (۱۶) نمایش بازی های فرعی

اما در شکل (۱۷) هیچ بازی فرعی وجود ندارد زیرا هیچ گرهی برای شروع نداریم که شـرط مجموعـه اطلاعات تک گرهی را داشته باشد. **البته** کل بازی، خود یک بازی فرعی است.



شکل (۱۷)

در شکل (۱۸) هیچ بازی فرعی وجود ندارد زیرا علی رغم این که دو گره تصمیم برای بـازیکن *B* وجـود دارد که هر کدام می توانند یک نقطه شروع برای بازی فرعی باشند ولی در ادامه مسیر، مجموعـه اطلاعـات بازیکن *A* را قطع می کند که با بند (ج) تعریف تناقض دارد.



شکل (۱۸)

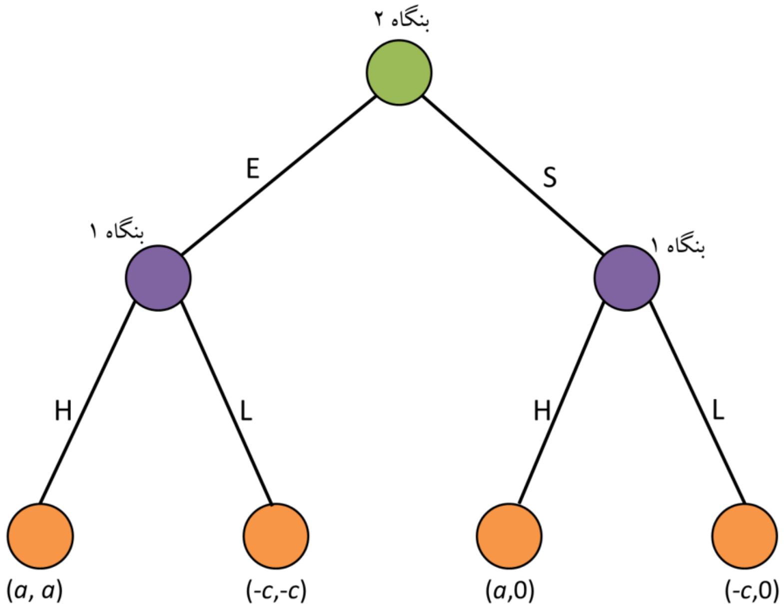
استراتژی در بازی های پویا

در بازی ایستا، به طور ساده هر استراتژی بیانگر عمل یا اقدام بازیکن است. اما در بازی پویا مفهوم استراتژی تا حدودی پیچیده تر است، زیرا علاوه بر **عمل** بازیکن، **عکس العمل** او را نیز نشان می دهد. به عبارت دیگر بازیکن هم عمل می کند و هم عکس العمل نشان می دهد. علاوه بر این آن ها بایستی برنامه ریزی کنند که در تمام موقعیت هایی که در این بازی پیش می اید، چگونه واکنش نشان خواهند داد. لذا در فرم گسترشی بازی، استراتژی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

یک استراتژی در فرم گسترشی بازی عبارت از برنامه جامعی است که مجموعه اقدامات یا اعمال بازیکن را توصیف می کند که در تمام گره های ممکن تصمیم گیری اتخاذ می کنند. چنین برنامه ای بستگی به پیشینه بازی دارد و ممکن است شامل استراتژِی ها مختلف نیز باشد.

مثال: بنگاه ۱ بازار محصولی را در اختیار دارد و بنگاه ۲ درباره ی ورود به بازار تصمیم گیری می کند. تصور کنید به دنبال تصمیم بنگاه ۲ برای ورود، بنگاه ۱ می تواند بین دو استراتژی قسمت، دست به انتخاب

بزند: یکی قیمت بالا (*H*) و دیگر قیمت پایین (*L*). سودی که بنگاه ها به دست می اورند در قیمت های بـالا، مثبت ولی در قیمت های پایین، منفی خواهد بود. البته بنگاه ۲ در صورت عدم ورود، سودش صفر است.



شکل (۱۹)

بنگاه ۲ یک گره تصمیم و دو عمل دارد که استراتژی های او را نشان می دهـد، یعنـی ورود *E* و عـدم ورود *S*. بنگاه ۱ نیز دو گزینه دارد: قیمت بالا (*H*) و قیمت پایین (*L*). اما چون دو گـره تصـمیم دارد، دارای چهار استراتژی است. هر استراتژی بیانگر یک عمل برای هر وضعیت ممکن است. وضعیت های ممکن بـرای بنگاه ۲ این است که در گره سمت راست قرار بگیرید یا در گره سمت چپ. وی باید برای هر وضعیت ممکن (یعنی هر گرهی که در آن قرار گرفت) یک عمل را تعریف کند که در واقع عکس العمل او به رقیب خود می باشد. در این حالت هر استراتژی بنگاه ۱، زوجی از اعمال مشروع است که عنصر اول، عملی را توصیـف مـی کند که در پاسخ به ورود بنگاه ۲ است و عنصر دوم عملی را توصیف می کند که در پاسخ به عدم ورود بنگاه ۲ است. لذا مجموعه استراتژی های ممکن برای بنگاه ۱ عبارتند از:

$$S_1 = \{(H,H),(H,L),(L,H),(L,L)\}$$

به عنوان مثال استراتژی (*H,H*) برنامه بنگاه ۱ را توصیف می کند که عنصر اول (*H*) در واکنش به ورود بنگاه ۲ و عنصر دوم (*H*) در واکنش به عدم ورود بنگاه ۲ می باشد. یعنی در هر صورت او قیمـت را افـزایش

می دهد، چه بنگاه ۲ وارد شود و چه وارد نشود. همچنین استراتژی (*H,L*) بیانگر برنامه بنگـاه ۲ در واکـنش به بنگاه ۱ است که *H* در واکنش به *E* و *L* در واکنش به *S* است.

تعادل نش در بازی فرعی کامل

تعریف تعادل نش برای بازی پویا **مشابه** بـا بـازی ایسـتا اسـت. تعـادل نـش عبـارت از مجموعـه ای از استراتژی ها است به گونه ای که هیچ بازیکنی انگیزه ای برای تغییر اسـتراتژی خـود نداشـته باشـد. بـدین منظور، ابتدا بازی فرم گسترشی را به صورت فرم نرمال نشان می دهیم. به عنوان مثـال، فـرم نرمـال بـرای شکل (۱۹) به صورت زیر می‌شود.

		بنگاه ۲		
		E	*S*	
بنگاه ۱	*(H,H)*	$\overset{+}{a},\overset{+}{a}$	$\overset{+}{a},0$	$a=\max\{a,0\}$
	(H,L)	$\overset{+}{a},\overset{+}{a}$	$-c,0$	$a=\max\{a,0\}$
	(L,H)	$-c,-c$	$\overset{+}{a},\overset{+}{0}$	$-c=\max\{-c,0\}$
	(L,L)	$-c,-c$	$-c,\overset{+}{0}$	$-c=\max\{-c,0\}$
		$a=\max\{a,a,-c,-c\}$	$a=\max\{a,-c,a,-c\}$	

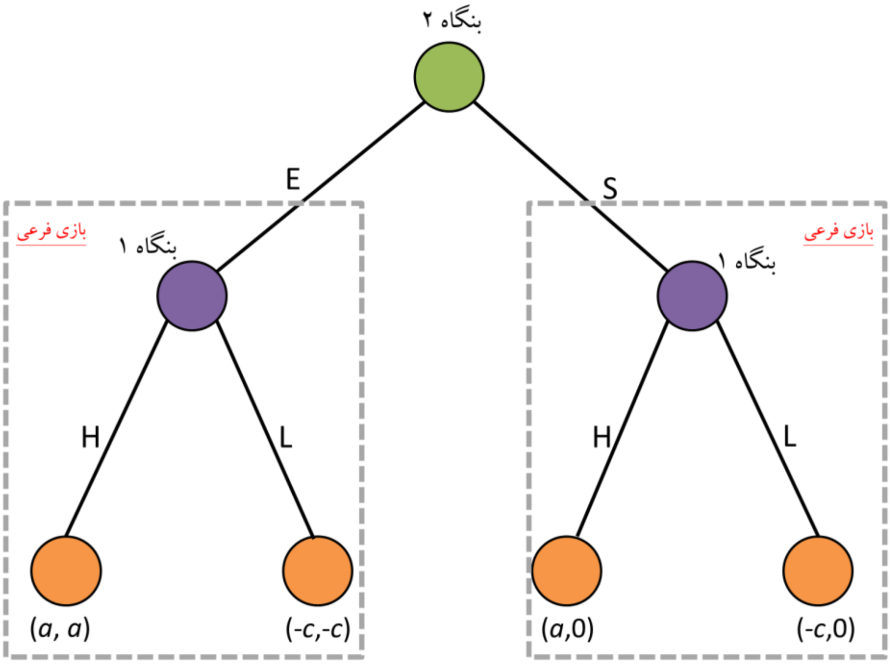
علامت های مثبت در بالای هر عنصر بیانگر بهترین واکنش بازیکنان می باشد. مشابه قبل، در هر جایی که دو علامت مثبت وجود داشته باشد، بیانگر **تعادل نش** می باشد که عبارتند از:

	استراتژی بنگاه ۱	استراتژی بنگاه ۲
تعادل ۱	(H,H)	E
تعادل ۲	(H,L)	E
تعادل ۳	(L,H)	S

نقاط تعادل نش در مجموعه *N* قرار می گیرد.

$$N=\{((H,H),E),((H,L),E),((L,H),S)\}$$

هر چند در این بازی سه نقطه تعادل وجود دارد، ولی تعادل های ۲ و ۳ دارای **مشکل** هستند. این را می توان با دقت در شکل (۱۹) بررسی نمود. در این شکل دو بازی فرعی وجود دارد که از گره های تصمیم بنگاه ۱ شروع می‌شود.



شکل (۲۰)

در گره سمت چپ، بنگاه ۲ وارد بازار شده است و واضح است که بهترین واکنش بنگاه ۱، انتخاب H است چون $a > -c$. در گره سمت راست، بنگاه ۲ وارد بازار نمی‌شود و بدهی است که بهترین واکنش بنگاه ۱ انتخاب H است چون $a > -c$. لذا در هر یک از این بازی های فرعی، H بر L **غالب** است، زیرا برای بنگاه ۱ سود آور نیست که قیمت پایین یا L را انتخاب کند.

تعادل ۲ را در نظر بگیرید. در این حالت، اگر بنگاه ۲ استراتژی ورود یا E را انتخاب کند، استراتژی بهینه بنگاه ۱ برابر انتخاب قیمت بیشتر یا H است که منطقی است زیرا این بنگاه بین a و $-c$ حالت a را انتخاب می کند که سود بیشتری دارد. اما اگر بنگاه ۲ استراتژی عدم ورود یا S را انتخاب کند، استراتژی بهینه بنگاه ۱ براساس تعادل ۲، برابر انتخاب قیمت کمتر یا L است که واضحا **منطقی نیست**، زیرا این جواب به این معنا است که بنگاه ۱ بین a و $-c$ حالت $-c$ را انتخاب کند.

تعادل ۳ را در نظر بگیرید. در این حالت، اگر بنگاه ۲ استراتژی عدم ورود یا S را انتخاب کند، استراتژی بهینه بنگاه ۱ برابر انتخاب قیمت بیشتر یا H است که منطقی است زیرا این بنگاه بین a و $-c$ حالت a را انتخاب می کند که سود بیشتری دارد. اما اگر بنگاه ۲ استراتژی ورود یا E را انتخاب کند، استراتژی بهینه بنگاه ۱ براساس تعادل ۲، برابر انتخاب قیمت کمتر یا L است که واضحا **منطقی نیست**، زیرا این جواب به این معنا است که بنگاه ۱ بین a و $-c$ حالت $-c$ را انتخاب کند.

دو تحلیل فوق نشان می دهد که تعادل های ۲ و ۳ بیانگر موقعیت هایی هستند که **باورکردنی یا معتبر نیستند.**

اما تعادل ۱ یک موقعیت **باورکردنی** یا معتبر هستند. اگر بنگاه ۲ استراتژی ورود یا E را انتخاب کند، استراتژی بهینه بنگاه ۱ برابر انتخاب قیمت بیشتر یا H است که منطقی است زیرا این بنگاه بین a و $-c$ حالت a را انتخاب می کند که سود بیشتری دارد. اگر بنگاه ۲ استراتژی عدم ورود یا S را انتخاب کند، استراتژی بهینه بنگاه ۱ براساس تعادل ۱، برابر انتخاب قیمت بیشتر یا H است که واضحا منطقی است، زیرا بنگاه ۱ بین a و $-c$ حالت a را انتخاب کند. این تحلیل نشان می دهد که تعادل ۱ **باورکردنی یا معتبر است.**

بدین ترتیب می توان مفهوم تعادل نش را برای بازی های فرم گسترشی نیز به کار برد. بدین منظور لازم است تمام استراتژی ها، **باورکردنی** باشد. بدین معنی که اعمال بازیکنان بایستی در تمام بازی های فرعی چه **در مسیر تعادل** و چه در **خارج مسیر تعادل** بهینه باشد. بر این اساس تعریف تعادل نش کامل در بازی فرعی عبارت است از:

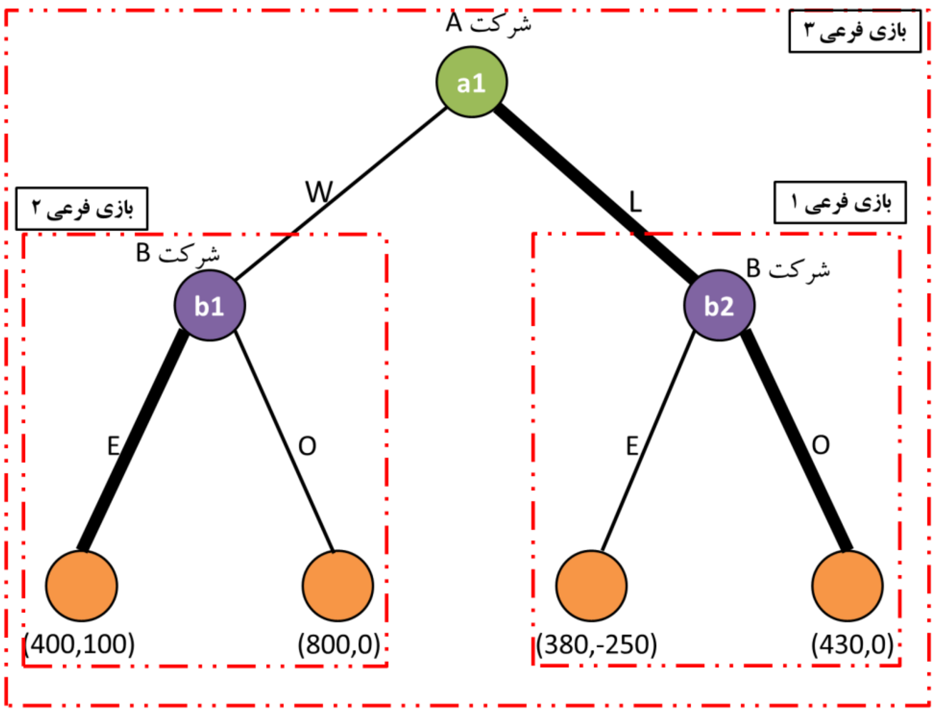
مجموعه ای از استراتژی ها در بازی فرم گسترشی بیانگر تعادل نش کامل در بازی فرعی است اگر و فقط اگر اعمالی که در پی این استراتژی ها می آیند، تعادل نش در همه بازی های فرعی باشند.

مثال: به مثال دو شرکت کامپیوتری A و B باز می گردیم. فرم نرمال این مسئله به صورت زیر می‌شود.

		شرکت B				
		(E,E)	(E,O)	(O,E)	(O,O)	
شرکت A	L	380,-250	380,-250	+ + 430,0	+ 430,0	$0 = \max\{-250, 0\}$
	W	+ + 400,100	+ 800,0	+ 400,100	+ 800,0	$0 = \max\{-250, 0\}$
		$400 = \max\{400, 380\}$	$800 = \max\{800, 380\}$	$430 = \max\{430, 400\}$	$800 = \max\{430, 800\}$	

$$N = \{(W, EE), (L, OE)\}$$

تعادل های نش استراتژی به صورت (L,OE) و (W,EE) است. حالا سوال این است که کدام یک از استراتژی های نش **باورکردنی** است. نمایش درختی این بازی به همراه بازی های فرعی به صورت زیر می‌شود. در این شکل کمان های توپر استراتژی های برتر در بازی های فرعی است.



شکل (۲۱)

در این بازی سه بازی فرعی وجود دارد. بازی فرعی ۱ از گره b_2 شروع می‌شود شامل شاخه های منشعب از آن یعنی O و E و پیامدهای بازیکنان در گره های نهایی آن است. بازی فرعی ۲ مربوط به بازی

است که از b_1 شروع می‌شود و شامل شاخه ها و گره های نهایی بعد از آن است. بـازی فرعـی ۳ کـل بـازی است که از a_1 شروع می‌شود.

در بازی فرعی ۱، یک تعادل بازی فرعی است که انتخاب O توسط شرکت B است. در بازی فرعی ۲ یک تعادل بازی فرعی است که انتخاب E توسط شرکت B است. در بازی فرعـی ۳، شـرکت A انتخـاب L را دارد چون در صورت انتخاب L شرکت B انتخاب O را دارد که در این صورت عایدی شرکت A برابر ۴۳۰ می‌شود و در صورت انتخاب W، شرکت B انتخاب E را دارد که در این صورت عایدی شرکت A برابر ۴۰۰ مـی‌شـود. چون ۴۳۰ $>$ ۴۰۰ لذا شرکت A انتخاب L را انجام می دهد. که در این صورت از میان دو استراتژی (L,OE) و (W,EE)، تنها استراتژی (L,OE) **باورکردنی** است.

مثال: فرض کنید دو شـرکت کـامپیوتری A و B یـک بـازی پویـا انجـام مـی دهنـد. شـرکت A بـازی کامپیوتری را تولید کرده است که به یقین، سریع جذب بازار می‌شود. شرکت B توانایی مشـابه سـازی آن را به کمک مهندسان خود دارد که قابل رقابت با محصول شرکت A اسـت. شـرکت B مـی توانـد از مهندسـان شرکت A استفاده کرده و مشابه سازی را با هزینه بسیار پایین انجام دهد. شرکت A می تواند در قراردادهای استخدامی با مهندسان خود مفادی را بگنجاند مبنی بر ایـن کـه آن هـا حـق کـارکردن و دادن مشـاوره در شرکت های دیگر را ندارند و برای از بین بردن انگیزه کار در شرکت های دیگر به آن ها دسـتمزد بیشـتری پرداخت کند. این کار شرکت A منجر به تغییر پیامد شرکت B و به تبع آن تغییر استراتژی بازیکن B خواهد شد، این عمل پیشگیرانه شرکت A برای او هزینه بر می باشد. لذا شرکت A مـی توانـد در آغـاز بـازی عمـل پیشگیرانه (P) و یا هیچ عمل پیشگیرانه (D) را انجام ندهد. شـرکت B در هـر دو حالـت مـذکور مـی توانـد تصمیم بگیرد که آیا محصول شرکت A را مشابه سازی کرده و به بازار وارد شود (E) و یا مشابه سازی نکرده و لذا وارد بازار نشود (S). در پاسخ به عمل ورود شرکت B به بازار شرکت A باید تصمیم بگیرد کـه چـه نـوع برنامه تبلیغاتی جهت جذب مشتریان بازار به سمت خود در پیش گیرد او می تواند برنامه تبلیغاتی شـدید و فراگیر (F) را در پیش گیرد که در این صورت این برنامه برای او ۸۰ هزار ریال هزینه در بـر خواهـد داشـت. این برنامه تبلیغاتی در صورتی که عمل پیشگیرانه را نیز در پیش گرفته باشد ۷۰ درصد بازار را جذب او می کند ولی در صورتیکه عمل پیشگیرانه را انجام ندهد تنها ۶۲ درصد بازار جذب او می‌شـود. برنامـه تبلیغـاتی

دیگر که شرکت A می تواند در پیش گیرد برنامه تبلیغاتی آرام (H) است و هزینه ای برای او ندارد و می تواند ۵۰ درصد بازار را جذب او کند.

در آمد خالص بالقوه کل بازار بعد از کسر هزینه های تولید ۵۰۰ هزار ریال هم برای شرکت A و هم برای شرکت B که آن را مشابه سازی می کند، است. شرکت A اگر بخواهد عمل پیشگیرانه را در پیش بگیرد باید ۱۰۰ هزار ریال هزینه بیشتر صرف دستمزد مهندسان خود بکند، اگر شرکت B بخواهد با مهندسان شرکت A مشابه سازی را انجام دهد برای او هزینه ۱۰۰ هزار ریال و در غیر این صورت برای مشابه سازی باید ۲۰۰ هزار ریال هزینه بپردازد. در جداول زیر محاسبه پیامد شرکت A و B آورده شده است.

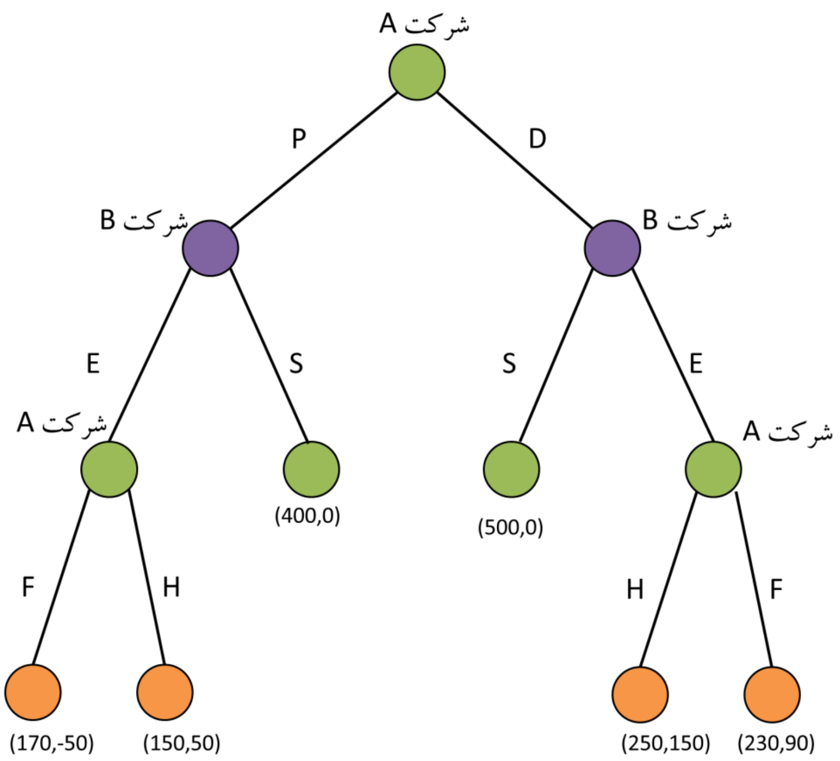
جدول (۴) محاسبه پیامد شرکت A

گزینه ها	هزینه تولید – درآمد	هزینه تبلیغات	هزینه عمل پیشگیرانه	پیامد (سود) شرکت A
عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی توسط شرکت B، تبلیغات شدید و فراگیر شرکت A	500*0.7=350	80	100	170
عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی توسط شرکت B، تبلیغات آرام شرکت A	500*0.5=250	0	100	150
عمل پیشگیرانه شرکت A، عدم مشابه سازی شرکت B	500	0	100	400
عدم عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی شرکت B، تبلیغات شدید و فراگیر شرکت A	500*0.62=310	80	0	230
عدم عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی شرکت B، تبلیغات آرام شرکت A	500*0.5=250	0	0	250
عدم عمل پیشگیرانه شرکت A، عدم مشابه سازی شرکت B	500	0	0	500

جدول (۵) محاسبه پیامد شرکت B

گزینه ها	هزینه تولید – درآمد	هزینه مشابه سازی	پیامد (سود) شرکت B
عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی توسط شرکت B، تبلیغات شدید و فراگیر شرکت A	500*0.3=150	200	-50
عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی توسط شرکت B، تبلیغات آرام شرکت A	500*0.5=250	200	50
عمل پیشگیرانه شرکت A، عدم مشابه سازی شرکت B	0	0	0
عدم عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی شرکت B، تبلیغات شدید و فراگیر شرکت A	500*0.38=190	100	90
عدم عمل پیشگیرانه شرکت A، مشابه سازی شرکت B، تبلیغات آرام شرکت A	500*0.5=250	100	150
عدم عمل پیشگیرانه شرکت A، عدم مشابه سازی شرکت B	0	0	0

فرم بسط یافته این مسئله به صورت شکل (۲۲) زیر است:



شکل (۲۲) شکل بسط یافته بازی

پیامدهای بازی در فرم استراتژیک به صورت جدول زیر می‌شود.

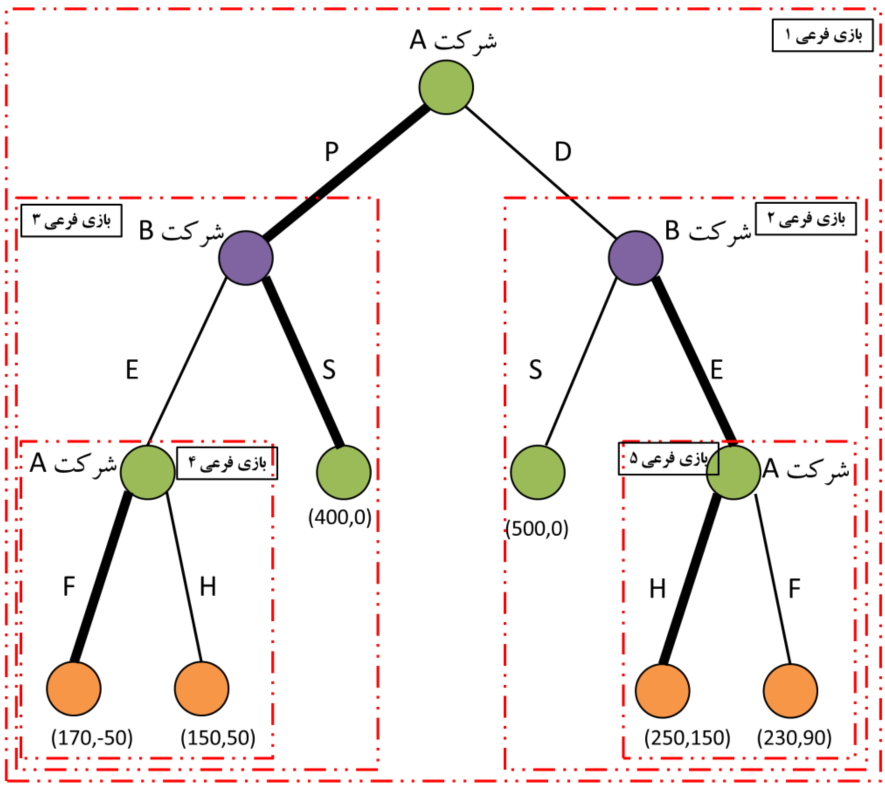
جدول (۶) پیامد بازی در فرم استراتژیک

		شرکت B			
		ES	EE	SS	SE
شرکت A	DFH	230,90	230,90	500,0	500,0
	DFF	230,90	230,90	500,0	500,0
	DHH	250,150	250,150	500,0	500,0
	DHF	250,150	250,150	500,0	500,0
	PFH	400,0	150,50	400,0	150,50
	PFF	400,0	170,-50	400,0	170,-50
	PHH	400,0	150,50	400,0	150,50
	PHF	400,0	170,-50	400,0	170,-50

تعادل نش فرم استراتژیک بازی فوق به صورت زیر می‌شود:

$$N = \{(DHH, EE), (DHF, EE), (PFF, ES), (PHF, ES)\}$$

برای این که بررسی کنیم کدام یک از جواب های فوق باورکردنی است می بایستی بازهای فرعی این بازی را استخراج کنیم. این بازی دارای ۵ بازی فرعی است به صورت زیر است:



شکل (۲۳)

کمان های توپر از تعادل نش بازی های فرعی بدست آمده است که باید کنترل شود که آیا با تعادل های نش استراتژی مطابقت دارد یا خیر. تنها تعادل نش *(PHF,ES)* این شرایط را دارد و **باورکردنی است** و لذا سایر جواب های مجموعه *N* **باورکردنی نیستند**.

در بازی مذکور با خود بازی اصلی ۵ بازی فرعی وجود دارد. در بازی فرعی ۱ شرکت *A* انتخاب *F*، در بازی فرعی ۲ انتخاب *H*، در بازی فرعی ۳ انتخاب *F* و در بازی فرعی ۴ انتخاب *H* و در بازی فرعی ۵ که همان بازی اصلی است انتخاب *P* است.

مثال: فرض کنید که در مرحله اول بازیکن ۱، مقدار x_1 را انتخاب می کند و در مرحله دوم، بازیکن ۲ بعد از مشاهده x_1 مقدار x_2 را انتخاب می کند. توابع برد آن ها عبارتند از:

$$u_1 = 7x_1 - x_1^2 - x_1x_2 \quad , \quad u_2 = 8x_2 - x_2^2 - x_1x_2$$

اگر این بازی را به صورت **ایستا** حل کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=7-2x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=f_1(x_2)=\frac{1}{2}(7-x_2)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=8-2x_2-x_2=0 \Rightarrow x_2=f_2(x_1)=\frac{1}{2}(8-x_1)$$

با حل توابع بهترین واکنش، مقادیر زیر به دست می آید:

$$x_1^*=2, u_1^*=4$$
$$x_2^*=3, u_2^*=9$$

اما اگر ابتدا بازیکن ۱ مقدار x_1 را انتخاب کند در این صـورت وی مقـدار x_1 را بـرای حـداکثر شـدن u_1 انتخاب می کند. اما وی واکنش بازیکن ۲ به رفتار خود را در نظر خواهد گرفت. به عبارت دیگر چون تصمیم گیری پویا است، بازیکن ۱ رفتار بازیکن ۲ یا تابع بهترین واکنش بازیکن ۲ را در تصمیمات خود دخالت می دهد.

$$u_1=u_1(x_1,x_2)=u_1(x_1,f_2(x_1))$$
$$=7x_1-x_1^2-\frac{1}{2}(8-x_1)x_1=3x_1-\frac{1}{2}x_1^2$$

با مشتق گیری نسبت به x_1 خواهیم داشت:

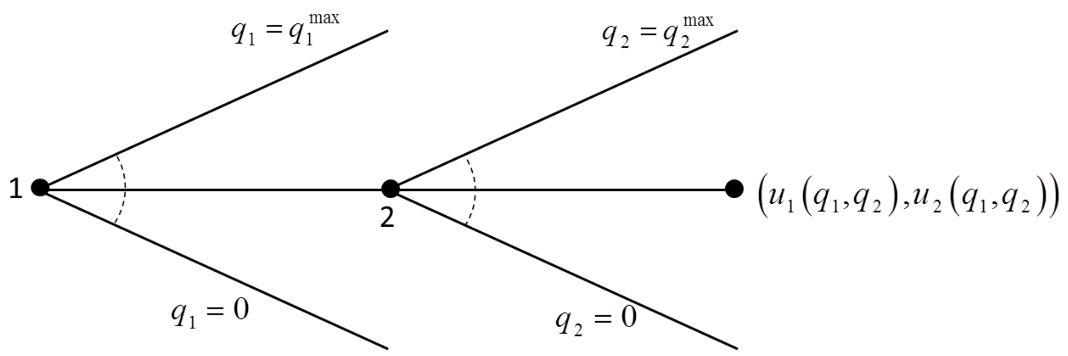
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=3-x_1=0 \Rightarrow x_1=3$$

حال بازیکن دوم به $x_1^*=3$ واکنش نشان می دهد:

$$x_2^*=f_1(x_1^*=3)=\frac{1}{2}(8-3)=2.5 \quad , \quad u_2^*=6.25 \quad , \quad u_1^*=4.5$$

بنابراین در بازی **پویا** که بازیکن ۱ حرکت اول را انجام می دهد از مزیتی برخوردار می‌شود که موجـب افزایش برد او می‌شود. زیر در بازی ایستا که حرکت ها همزمان است. برد بازیکن ۱ برابر با ۴ ولـی در بـازی پویا که او حرکت اول را انجام می دهدبه برد ۴.۵ می رسد. به عبارت دیگر امکان ندارد که موقعیت بازیکن ۱ (بازیکنی که حرکت اول را انجام می دهد) در یک بازی پویا بدتر از بازی ایستا شود.

مثال: دو شرکت تولید کننده آب معدنی در بطری های مشابه را در نظر می گیریم. این دو شرکت تنها عرضه کننده آب معدنی در بازار هستند. مقدار تولید شرکت ۱ برابر q_1 و شرکت ۲ برابر q_2 بوده و قیمت در این بازار با تابع تقاضای $p=10-Q$ تعیین می‌شود که $q_1+q_2=Q$ است. شرکت ۱ دارای مدیریت قوی است و می تواند قبل از شرکت ۲ با عرضه کننده های نهادهای تولید آب معدنی وارد مذاکره و عقد قرارداد شده، محصولی خود را قبل از شرکت ۲ وارد بازار می کند. پس حرکت بازی به صورت زیر است که اول شرکت ۱ مقدار تولید خود را تعیین می کند سپس شرکت ۲ با مشاهده آن، تولید بهینه خود را تعیین می کند. هزینه نهایی تولید هر بطری آب برابر ۳ ریال است و هزینه ثابت وجود ندارد. فرم بسط یافته بازی به صورت زیر است:



شکل (۲۴) فرم بسط یافته بازی با استراتژی پیوسته در این مثال

در بازی فرم بسط یافته فوق نقطه چین به صورت زاویه، به مفهوم پیوستگی استراتژی و بازی انتخاب بازیکنان را نشان می دهد که q_1 و q_2 یک مقدار دلخواه از آن بازه است.

تابع تقاضا به صورت زیر خواهد بود:

$$p=\begin{cases}10-(q_1+q_2) & q_1+q_2<10\\ 0 & q_1+q_2\geq 10\end{cases}$$

تابع پیامد یا عایدی با توجه به اطلاعات مذکور به صورت زیر خواهد بود:

$$u_i(q_1,q_2)=\begin{cases}[7-(q_1+q_2)]q_i & q_1+q_2<10\\ -3q_i & q_1+q_2\geq 10\end{cases}\quad i=1,2$$

بررسی تابع مذکور نشان می دهد هنگامی $u_i(q_1,q_2)=0$ است که $7-(q_1+q_2)=0$ باشد به عبارت دیگر $q_1+q_2=7$ باشد. پس مجموع تولید هیچگاه بیشتر از ۷ نخواهد بود زیرا در این صورت یکی از بنگاه ها حتما زیان خواهد دید.

$$\max_{q_2\in[0,7)} u_2(q_1,q_2)=\max\left[7-(q_1+q_2)\right]q_2$$
$$\frac{du_2}{dq_2}(q_1,q_2)=7-q_1-2q_2=0$$

تابع واکنش بازیکن ۲ به صورت زیر خواهد بود. که نشان می دهد بازیکن ۲ با مشاهده q_1 چگونه به آن واکنش نشان می دهد. $R_2(q_1)$ به این معنا است که واکنش بازیکن ۲ براساس مقدار واکنش بازیکن ۱ همان q_1 است.

$$R_2(q_1)=\begin{cases}3.5-0.5q_1 & q_1<7\\ 0 & q_1\geq 7\end{cases}$$

از آن جایی که بازیکن ۱ می تواند واکنش بازیکن ۲ را به رفتار خود توسط تابع مذکور پیش بینی کند لذا بایستی q_1 را انتخاب کند که با توجه به واکنش بازیکن ۲، بازیکن ۲ پیامد خود را حداکثر کند:

$$\max_{q_1\in[0,7)} u_1(q_1,R_2(q_1))=\max\left[7-(q_1+3.5-0.5q_1)\right]q_1$$
$$\frac{du_1}{dq_1}(q_1,R_2(q_1))=3.5-q_1=0 \quad , \quad q_1^*=3.5$$

و بهترین واکنش بازیکن ۲ به $q_1=3.5$ برابر است با:

$$R_2(q_1)=R_2(3.5)=1.75$$

پیامد شرکت ۱ و ۲ به صورت زیر می‌شود.

$$u_1\left(q_1^*,R_2\left(q_1^*\right)\right)=u_1(3.5,1.75)=6.125$$
$$u_2\left(q_1^*,R_2\left(q_1^*\right)\right)=u_2(3.5,1.75)=3.063$$

بررسی تعادل نشان داده می دهد بازیکنی کـه **زودتـر** حرکـت کـرده اسـت (بـازیکن ۱) دارای پیامـد **بیشتری** نسبت به بازیکنی است که **دیرتر** (بازیکن ۲) حرکت کرده اسـت. ایـن اصـطلاحا مزیـت **شـروع کننده بازی** می گویند. در این جا یک عامل باعـث ایـن مزیـت بـرای بـازیکن ۱ شـده اسـت و آن توانـایی مدیریتی قوی در عقد قرارداد با عرضه کننده نهاده ها قبل از بازیکن ۲ است. عوامل دیگری نیز می تواند این مزیت را ایجاد کند از جمله توانایی عرضه محصول جدید به بازار و یا نوآوری تکنولوژی که منجر بـه پـایین آوردن هزینه می‌شود.

حالا فرض کنید که در این بازی شرکت ها از مقدار تولید همدیگر اطلاعی نداشته باشند. در این صورت آن ها **بازی ایستا با اطلاعات کامل** انجام خواهند داد و هیچ شرکتی از مقدار تولید حریف اطلاعی نـدارد. در این صورت مقدار تعادل نش برابر خواهد بود با:

$$u_1(q_1,q_2)=\left[7-(q_1+q_2)\right]q_1=7q_1-q_1q_2-q_1^2$$

$$u_2(q_1,q_2)=\left[7-(q_1+q_2)\right]q_2=7q_2-q_2q_1-q_2^2$$

توابع بهترین پاسخ شرکت ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{du_1}{dq_1}(q_1,q_2)=7-q_2-2q_1=0$$
$$R_1(q_2)=\frac{7}{2}-\frac{q_2}{2}$$
$$\frac{du_2}{dq_2}(q_1,q_2)=7-q_1-2q_2=0$$
$$R_2(q_1)=\frac{7}{2}-\frac{q_1}{2}$$

که $R_1(q_2)$ واکنش شرکت ۱ با توجه به واکنش شرکت ۲ به میزان q_2؛ و $R_2(q_1)$ واکـنش شـرکت ۲ بـا توجه به واکنش شرکت ۱ به میزان q_1 است. مقدار تعادلی نش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{q_2}{2} \\ q_2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{q_1}{2} \end{cases} \xrightarrow{+} q_1 + q_2 = 7 - \frac{q_1 + q_2}{2} \rightarrow \frac{3(q_1 + q_2)}{2} = 7 \rightarrow q_1 + q_2 = \frac{14}{3} \quad (1)$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{q_2}{2} \\ q_2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{q_1}{2} \end{cases} \xrightarrow{-} q_1 - q_2 = \frac{q_1 - q_2}{2} \rightarrow q_1 = q_2 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{7}{3} = 2.33$$

$$u_1\left(q_1^*, q_2^*\right) = 5.44$$

$$u_2\left(q_1^*, q_2^*\right) = 5.44$$

مقایسه نتایج بازی **ایستا** و **پویا** با اطلاعات کامل به طور خلاصه در جدول زیر آمده است و توضیحات آن ذیل بیان شده است:

	بازی پویا	بازی ایستا
سود شرکت ۱	6.125	5.44
سود شرکت ۲	3.063	5.44
قیمت کالا	4.75	5.33
کل تولید	5.25	4.66
کل سود	9.188	10.88

۱- تولید هر شرکت در تعادل بازی ایستا و پویا متفاوت هستند.

۲- مجموع تولید دو شرکت در تعادل بازی پویا برابر *1.75+3.5=5.25* است و در تعادل بازی ایستا برابر *2.33+2.33=4.66* است یعنی مقدار **تولید** تعادلی در بازی پویا **بیشتر** از تولید تعادلی در بازی ایستا است.

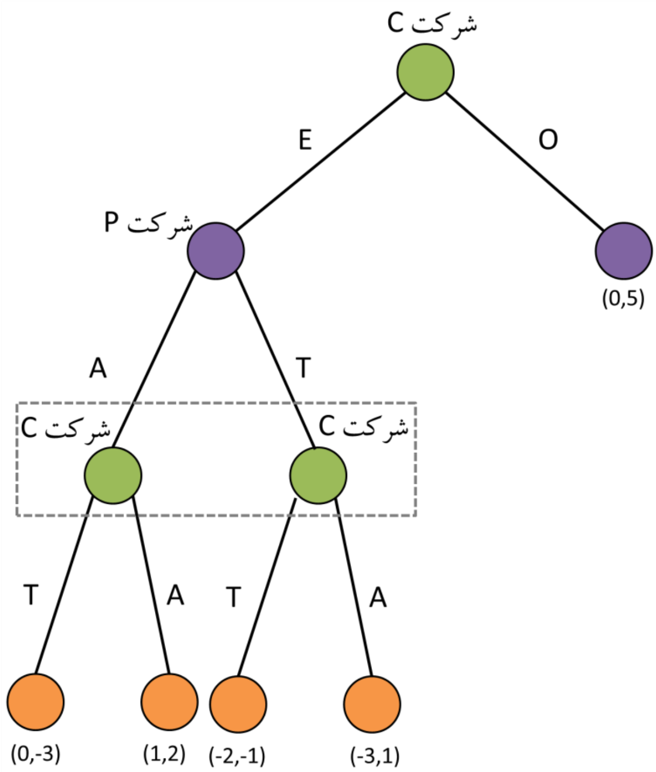
۳- قیمت،*p*، در این بازار با توجه به کل تقاضا *Q* برابر *p=10-Q* است. برای بازی پویا، قیمت *10-5.25=4.75* و برای بازی ایستا، قیمت *10-4.66=5.33* می‌شود. پس **قیمت** در تعادل پویا **کمتر** از قیمت در تعادل ایستا است.

۴- در حالی که قیمت در بازی پویا کمتر از بازی ایستا است، تولید در بازی پویـا بیشـتر اسـت و ایـن اضافه تولید منجر به افزایش کل سود نشده است. در حالت کلـی، تصـمیم گیـری همزمـان باعـث **افزایش کل سود** برای هر دو شرکت شده است ولی اگر بازی پویا بـا شـروع کننـدگی شـرکت ۱ باشد، سود شرکت ۱ از حالت ایستا بیشتر خواهد شد.

تعادل نش در بازی پویا با اطلاعات ناکامل

در بازی های پویا با اطلاعات کامل، **پیشینه** بازی برای هر بازیکن معلوم می باشد و هر بازیکن حرکـت بازیکن قبلی را می داند و لذا می داند که در کدام گـره تصـمیم گیـری قـرار گرفتـه اسـت و لـذا مجموعـه اطلاعاتی بازیکنان به صورت تک عضو می باشند. اگر این فرض را نقض کنید که بازیکن **حرکـت بـازیکن قبلی را نمی داند**، در این صورت بازیکن نخواهد دانست که در کدام گره تصمیم گیری قرار گرفتـه اسـت، لذا مجموعه های اطلاعاتی او به صورت غیر تک عضوی خواهد بود و شامل تمام گـره هـای تصـمیم گیـری می‌شود که بازیکن نمی داند به کدامیک از آن ها رسیده است. در این بخش به روش حل این نـوع از بـازی خواهیم پرداخت.

مثال: فرض کنید یک کارخانه نوشابه سازی به نام P در شهری تنها عرضـه کننـده نوشـابه مـی باشـد. شرکت C درصدد بررسی برای ورود E به این بازار است. اگر شرکت C وارد بازار شـود، بایـد آن هـا بـه طـور همزمان تصمیم بگیرند که آیا روش همکاری ضمنی A با هم، یـا ایـن کـه رقابـت T را در پـیش گیرنـد. در صورت عدم ورود O پیامد او صفر و پیامد بازیکن P برابر ۵ می باشد. فرم گسترده این بازی بـه صـورت زیـر است:



شکل (۲۵) فرم بسط یافته بازی بین شرکت P و C

ترکیب استراتژی شرکت P و شرکت C به صورت زیر است:

$$S_C = \{OA, OT, EA, ET\}$$
$$S_P = \{T, A\}$$
$$S = \{(OA,T),(OA,A),(OT,T),(OT,A),(EA,T),(EA,A),(ET,T),(ET,A)\}$$

پیامد بازیکنان برای هر ترکیب استراتژی در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۷) پیامد بازیکنان C و P

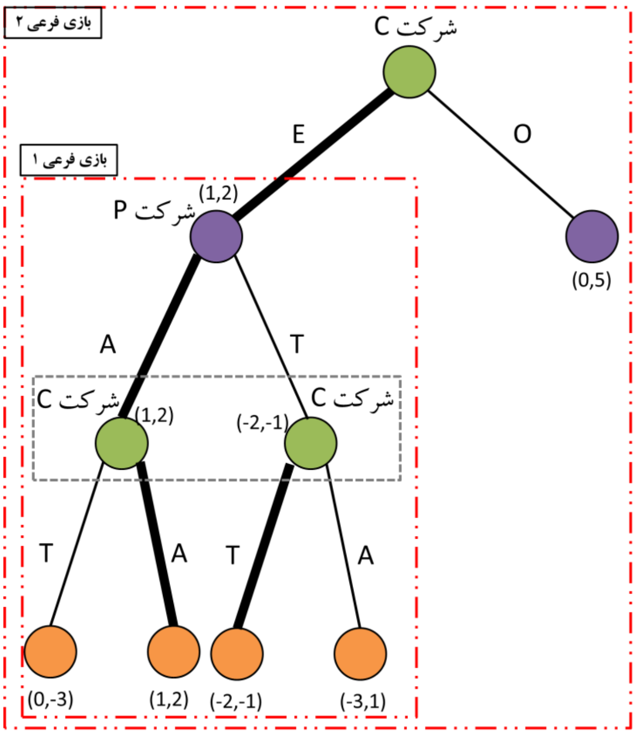
		بازیکن P		
		T	A	
بازیکن C	OA	$\overset{+}{0},\overset{+}{5}$	$0,\overset{+}{5}$	$5=\max\{5,5\}$
	OT	$\overset{+}{0},\overset{+}{5}$	$0,\overset{+}{5}$	$5=\max\{5,5\}$
	EA	-3,1	$\overset{+}{1},\overset{+}{2}$	$2=\max\{1,2\}$
	ET	$-2,\overset{+}{-1}$	0,-3	$-1=\max\{-1,-3\}$
		$0=\max\{0,0,-3,-1\}$	$1=\max\{0,0,1,0\}$	

تعادل های نش براساس جدول فوق در فرم استراتژیک عبارتند از:

$$N(G)=\{(OA,T),(OT,T),(EA,A)\}$$

باید دید که کدامیک از تعادل های نش باورکردنی است. برای این کار بازی های فرعی را تشخیص داد.

این بازی دارای دو بازی فرعی است که در شکل زیر آورده شده است. خود بازی هم بازی فرعی ۲ است.



شکل (۲۶) فرم توسعه یافته بازی

باید دید که کدامیک از تعادل های نش مذکور، با بازی های فرعی مسئله مطابقت دارد. تعادل نـش در بازی فرعی ۱ ،g_1، به صورت زیر است(نیازی به بررسی بازی فرعی ۲ نیست زیرا خود بازی اصلی است):

$$N(g_1)=\{(A,A)\}$$

با مقایسه تعادل $N(G)$ و $N(g_1)$ می توان تعادل های باورکردنی را به صورت زیر معرفی کرد:

$$N=\{(EA,A)\}$$

بازی های ایستا با اطلاعات ناقص[19]

در بخش های قبلی بازی های با اطلاعات کامل را بررسی نمودیم. در این بازی ها، بازیکن تابع برد سایر بازیکنان را می داند و به عبارتی راجع به آن اطلاعات کامل دارد. در این جا **بازی های ایستا با اطلاعـات ناقص** را بررسی می کنیم. در چنین بازی، لااقل یکی از بازیکنان راجع به تابع برد بازیکن دیگـر، نـامطمئن است. موارد بسیاری وجود دارد که بازیکن، برد رقیب یا رقبای خود را به طور کامل نمی توانـد پـیش بینـی نماید. به عنوان مثال در مزایده ها هر خریدار ارزشی را که برای کالای مورد نظر قائل است به طور کامل می داند، ولی ارزشی را که سایر خریداران برای آن کالا قائل هستند نمی داند.

بدیهی است در یک مزایده، خریداران پیشنهادهای خود را در پاکت های مهر و موم شده ارایه می دهند و سپس در یک زمان معین این پاکت ها بازی می شوند و پیشنهادها را اعلام می کنند. لذا یک بازی داریـم که در آن، حرکات بازیکنان به طور همزمان انجام می‌شود ولی بازیکنان برد رقبای خود را نمی دانند. لذا این یک بازی ایستا با اطلاعات ناقص است. بازی های ایستا با اطلاعات ناقص را **بازی های بیزی**[20] نیز می نامند.

دو تولید کننده یا بنگاه داریم که محصول مشابهی را تولید می کننـد. تـابع تقاضـای بـازار بـه صـورت $P(Q)=a-Q$ و $Q=q_1+q_2$ است که q_1 و q_2 به ترتیب مقدار تولید بنگاه ۱ و ۲ را نشان می دهد. فـرض کنیـد تابع هزینه بنگاه اول به صورت زیر است:

[19] Static games of incomplete information
[20] Baysian games

$$C_1 = cq_1$$

از طرف دیگر تابع هزینه بنگاه ۲ به طور کامل مشخص نیست. این بنگاه دو وضعیت متفاوت دارد که طبق آن، با احتمال p با هزینه پایین و با احتمال $1-p$ با هزینه بالا مواجه می‌شود.

تابع هزینه با احتمال p

$$C_H = c_H q_2$$

تابع هزینه با احتمال $1-p$

$$C_L = c_L q_2$$

بدیهی است که $c_H > c_L$ است.

بنگاه ۲ براساس هزینه نهایی خود تصمیم می گیرد چه مقدار تولید نماید. از طرف دیگر، بنگاه ۱ نیز توجه دارد که بنگاه ۲ سطح تولید خود را براساس هزینه نهایی تعیین می کند. اگر هزینه نهایی بنگاه ۲ برابر c_H باشد، وی $q^*_2(c_H)$ را به گونه ای انتخاب می کند که سودش را با توجه به معین بودن سطح تولید بنگاه ۱ حداکثر نماید. سودش بنگاه ۲ در این حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_2(c_H) = ((a - q_1 - q_2) - c_H)q_2$$

همچنین اگر هزینه نهایی بنگاه ۲ برابر c_L باشد، در این صورت $q^*_2(c_L)$ را به گونه ای انتخاب می کند که سودش را با توجه به معین بودن سطح تولید بنگاه ۱، حداکثر نماید. سود بنگاه ۲ در این حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_2(c_L) = ((a - q_1 - q_2) - c_L)q_2$$

حال بنگاه ۱ نیز می داند که هزینه نهایی بنگاه ۲ با احتمال p بالا است و بایستی پیش بینی کند که مقدار انتخابی q_2 برابر با $q^*_2(c_H)$ است و در غیر این صورت برابر با $q^*_2(c_L)$ خواهد بود. بدین ترتیب بنگاه ۱

مقدار q^*_1 را طوری انتخاب می کند که سودش را با توجه به معین بودن سطح تولید بنگاه ۲ حداکثر نماید. در این صورت سود قابل انتظار بنگاه ۱ به صورت زیر بدست می آید:

$$u_1 = p\left[\left(a-q_1-q_2\left(c_H\right)\right)q_1-cq_1\right]+\left(1-p\right)\left[\left(a-q_1-q_2\left(c_L\right)\right)q_1-cq_1\right]$$

که در عبارت بالا، $\left(a-q_1-q_2\left(c_H\right)\right)q_1$ فروش بنگاه ۱ با فرض هزینه نهایی بالا بـرای بنگـاه ۲ و cq_1 هزینه تولید بنگاه ۱ است که تفاضل این دو عدد، $\left(a-q_1-q_2\left(c_H\right)\right)q_1-cq_1$، سود خالص بنگاه ۱ با فـرض هزینه بالای بنگاه ۲ است.

برای حداکثر کردن سود بنگاه ۲ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{\partial u_2\left(c_H\right)}{\partial q_2}=a-q_1-2q_2-c_H=0\rightarrow q_2\left(c_H\right)=\frac{a-q_1-c_H}{2}=f_2\left(c_H,q_1\right) \quad (1)$$
$$\frac{\partial u_2\left(c_L\right)}{\partial q_2}=a-q_1-2q_2-c_L=0\rightarrow q_2\left(c_L\right)=\frac{a-q_1-c_L}{2}=f_2\left(c_L,q_1\right) \quad (2)$$

شرط لازم برای حداکثر شدن سود بنگاه ۱ عبارت است از:

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1}=0\rightarrow q_1=\frac{p\left[a-q_2\left(c_H\right)-c\right]+\left(1-p\right)\left[a-q_2\left(c_L\right)-c\right]}{2}=f_1\left(q_2\left(c_H\right),q_2\left(c_L\right)\right) \quad (3)$$

معادلات (۱)،(۲)، و (۳) بیانگر توابع بهترین واکنش بازیکنان است که با حل همزمـان آن هـا خـواهیم داشت:

$$q_2^*\left(c_H\right)=\frac{a-2c_H+c}{3}+\frac{1-p}{6}\left(c_H-c_L\right)\rightarrow q_2^*\left(c_H\right)>\frac{a-2c_H+c}{3}$$
$$q_2^*\left(c_L\right)=\frac{a-2c_L+c}{3}-\frac{p}{6}\left(c_H-c_L\right)\rightarrow q_2^*\left(c_L\right)<\frac{a-2c_L+c}{3}$$
$$q_1^*=\frac{a-2c+pc_H+\left(1-p\right)c_L}{3}$$

حالا فرض کنید این دو بازیکن **اطلاعات کامل** از هم دارند(بازی ایستا با اطلاعات کامل). در این صورت مقدار تولید بازیکن ۱ و ۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود. مطلوبیت بازیکن ۱ و ۲ به ترتیب برابر u_1 و u_2 است. همچنین هزینه فروش کالای تولید شده توسط بازیکن ۱ و ۲ به ترتیب برابر با c_1 و c_2 است.

$$u_1=(a-q_1-q_2-c_1)q_1 \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial q_1}=a-2q_1-q_2-c_1=0 \rightarrow q_2=a-2q_1-c_1$$

$$u_2=(a-q_1-q_2-c_2)q_2 \rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial q_2}=a-q_1-2q_2-c_2=0 \xrightarrow{q_2=a-2q_1-c_1} q_1=\frac{a-2c_1+c_2}{3}, q_2=\frac{a-2c_2+c_1}{3}$$

از مقایسه نتایج بازی ایستا با اطلاعات کامل و ناقص داریم:

بنگاه ۲ نه فقط مقدار تولیدش را به هزینه نهایی خودش مربوط می کند، بلکه به رفتار بنگاه ۱ نیز توجه می کند. این مشاهده در نتایج بازی با اطلاعات کامل و ناقص روشن است. در حالت اطلاعات ناقص، اگر هزینه بنگاه ۲ بالا باشد تولید در این حالت مقدار تولید ($q_2^*(c_H)$) نسبت به حالت اطلاعات کامل که مقدار تولید $\frac{a-2c_H+c}{3}(c_2=c_H)$ است، **بیشتر** خواهد بود: $q_2^*(c_H)>\frac{a-2c_H+c}{3}(c_2=c_H)$ زیرا بنگاه ۱ در مورد بالا بودن هزینه بنگاه ۲ نامطمئن است و احتمال را می دهد که بنگاه ۲ هزینه پایین را انتخاب کند. به طور مشابه، در حالت اطلاعات ناقص، اگر هزینه بنگاه ۲ کم باشد تولید در این حالت مقدار تولید ($q_2^*(c_L)$) نسبت به حالت اطلاعات کامل که مقدار تولید $\frac{a-2c_L+c}{3}(c_2=c_L)$ است، **کمتر** خواهد بود: $q_2^*(c_L)<\frac{a-2c_L+c}{3}(c_2=c_L)$. زیرا بنگاه ۱ در مورد پایین بودن هزینه بنگاه ۲ نامطمئن است و این احتمال را می دهد که بنگاه ۲ هزینه بالا را انتخاب کند.

یک بازی **ایستا بیزی** یا یک بازی **ایستا با اطلاعات ناقص** که دارای n بازیکن می باشد، شامل مجموعه اعمال بازیکنان $(A_1,A_2,\dots,A_n)$، مجموعه نوع بازیکنان $(T_1,T_2,\dots,T_n)$ که مربوطه انواع ممکن بازیکنان است، حدس های (احتمال های) مربوط به هر یک از نوع ها $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ و توابع برد (مطلوبیت یا عایدی) آن ها $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ است. نوع بازیکن i همان t_i برای خودش معلوم و شناخته شده است که تابع برد بازیکن i یعنی $u_i(a_1,\dots,a_n;t_i)$ را مشخص می کند. حدس بازیکن i یعنی $P_i(t_{-i}|t_i)$ بیانگر حدس ها (احتمال

ها) بازیکن i راجع به نوع سایر بازیکنان $-i$ است.بدین ترتیب این بازی به صورت $G=\{A_1,...,A_n;T_1,...,T_n;p_1,...,p_n;u_1,...,u_n\}$ نشان داده می‌شود.

تعادل نش-بیز: در بازی ایستا بیزی یا ایستا با اطلاعات ناقص، برش استراتژی $(s^*_1,..., s^*_n)$ یک تعادل نش-بیز است اگر برای هر بازیکن i و برای هر نوع بازیکن i، استراتژی $s^*_i(t_i)$ از مسئله زیر بدست می آید:

$$\underset{a_i \in A_i}{Max} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(s_1^*(t_1),...,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}^*(t_{i+1}),...,s_n^*(t_n);t\right)P_i\left(t_{-i}\,|t_i\right)$$

عبارت فوق بیان می کند که بازیکن i با توجه به این که نوع خودش را می داند عمل a_i را به گونه از مجموعه A_i انتخاب می کند که با توجه به حدس های او راجع به نوع سایر بازیکنان و استراتژی های بهینه آن ها، برد انتظاری خود را حداکثر نماید.

مفهوم استراتژی و تعادل نش-بیز با جزییات بیشتری در مثال های زیر بررسی شده است.

مثال: در اینجا وضعیت دو بنگاه R و C را بررسی می کنیم. بنگاه C در حال حاضر در بازار فعالیت دارد و یک بنگاه انحصاری است، اما بنگاه R یک بنگاه بالقوه است که تصمیم دارد وارد این بازار شود. لذا بنگاه C در حال تصمیم گیری راجع به ورود (s_{R1}) و عدم ورود (s_{R2}) به بازار است که به این ترتیب فضای استراتژی او به صورت $S_R=\{s_{R1},s_{R2}\}$ می باشد. بنگاه C نیز که در بازار فعال است می خواهد راجع به گسترش فعالیت (s_{C1}) و عدم گسترش فعالیت (s_{C2}) تصمیم گیری کند که در اینجا فضای استراتژی او به صورت $S_C=\{s_{C1},s_{C2}\}$ می باشد. وضعیت این دو بنگاه در جدول زیر توصیف شده است:

جدول (۸)

		بنگاه C	
		s_{C1}(گسترش فعالیت)	s_{C2}(عدم گسترش فعالیت)
بنگاه R	s_{R1}(ورود)	-1,1	1,1
	s_{R2}(عدم ورود)	0,2	0,3

همان طور که اشاره شده در اینجا هر **استراتژی** بیانگر یک **عمل بازیکن** است، زیرا بازی به صورت ایستا است. عمل های بازیکن R را با a_{R1} و a_{R2} عمل ها بازیکن C را با a_{C1} و a_{C2} نشان می دهیم.

جدول (۹)

		بنگاه C	
		a_{C1}(گسترش فعالیت)	a_{C2}(عدم گسترش فعالیت)
بنگاه R	a_{R1}(ورود)	-1,1	1,1
	a_{R2}(عدم ورود)	0,2	0,3

تعادل این بازی به صورت (a_{R1},a_{C2}) است، یعنی بنگاه R وارد بازار می‌شود و بنگاه C فعالیتش را گسترش نمی دهد. در این حالت، بردها به صورت $(1,1)$ می باشد. مجددا این نکته را یادآوری می کنیم که تفاوتی بین استراتژی عمل بازیکن وجود ندارد و در واقع هر استراتژی بیانگر یک عمل است و یک رابطه یک به یک بین عمل و استراتژی برقرار است.

حال فرض کنید که بنگاه R فقط یک نوع دارد که آن را **نوع عادی** یا معمولی می نامیم و با t_R نشان می دهیم. در این جا توزیع احتمال نوع بازیکن R از نظر بنگاه C (یعنی حدس بنگاه C در مورد نوع بنگاه R با توجه به این که بنگاه C نوع خود را می داند به صورت زیر است:

t_R	t_R
$P(t_R\|t_C)$	1

این توزیع بدان معنا است که بنگاه C دقیقا نوع بنگاه R را می داند زیرا بنگاه R **فقط یک نوع** دارد. اما بنگاه C دو نوع دارد که بستگی به کم یا زیاد بودن هزینه گسترش فعالیت دارد. اگر هزینه گسترش فعالیت، **زیاد** باشد بنگاه C از نوع بنگاهی است که با هزینه **بالا** مواجه می‌شود و اگر هزینه گسترش فعالیت **کم** باشد، از نوع بنگاهی است که با هزینه **پایین** مواجه می‌شود. بدین ترتیب فضای نوع برای بنگاه C به صورت $T_C=\{t_{CL},t_{CH}\}$ است که t_{CL} و t_{CH} به ترتیب هزینه پایین و هزینه بالا را نشان می دهد. توزیع احتمال t_C از نظر

بنگاه R (یعنی حدس بنگاه R در مورد نوع بنگاه C) با توجه به اینکه بنگاه R نوع خودش (یعنی t_R) را می داند، عبارت است از:

t_R	t_{CL}	t_{CH}
$P(t_R \mid t_C)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

این توزیع بدان معنا است که بنگاه R حدس می زند که بنگاه C با احتمال $2/3$ با هزینه **پایین** و با احتمال $1/3$ با هزینه **بالا** مواجه می‌شود.

حال برای ادامه بحث و تعیین بردهای بازی تصور کنید که بنگاه C می خواهد راجع به گسترش فعالیتش تصمیم گیری کند. ممکن است هزینه گسترش فعالیت، **زیاد** یا **کم** باشد که وی می تواند با تحقیق و تجربه دریابد که با کدام حالت مواجه خواهد شد. از طرف دیگر بنگاه R نیز می تواند به تولید این محصول بپردازد. وی می داند که بنگاه C یک بنگاه کاملا انحصاری است که تصمیم دارد فعالیتش را گسترش دهد (البته شاید هم ندهد). او همچنین می داند که هزینه های گسترش بنگاه C ممکن است **زیاد** یا **کم** باشد، اما به طور دقیق نوع آن را نمی داند. بردهای این بازی در جدول زیر آمده است.

جدول (۱۰)

		بنگاه C			
		هزینه گسترش کم باشد (نوع t_{CL})		هزینه گسترش زیاد باشد (نوع t_{CH})	
		a_{C1} (گسترش)	a_{C2} (عدم گسترش)	a_{C1} (گسترش)	a_{C2} (عدم گسترش)
بنگاه R	a_{R1} (ورود)	-1,2	1,1	-1,-1	1,1
	a_{R2} (عدم ورود)	0,4	0,3	0,0	0,3

در اینجا بنگاه C هزینه گسترش (همان نوع خودش) و لذا بردهای خودش را می دهد. بنابراین بردهای او از یک طرف بستگی به هزینه گسترش (همان نوع خودش t_{CL} و t_{CH}) و از طرف دیگر بستگی به **ورود** یا

عدم ورود بنگاه R دارد. جدول بالا نشان می دهد که بردهای بنگاه R فقط بستگی به استراتژی های او، یعنی **ورود** و **عدم ورود** دارد.

در این بازی، بنگاه R و C به طور **همزمان** تصمیم گیری می کنند که بیانگر یک بازی **ایستا** است. از طرف دیگر آن را یک بازی بیزی می گوییم، بدین معنی که بنگاه R بایستی حدس های خودش را مورد احتمالات مربوط به هزینه بنگاه C را قبل از بازی محاسبه کند. بدین ترتیب مشخصه های این بازی ایستا به صورت زیر می‌شود:

الف) تعداد بازیکن ها که شامل دو بازیکن R و C است.

ب)مجموعه اعمال هر بازیکن که هر عمل بیانگر این است که بازیکن وقتی نوعش مشخص شد چه عملی انجام می دهد. برای مثال بنگاه C اگر هزینه گسترش فعالیتش کم باشد (نوع)، بایستی فعالیت خود را گسترش دهد (عمل) و اگر هزینه گسترش زیاد باشد (نوع)، نباید فعالیتش را گسترش دهد (عمل).

ج)مجموعه انواع هر بازیکن که در اینجا بازیکن C دارای دو نوع، یعنی هزینه زیاد و هزینه کم، و بازیکن R دارای یک نوع معمولی است. بنابراین در اینجا ترکیب نوع بازیکنان (بنگاه R و بنگاه C) به صورت (t_R,t_{CL}) و (t_R,t_{CH}) است و در اینجا دو ترکیب داریم.

د) مجموعه احتمالاتی که به هر ترکیبی از نوع بازیکنان نسبت داده می‌شود. به عنوان مثال فرض کنید که ترکیب (t_R,t_{CL}) دارای احتمال $2/3$ و ترکیب (t_R,t_{CH}) دارای احتمال $1/3$ است.

ه) بردهای حاصل از ترکیب حرکت ها (برای بنگاه C: گسترش یا عدم گسترش و برای بنگاه R: ورود یا عدم ورود) و ترکیب نوع بازیکنان (برای بنگاه C: هزینه گسترش زیاد یا کم و برای بنگاه R: معمولی) مشخص شود. به عنوان مثال، برد بنگاه R وقتی وارد بازار می‌شود ولی بنگاه C فعالیتش را گسترش ندهد در عین حال نوع بنگاه R و C به ترتیب از نوع معمولی و هزینه کم، باشد برابر یک است که از جدول (۱۰) قابل استخراج است.

استراتژی خالص هر بازیکن بیانگر حرکت بازیکن است که به صورت تابعی از نوع بازیکن بیان می‌شود. استراتژی های بنگاه R شامل ورود یا عدم ورود است. هر کدام تابعی از نوع بازیکن R (در این جا یک نوع داریم یا t_R) است.

$$s_R(t_R)=\begin{cases} s_{R1}(t_R)=s_{R1}=a_{R1} \\ s_{R2}(t_R)=s_{R2}=a_{R2} \end{cases}$$

اما استراتژی بنگاه C، یکی گسترش فعالیت و دیگری عدم گسترش فعالیت است که تابعی از نوع بازیکن است. بنابراین استراتژی های خالص بنگاهC عبارتند از:

$$s_C(t_C)=\begin{cases} \{s_{C1}(t_{CL}),s_{C1}(t_{CH})\}=\{\text{گسترش با هزینه زیاد، گسترش با هزینه کم}\} \\ \{s_{C1}(t_{CL}),s_{C2}(t_{CH})\}=\{\text{عدم گسترش با هزینه زیاد، گسترش با هزینه کم}\} \\ \{s_{C2}(t_{CL}),s_{C1}(t_{CH})\}=\{\text{گسترش با هزینه زیاد، عدم گسترش با هزینه کم}\} \\ \{s_{C2}(t_{CL}),s_{C2}(t_{CH})\}=\{\text{عدم گسترش با هزینه زیاد، عدم گسترش با هزینه کم}\} \end{cases}$$

در بالا، اندیس های ۱ و ۲ به ترتیب بیانگر گسترش و عدم گسترش و اندیس های L و H به ترتیب بیانگر نوع بنگاه، یعنی هزینه کم و هزینه زیاد است. بدین ترتیب بنگاه C دارای چهار استراتژی خالص است. طبق بحث فوق یک **بازی ایستای دو نفره با اطلاعات کامل** داریم که در آن بنگاه R دو استراتژی خالص و بنگاه C چهار استراتژی خالص دارد. این بازی و بردهای آن در جدول زیر نشان داده شده است:

		بنگاه C			
		$\{s_{C1}(t_{CL}),s_{C1}(t_{CH})\}$	$\{s_{C1}(t_{CL}),s_{C2}(t_{CH})\}$	$\{s_{C2}(t_{CL}),s_{C1}(t_{CH})\}$	$\{s_{C2}(t_{CL}),s_{C2}(t_{CH})\}$
بنگاه R	s_{R1}	(-1),(2,-1)	$(-1/3),(2,1)^{+}$	$(1/3)^{+}$,(1,-1)	$(1)^{+}$,(1,1)
	s_{R2}	$(0)^{+}$,(4,0)	$(0)^{+},(4,3)^{+}$	(0),(3,0)	(0),(3,3)

از جدول فوق روشن است که **تعادل نش-بیز** به صورت $(s_{R2},\{s_{C1}(t_{CL}),s_{C2}(t_{CH})\})$ خواهد بود.

به بررسی بردهای جدول فوق می پردازیم. اگر بنگاه R استراتژی s_{R1} و بنگاه C نیز استراتژی $\{s_{C1}(t_{CL}),s_{C1}(t_{CH})\}$ را انتخاب می کند. در این صورت برد R برابر ۱- و برد بنگاه C برابر ۲ می‌شود. که محاسبات آن در زیر آمده است.

		بنگاه C			
		هزینه گسترش کم باشد (نوع t_{CL})		هزینه گسترش زیاد باشد (نوع t_{CH})	
		a_{C1} (گسترش)	a_{C2} (عدم گسترش)	a_{C1} (گسترش)	a_{C2} (عدم گسترش)
بنگاه R	a_{R1} (ورود)	-1,2	1,1	-1,-1	1,1
	a_{R2} (عدم ورود)	0,4	0,3	0,0	0,3

$$s_{R1} \rightarrow P(t_{CL} \mid s_{C1})(-1) + P(t_{CH} \mid s_{C1})(-1) = \frac{2}{3}\times(-1) + \frac{1}{3}\times(-1) = -1$$

که در آن $P(t_{CL}|s_{C1})$ و $P(t_{CH}|s_{C1})$ احتمال این است که اگر قرار بر گسترش بنگاه C باشد، هزینه گسترش کم و زیاد باشد.

اگر بنگاه R استراتژی s_{R1} و از بنگاه C استراتژی $\{s_{C1}(t_{CL}),s_{C2}(t_{CH})\}$ باشد، برد بنگاه C برابر $(2,1)$ و برد بنگاه R به صورت زیر محاسبه می‌شود.

		بنگاه C			
		هزینه گسترش کم باشد (نوع t_{CL})		هزینه گسترش زیاد باشد (نوع t_{CH})	
		a_{C1} (گسترش)	a_{C2} (عدم گسترش)	a_{C1} (گسترش)	a_{C2} (عدم گسترش)
بنگاه R	a_{R1} (ورود)	-1,2	1,1	-1,-1	1,1
	a_{R2} (عدم ورود)	0,4	0,3	0,0	0,3

$$s_{R1} \rightarrow P(t_{CL} \mid s_{C1})(-1) + P(t_{CH} \mid s_{C2})(1) = \frac{2}{3}\times(-1) + \frac{1}{3}\times(1) = -\frac{1}{3}$$

که در آن $P(t_{CL}|s_{C1})$ و $P(t_{CH}|s_{C2})$ احتمال این است که اگر قرار بر گسترش بنگاه C باشد، هزینه گسترش کم باشد و اگر قرار بر عدم گسترش بنگاه C باشد، هزینه گسترش زیاد باشد. 1- بیانگر برد بازیکن R در استراتژی s_{R2} در حالتی که بنگاه C گسترش را انتخاب کرده و هزینه گسترش کم می‌شود.

بازی های پویا با اطلاعات ناقص

در بخش قبلی بازی های ایستا با اطلاعات ناقص بررسی شد. در این بازی ها دیدیم که بازیکن با نااطمینانی مواجه است. این نااطمینانی بدین صورت تبیین شد که یک بازیکن نوع بازیکن دیگر را نمی داند. این وضعیت مشابه این است که گویی یک بازیکن نقش های متفاوتی را بازی می کند که به هر نقش او نوع می گوییم.

بازی پویا با اطلاعات کامل دارای **دو نوع** است. در بازی در بازی پویا با اطلاعات کافی، حرکات بازیکن ها کاملا به صورت متوالی است و هیچ حرکت همزمانی را مشاهده نمی کنیم. زیرا یک بازیکن پس از **مشاهده** حرکت رقبای خود اقدام به حرکت می کند. اما در بازی پویا با اطلاعات ناکافی، بازیکنان گویی با حرکات همزمان نیز مواجه هستند. بدین معنا که بازیکن ممکن است پیامدهای بازی را بداند، اما در زمان انجام حرکت خود دقیقا حرکات گذشته سایر بازیکنان را **نمی داند**.

در بازی اطلاعات **ناقص**، زمانی که بازیکن در یک گره تصمیم قرار دارد و می خواهد حرکت خود را انجام دهد، وی نسبت به بازیکنی که قبل از او حرکت کرده است، اطلاعات کمتری دارد. توجه شود که در بازی اطلاعات **ناکافی**، بازیکن به سادگی از اعمالی که توسط بازیکنان دیگر اتخاذ می‌شود آگاه نیستند. به هر حال آن ها می دانند که بازیکنان دیگر چه کسانی هستند، چه استراتژی های ممکن دارند و بردهای آنان چیست. از این رو اطلاعات درباره بازیکنان دیگر، ناکافی اما کامل است. ولی در یک بازی اطلاعات ناقص، بازیکنان ممکن است برخی اطلاعات راجع به بازیکنان دیگر را ندانند. به عنوان مثال نوع بازیکنان، استراتژی آن ها و بردهای آنان را به طور دقیق و منحصر به فرد نمی دانند.

به منظور بررسی تعادل در بازی های پویا با اطلاعات ناقص، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال: فرد R و C را در نظر بگیرید که R زن و C مرد است. فرض کنید که C به R پیشنهاد ازدواج می دهد. R می تواند این پیشنهاد را قبول یا رد کند، اما مشکل اینجا است که R راجع به معتاد بودن یا نبودن C مطمئن نیست. بدیهی است که C نوع خود یعنی معتاد بودن یا نبودن را می داند، ولی برای R ناشناخته است. ابتدا محیط نوع C را برای خودش مشخص می کند و سپس وی با دانستن نوع خود، به R پیشنهاد ازدواج می دهد. در مرحله بعد،R به پیشنهاد C واکنش نشان می دهد. حال تصور کنید که اطلاعاتی در دسترس عموم است که نشان می دهد ۱۰ درصد مردان، معتاد هستند. این در واقع توزیع احتمال پیشین[۲۱] راجع به اعتیاد X است که $X=0$ به معنای عدم اعتیاد و $X=1$ به معنای اعتیاد است و $P(X=0)=0.9$ و $P(X=1)=0.1$. بدین ترتیب حدس پیشین R این است که C با احتمال ۰.۱ معتاد است.

اما برای حل مشکل این دو نفر، گفته می‌شود آزمایشی وجود دارد که می تواند اعتیاد مردانی که واقعا معتاد هستند با احتمال ۹۵ درصد مشخص نماید. به عبارت دیگر در بین معتادان، این آزمایش ۹۵ درصد اوقات جواب مثبت می دهد، اما در بین کسانی که معتاد نیستند نیز ۱۰ دردص اوقات جواب مثبت می دهد. این بدان معنا است که در تشخیص اعتیاد معتادان، ۵ درصد خطا و در تشخیص عدم اعتیاد افراد سالم ۱۰ درصد خطا دارد:

$$P\left(T^+|X\right)=0.95 \quad P\left(T^+|\bar{X}\right)=0.1$$

T^+ نشان دهنده حادثه ای است که طبق آن، نتیجه آزمایش مثبت باشد. X و $\bar{X}$ نیز به ترتیب اعتیاد و عدم اعتیاد را نشان می دهد. براساس احتمالات فوق می توان احتمالات زیر را بدست آورد:

$$P\left(T^-|X\right)=1-P\left(T^+|X\right)=0.05$$
$$P\left(T^-|\bar{X}\right)=1-P\left(T^+|\bar{X}\right)=0.9$$

T^- بیانگر این است که نتیجه آزمایش، منفی باشد.R می تواند از این ارقام اطلاعات بهتری را استخراج نماید. از قواعد احتمال می دانیم که احتمال مشترک دو حادثه T^+ و X عبارت است از:

[21] Prior probability distribution

$$P\left(T^{+}\cap X\right)=P\left(T^{+}|X\right)P\left(X\right)=0.95\times 0.1=0.095$$

این احتمال بدان معنا است که فردی که از بین جمعیت انتخاب می‌شود(مانند فرد C)، احتمال این کـه معتاد باشد و در عین حال نتیجه آزمایش او نیز مثبت باشد، فقط ۹.۵ درصد است. سایر احتمالات مشــترک به صورت زیر می‌شود:

$$P\left(T^{-}\cap X\right)=P\left(T^{-}|X\right)P\left(X\right)=0.05\times 0.1=0.005$$
$$P\left(T^{+}\cap \bar{X}\right)=P\left(T^{+}|\bar{X}\right)P\left(\bar{X}\right)=0.1\times 0.9=0.09$$
$$P\left(T^{-}\cap \bar{X}\right)=P\left(T^{-}|\bar{X}\right)P\left(\bar{X}\right)=0.9\times 0.9=0.81$$

اما R علاقه مند است تا ترتیب حوادث را تغییر دهد. او می خواهد بداند احتمال معتاد بودن C با معین بودن نتیجه آزمایش چقدر است. بدین معنا که فرض کنید C آزمایش داده است و نتیجـه آن منفـی اسـت، حال چقدر احتمال دارد که واقعا معتاد نباشد:

$$P\left(\bar{X}|T^{-}\right)=\frac{P\left(\bar{X}\cap T^{-}\right)}{P\left(T^{-}\right)}=\frac{P\left(T^{-}|\bar{X}\right)P\left(\bar{X}\right)}{P\left(T^{-}\right)}=\frac{0.9\times 0.9}{0.815}=0.99$$

توجه شود که $P(T^{-})$ را به صورت زیر می توان بدست آورد:

$$P(T^{-})=P(T^{-}|\bar{X})P(\bar{X})+P(T^{-}|X)P(X)=0.9\times 0.9+0.05\times 0.1=0.815$$

حال تصور کنید که نتیجه آزمایش، مثبت بوده است و با توجه به خطایی که در این آزمایش وجود دارد می خواهیم ببینیم که چقدر احتمال دارد که C معتاد نباشد:

$$P\left(\bar{X}|T^{+}\right)=\frac{P\left(\bar{X}\cap T^{+}\right)}{P\left(T^{+}\right)}=\frac{0.09}{0.185}=0.48$$

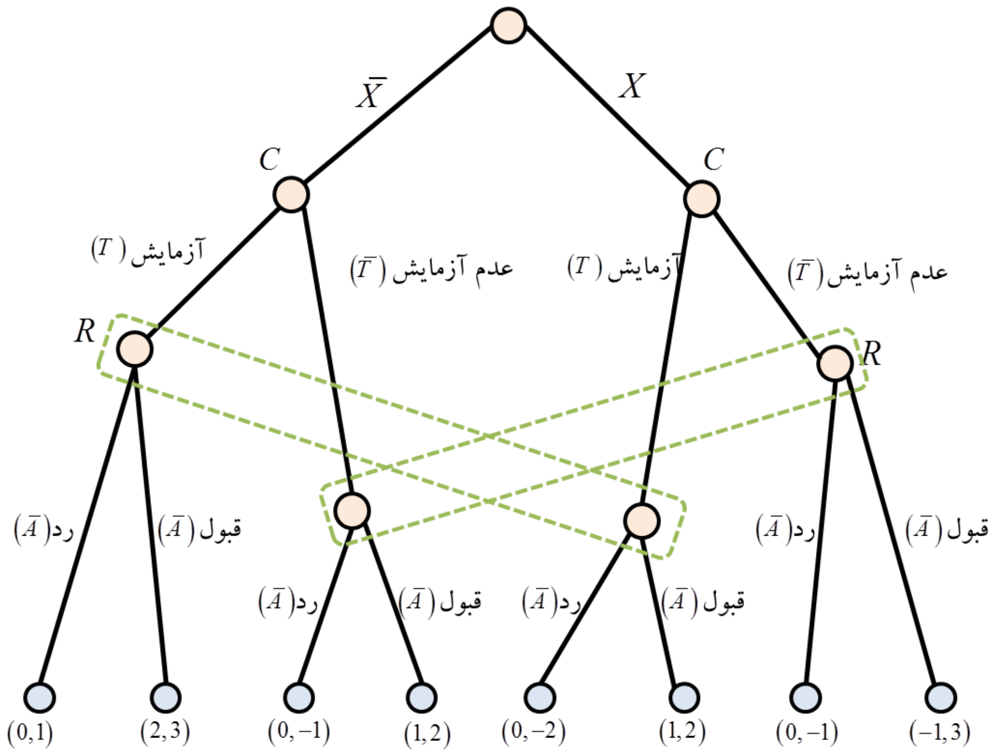
با وجود مثبت بودن آزمایش، هنوز ۴۸ درصد احتمال دارد که C معتاد نباشد. طبق احتمالات پیشین با وجود عدم اعتیاد ، احتمال این که فرد C نتیجه آزمایش وی مثبت شود، برابر احتمال ۱۰ درصـد اسـت کـه همان خطای آزمایش است.

برای حل این بازی ابتدا آن را به صورت زیر زمان بندی می کنیم:

۱- C دو نوع دارد که یا معتاد است (X) و یا معتاد نیست($\bar{X}$).

۲- C نوع خودش را می داند ولی R نوع C را نمی داند. اما R می داند یک آزمایشی وجود دارد که نوع C (یعنی وضعیت اعتیاد او) را با دقت نسبتا بالایی مشخص می کند.

۳- C به R پیشنهاد ازدواج می دهد. با توجه به نگرانی که R در مورد آینده خود دارد و با توجه به این که نوع C را نمی داند،R از C می خواهد تا قبل از موافقت او یا R، ازمایش عدم اعتیاد را انجام دهد. با توجه به شرط R (یعنی انجام آزمایش)، C باید تصمیم بگیرید که آزمایش را انجام دهد یا نه. حال بعد از این که تصمیم گرفت که آزمایش را انجام دهد یا نه، R باید راجع به پیشنهاد C تصمیم بگیرید. در جدول زیر، بردها به صورت (برد C، برد R) نشان داده می‌شود که مولفه اول برد بازیکن C و مولفه دوم برد بازیکن R است.



شکل (۲۷)

اگر R پیشنهاد C را رد کند برد R صفر است و ریسک هم نکرده است. اگر C معتاد باشد و انجام آزمایش را رد کند، ولی R پیشنهاد C را قبول کند، در این صورت برد C و R به ترتیب ۳ و ۱- است، زیرا R خود را در معرض یک ریسک بزرگ قرارداده است. همچنین اگر C معتاد باشد و انجام آزمایش را قبـول کنـد و R نیـز پیشنهاد را بپذیرد در این صورت برد C و R به ترتیب ۲ و ۱ است، زیرا R تا حدودی از رفتار ریسکی اجتناب کرده است. تمامی نتایج ممکن در جدول زیر نشان داده شده است:

جدول (۱۱)

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$	آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد$(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

فرم نرمال یا استراتژیک این بازی در جدول زیر ترسیم شده است.

جدول (۱۲)

		C			
		$C_1=\{T_X,T_{\bar{X}}\}$	$C_2=\{T_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}$	$C_3=\{\bar{T}_X,T_{\bar{X}}\}$	$C_4=\{\bar{T}_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}$
R	$R_1=\{A_T,A_{\bar{T}}\}$	(1.9),(2,3)	(1),(2,2)	(1.7),(3,3)	(0.9),(3,-1)
	$R_2=\{A_T,\bar{A}_{\bar{T}}\}$	(1.9),(2,1)	(0.1),(2,-1)	(1.8),(3,1)	(0),(3,-1)
	$R_3=\{\bar{A}_T,A_{\bar{T}}\}$	(0),(-2,3)	(0.9),(-2,2)	(-0.1),(-1,3)	(0.8),(-1,2)
	$R_4=\{\bar{A}_T,\bar{A}_{\bar{T}}\}$	(0),(-2,1)	(0),(-2,-1)	(0),(-1,1)	(0),(-1,-1)

استراتژی های C بیانگر این است که به ازای هر نوع خودش چه عملی را انتخاب کند. به عنوان مثال در ستون اول استراتژی C_1 یا $\left(T_X, T_{\bar{X}}\right)$ نشان می دهد که T_X به معنی قبول انجام آزمایش با اینکه می داند معتاد است و $T_{\bar{X}}$ به معنی قبول انجام آزمایش با این که می داند معتاد نیست.

هر یک از استراتژی های R نیز دو حرکت دارد. اولی مطابق با حرکت او در زمانی است که C انجام آزمایش را قبول کند و دومی مطابق با حرکت او در زمانی است که C انجام آزمایش را رد نماید. به عنوان مثال در استراتژی $\left(A_T, A_{\bar{T}}\right)$، A_T به معنای قبول پیشنهاد توسط R در واکنش به قبول انجام آزمایش از سوی C است و $A_{\bar{T}}$ به معنای قبول پیشنهاد توسط R در واکنش به عدم قبول انجام آزمایش از سوی C است. حال به بررسی نحوه محاسبه جدول (۱۲) می پردازیم.

استراتژی R_1 برای بازیکن R و استراتژی C_1 برای بازیکن C را در نظر بگیرد. این استراتژی ها به این معنا است که بازیکن R پیشنهاد بازیکن C را در هر صورت (قبول یا رد انجام آزمایش) می پذیرد. حالا اگر بازیکن C معتاد باشد (X) انجام آزمایش را می پذیرد و در صورتیکه معتاد نباشد($\bar{X}$) انجام آزمایش را می پذیرد. به عبارت دیگر در هر صورت انجام آزمایش را می پذیرد. حالا به محاسبه برد بازیکن R می پردازیم. برد بازیکن R بسته به معتاد بودن یا نبودن بازیکن C دارد که بازیکن R از آن مطلع نیست. از محاسبات قبلی داریم که احتمال معتاد بودن یک فرد برابر ۰.۱ و عدم اعتیاد یک فرد برابر ۰.۹ است. از این اعداد برای محاسبه برد بازیکن R استفاده می کنیم. اگر بازیکن C معتاد باشد(که احتمال آن برابر ۰.۱ است)، این بازیکن با توجه استراتژی C_1، انجام آزمایش را می پذیرد و با توجه به استراتژی R_1، بازیکن R پیشنهاد بازیکن C را می پذیرد که در این صورت برد وی برابر ۱ می‌شود. حالا اگر بازیکن C معتاد نباشد(که احتمال آن برابر ۰.۹ است)، این بازیکن با توجه استراتژی C_1، انجام آزمایش را می پذیرد و با توجه به استراتژی R_1، بازیکن R پیشنهاد بازیکن C را می پذیرد که در این صورت برد وی برابر ۲ می‌شود. که در این صورت برد انتظاری بازیکن R برابر ۱.۹ خواهد شد.

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$	آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد$(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_1=\{A_T, A_{\bar{T}}\}, C_1=\{T_X, T_{\bar{X}}\} \rightarrow 1\times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 2\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 1.9$$

محاسبه فوق یک نمونه بود. برای سایر مقادیر جدول (۱۲) محاسبات در ادامه آمده است.

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$	آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد$(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_1=\{A_T, A_{\bar{T}}\}, C_2=\{T_X, \bar{T}_{\bar{X}}\} \rightarrow 1\times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 1\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 1.0$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$	آزمایش(T)	عدم آزمایش$(\bar{T})$
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد$(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_1=\{A_T, A_{\bar{T}}\}, C_3=\{\bar{T}_X, T_{\bar{X}}\} \rightarrow -1\times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 2\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 1.7$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)	آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد($\bar{A}$)	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_1=\{A_T,A_{\bar{T}}\},C_4=\{\bar{T}_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}\rightarrow -1\times\underbrace{0.1}_{P(X)}+1\times\underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=0.8$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)	آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد($\bar{A}$)	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_2=\{A_T,\bar{A}_{\bar{T}}\},C_1=\{T_X,T_{\bar{X}}\}\rightarrow 1\times\underbrace{0.1}_{P(X)}+2\times\underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=1.9$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)	آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد($\bar{A}$)	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_2=\{A_T,\bar{A}_{\bar{T}}\},C_2=\{T_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}\rightarrow 1\times\underbrace{0.1}_{P(X)}+0\times\underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=0.1$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_2=\{A_T, \bar{A}_{\bar{T}}\}, C_3=\{\bar{T}_X, T_{\bar{X}}\} \to 0\times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 2\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 1.8$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_2=\{A_T, \bar{A}_{\bar{T}}\}, C_4=\{\bar{T}_X, \bar{T}_{\bar{X}}\} \to 0\times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 0\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 0$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_3=\{\bar{A}_T, A_{\bar{T}}\}, C_1=\{T_X, T_{\bar{X}}\} \to 0\times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 0\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 0$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)	آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد($\bar{A}$)	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_3=\left\{\bar{A}_T ,A_{\bar{T}}\right\},C_2=\left\{T_X ,\bar{T}_{\bar{X}}\right\}\rightarrow 0\times \underbrace{0.1}_{P(X)}+1\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=0.9$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)	آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد($\bar{A}$)	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_3=\left\{\bar{A}_T ,A_{\bar{T}}\right\},C_3=\left\{\bar{T}_X ,T_{\bar{X}}\right\}\rightarrow -1\times \underbrace{0.1}_{P(X)}+0\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=-0.1$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)	آزمایش(T)	عدم آزمایش($\bar{T}$)
R	قبول(A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد($\bar{A}$)	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_3=\left\{\bar{A}_T ,A_{\bar{T}}\right\},C_4=\left\{\bar{T}_X ,\bar{T}_{\bar{X}}\right\}\rightarrow -1\times \underbrace{0.1}_{P(X)}+1\times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=0.8$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_4 = \{\bar{A}_T, \bar{A}_{\bar{T}}\}, C_1 = \{T_X, T_{\bar{X}}\} \rightarrow 0 \times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 0 \times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 0$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_4 = \{\bar{A}_T, \bar{A}_{\bar{T}}\}, C_2 = \{T_X, \bar{T}_{\bar{X}}\} \rightarrow 0 \times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 0 \times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 0$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_4 = \{\bar{A}_T, \bar{A}_{\bar{T}}\}, C_3 = \{\bar{T}_X, T_{\bar{X}}\} \rightarrow 0 \times \underbrace{0.1}_{P(X)} + 0 \times \underbrace{0.9}_{P(\bar{X})} = 0$$

		C			
		X		$\bar{X}$	
		آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$	آزمایش (T)	عدم آزمایش $(\bar{T})$
R	قبول (A)	(1,2)	(-1,3)	(2,3)	(1,2)
	رد $(\bar{A})$	(0,-2)	(0,-1)	(0,1)	(0,-1)

$$R_4=\{\bar{A}_T,\bar{A}_{\bar{T}}\},C_4=\{\bar{T}_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}\rightarrow 0\times\underbrace{0.1}_{P(X)}+0\times\underbrace{0.9}_{P(\bar{X})}=0$$

با توجه به محاسبات بالا، می توان تعادل نش را به صورت زیر بدست آورد.

		C			
		$C_1=\{T_X,T_{\bar{X}}\}$	$C_2=\{T_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}$	$C_3=\{\bar{T}_X,T_{\bar{X}}\}$	$C_4=\{\bar{T}_X,\bar{T}_{\bar{X}}\}$
R	$R_1=\{A_T,A_{\bar{T}}\}$	(1.9),(2,3)	(1),(2,2)	(1.7),(3,3)	(0.9),(3,-1)
	$R_2=\{A_T,\bar{A}_{\bar{T}}\}$	(1.9),(2,1)	(0.1),(2,-1)	(1.8),(3,1)	(0),(3,-1)
	$R_3=\{\bar{A}_T,A_{\bar{T}}\}$	(0),(-2,3)	(0.9),(-2,2)	(-0.1),(-1,3)	(0.8),(-1,2)
	$R_4=\{\bar{A}_T,\bar{A}_{\bar{T}}\}$	(0),(-2,1)	(0),(-2,-1)	(0),(-1,1)	(0),(-1,-1)

طبق جدول فوقهٔ استراتژی بازیکن *C* برابر *C*₃ و استراتژی بازیکن *R* برابر *R*₂ است. یعنی بازیکن هـای *R* و *C* استراتژی های خود را به صورت زیر اتخاذ می کنند:

استراتژی بازیکن *C*: عدم انجام آزمایش اگر معتاد بود و انجام آزمایش اگر معتاد نبود.

استراتژِ بازیکن *R*: اگر بازیکن *C* آزمایش را بپذیرد، پیشنهاد ازدواج را قبول کند و اگر بازیکن *C* آزمایش را نپذیرد، پیشنهاد ازدواج را رد کند.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی *www.behinehyab.com* مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**