درس ۴: برنامه‌ریزی خطی پارامتری

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت رویه ای است که بعد از به دست آوردن جواب بهینه به اجرا در می آید. تحلیل حساسیت تعیین کننده میزان حساسیت جواب بهینه در مقابل تغییرات معین در مدل اصلی است.

همان طور که قبلا گفته شده، یکی از فرضیات برنامه ریزی خطی این است که پارامترهای مدل شامل a_{ij} و c_j و b_i مقادیر معین و قطعی هستند. اما می دانیم مقدار هر پارامتری که در مدل به کار می رود صرفا بر مبنای مفروضات و پیش بینی هایی برآورد می شود. این برآوردها بر پایه اطلاعاتی انجام می شود که معمولا ناقص اند و گاهی اساسا وجود ندارند. از این رو، پارامترهایی که ابتدا در فرموله کردن مدل وارد می شوند فقط در حد یک تخمین تجربی و حتی سرانگشتی به شمار می ایند و گاهی ممکن است که افراد برای حفظ منافع خود، مقدار پارامترها را کمتر یا بیشتر از مقدار واقعی ان ها برآورد کرده باشند. بنابراین، مدیر مجرب و کادر کارآزموده تحقیق در عملیات همواره با شک و تردید به نتایج نگاه می کند. حتی اغلب به این نتایج به عنوان نقطه شروعی برای تحلیل همه جانبه نگاه می کند. جواب "بهینه" صرفا در رابطه با مدل معینی که برای ارایه مسئله واقعی به کار رفته بهینه است. چنین جوابی تنها در صورتی می تواند راهنمای مطمئنی برای تصمیم گیری باشد که علی رغم تغییرات مدل، همچنان به عنوان یک جواب خوب باقی بماند.

به دلایل فوق است که تحلیل حساسیت اهمیت پیدا می کند. تغییراتی که معمولا در مدل برنامه ریزی خطی مطالعه می شوند شامل موارد زیر است:

۱)تغییرات در اعداد سمت راست

۲)تغییرات در ضرایب تابع هدف

۳)اضافه کردن محدودیت یا محدودیت جدید

به طور کلی، نتیجه این تغییرات یکی از سه وضعیت زیر است:

۱)جواب بهینه بدون تغییر باقی بماند، یعنی متغیرهای اساسی و مقادیرشان اصلا تغییر نکند.

۲) متغیرهای اساسی عوض نشوند ولی مقادیرشان تغییر کنند.

۳) جواب اساسی کاملا تغییر کند.

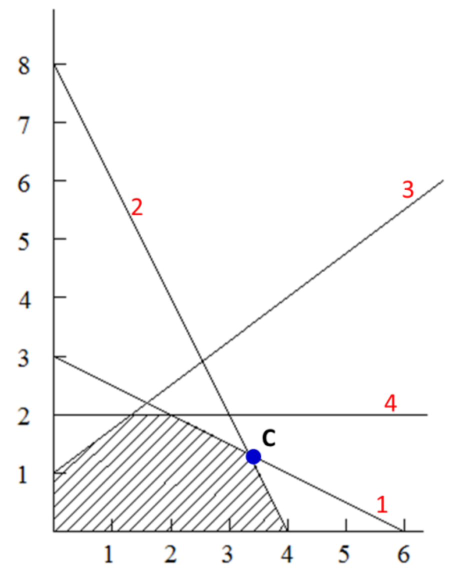
حالت اول عدم حساسیت جواب بهینه نسبت به تغییرات مدل و حالت سوم بیشتر حساسیت را نشان می دهد.

تحلیل حساسیت اعداد سمت راست

هدف در تحلیل حساسیت اعداد سمت راست، تعیین دامنه تغییرات برای عدد سمت راست یک محدودیت مشخص است که در صورت تغییر در آن دامنه، جدول نهایی همچنان موجه باقی بماند(یعنی هیچکدام از اعداد سمت راست در محدودیت ها منفی نشوند). این وضعیت با استفاده از مثال زیر توضیح داده می شود.

مثال: در مسئله زیر به منظور تولید دو محصول که مقدار تولیدشان با x_1 و x_2 نمایش داده می شوند، از چهار منبع a و b و c و d استفاده می شوند که به ترتیب سمت راست محدودیت های ۱، ۲، ۳، و ۴ را تشکیل می دهند. میزان موجودی منابع برابر است با $a=6, b=8, c=1, d=2$ که چهار محدودیت مسئله براساس محدودیت این چهار منبع نوشته شده است. در صورتی که سود هر واحد محصول اول و دوم به ترتیب ۳ و ۲ باشد، مدل ان به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
Max \quad Z &= 3x_1 + 2x_2 \\
x_1 + 2x_2 &\le 6 \\
2x_1 + x_2 &\le 8 \\
-x_1 + x_2 &\le 1 \\
x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



جواب بهینه مسئله که با نقطه C مشخص می شود عبارت است از:

$$x_1^* = 3\frac{1}{3}, x_2^* = 1\frac{1}{3}, s_1^* = 0, s_2^* = 0, s_3^* = 3, s_4^* = \frac{2}{3}$$

همان طور که دیده می شود، به ازای تولید در نقطه بهینه، منبع ۱ و ۲ کاملا به اتمام رسیده اما موجودی منبع ۳ و ۴ به ترتیب معادل ۳ و $\frac{2}{3}$ خواهد بود. در این مثال سوال زیر مطرح می شود.

میزان منابع(اعداد سمت راست) چقدر می تواند کاهش یا افزایش یابد؟

بعد از تعیین جواب بهینه، مطالعه تغییرات ممکن در جواب بهینه میسر خواهد بود. به طور خاص ما علاقه مند به دو نوع تحلیل هستیم:

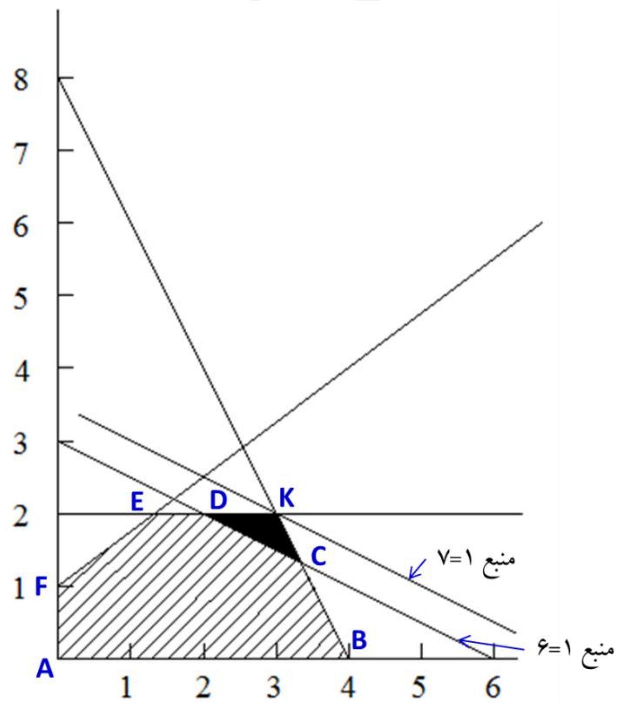
۱)به منظور بهبود مقدار بهینه تابع هدف چه مقدار از یک منبع را می توان افزایش داد؟

۲)چه مقدار از یک منبع را می توان کاهش داد بدون این که موجب تغییری در جواب بهینه فعلی شود؟

از آن جا که سطح منبع به وسیله اعداد سمت راست محدودیت ها بیان می شود، به این نوع تحلیل، **تحلیل حساسیت اعداد سمت راست** گفته می شود.

در مسئله فوق تنها محدودیت های ۱ و ۲ که بیانگر میزان منابع a و b هستند الزام آورند. منطقا اگر یک محدودیت الزام آور باشد، به عنوان یک منبع کمیاب مورد توجه قرار می گیرد زیرا تمام منابع موجود کاملا استفاده شده است($s_1=0$, $s_2=0$). از طرف دیگر یک محدودیت غیرالزام اور نشان دهنده یک منبع غیرکمیاب است($s_3 \neq 0, s_4 \neq 0$). بنابراین در تحلیل حساسیت سمت راست، علاقه مند به دانستن میزان افزایش منابع کمیاب، به منظور بهبود مقدار تابع هدف هستیم و متشابها می خواهیم تغیین کنیم چه مقدار از منابع غیرکمیاب را می توان کاهش داد بدون این که بر جواب بهینه اثر بگذارد.

محدودیت های ۱ و ۲ نشان دهنده منابع کمیاب هستند. ابتدا منبع a بررسی می شود. همان طور که میزان منبع a افزایش می یابد، محدودیت ۱ یا خط CD به طرف بالا و به موازات خودش حرکت می کند، و به تدریج مثلث CDK کوچک می شود (ضلع های CK و DK از مثلث DKC از محدودیت های ۲ و ۴ به وجود آمده اند). وقتی که به نقطه K می رسد، محدودیت های ۲ و ۴ الزام اور می شوند و جواب بهینه در نقطه K واقع و $ABKEF$ منطقه موجه می شوند.



افزایش بیشتر منبع اول موجب ارایه حرکت محدودیت اول به سمت بالا و به موازات خود می شود، این در حالی است که این افزایش پس از نقطه K تاثیری در بزرگتر شدن منطقه موجه و بهبود تابع هدف ندارد.

زیرا این افزایش موجب زاید شدن محدودیت اول خواهد شد، بنابراین میزان افزایش منبع کمیاب اول، تا حدی است که معادله حدی این محدودیت از نقطه K عبور کند. **به عبارت دیگر حد افزایش یک منبع کمیاب تا حد زاید شدن محدودیت ان منبع خواهد بود.**

محدودیت اول در صورتی از نقطه K خواهد گذشت که عدد سمت راست آن از ۶ بیشتر. برای محاسبه این افزایش کافی است مختصات نقطه K را در محدودیت اول جایگذاری کنیم که به صورت زیر می شود:

$$x_1 + 2x_2 = 3 + (2 \times 2) = 7$$

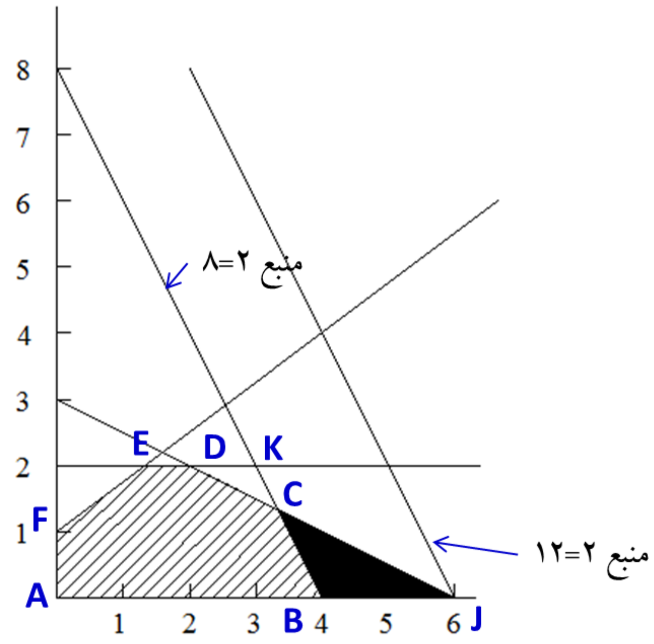
به این ترتیب حداکثر افزایش محدودیت اول از ۶ به ۷ است که برابر با یک واحد است.

شکل زیر تاثیر افزایش منبع دوم را نشان می دهد. این وضعیت بدون توجه به تغییرات منبع اول و مستقل از آن صورت پذیرفته است. افزایش منبع دوم تا رسیدن معادله حدی محدودیت دوم به نقطه J موجب بهبود Z خواهد شد. مختصات نقطه J از تقاطع محدودیت های دوم و محدودیت نامنفی بودن متغیر x_2 و حل دستگاه زیر بدست می اید.

$$x_1 + 2x_2 = 6, x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 6, x_2 = 0$$

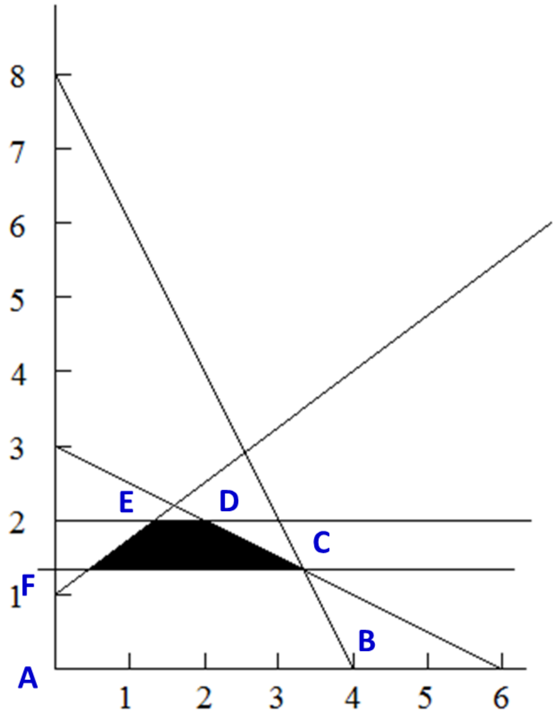
با قرار دادن مختصات نقطه J در محدودیت دوم، عدد سمت راست محدودیت دوم و مقدار جدید منبع b به دست می اید.

$$2x_1 + x_2 = 1 \rightarrow 2(6) + (1)(0) = 12$$



به این ترتیب حداکثر افزایش عدد سمت راست محدودیت اول از ۸ به ۱۲ میسر است که بـه میـزان ۴ واحد خواهد بود.

حال کاهش در اعداد سمت راست محدودیت های غیرالزام اور را مورد توجه قرار دهید. از آن جا کـه s_3 و s_4 مخالف صفر هستند، دو محدودیت ۳ و ۴ غیرالزام آور هستند. محدودیت ۴ را در نظر بگیرید. شکل زیر نشان می دهد که معادله حدی محدودیت چهارم (ED) تا میزانی که از نقطه C بگذرد می تواند کاهش یابد، بدون این که در جواب بهینه اثر بگذارد. از آن جا که نقطه C دارای مختصات $x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1\frac{1}{3}$ است، عدد سمت راست محدودیت چهارم حداکثر می تواند به $1\frac{1}{3}$ کاهش یابد بدون این که تغییری در نقطه بهینه بـه وجود آید.



حال سومین محدودیت را در نظر بگیرید. مجددا طرف راست محدودیت می تواند کاهش داده شود تا معادله حدی مربوط به محدودیت سوم ($-x_1+x_2=1$) از نقطه C بگذرد. بنابراین سمت راست محدودیت سوم معادل با $-x_1+x_2=\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(1\frac{1}{3}\right)=-2$ می شود. این تغییر تاثیری بر نقطه بهینه فعلی، C، نمی گذارد.

نتایج بحث های بالا در جدول زیر خلاصه شده است:

منبع	نوع	حداکثر تغییر در میزان منبع	حداکثر تغییر در میزان Z
1	کمیاب	$7-6=1$	$13-12\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
2	کمیاب	$12-8=4$	$18-12\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$
3	غیرکمیاب	$-2-1=-3$	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$
4	غیرکمیاب	$1\frac{1}{3}-2=-\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$

کدام یک از منابع باید افزایش یابد؟

با توجه به محدودیت بودجه، که به طور عادی در وضعیت اقتصادی با آن روبه رو هستیم، مایلیم بدانیم که کدام یک از منابع دارای اولویت بیش تری در تخصیص سرمایه است. طبعا چون خواهان افزایش سود هستیم در منبعی که بیش تر موجب افزایش سود می شود، مایل به سرمایه گذاری هستیم. این امر در جدول زیر گفته شده است.

منبع	نوع	مقدار y_i
1	کمیاب	$y_1 = \frac{1}{3}$
2	کمیاب	$y_2 = \frac{4}{3}$
3	غیرکمیاب	$y_3 = 0$
4	غیرکمیاب	$y_4 = 0$

اگر y_i ارزش هر واحد از منبع i باشد، انگاه y_i از فرمول زیر بدست می آید.

$$y_i = \frac{Z^* \quad \text{حداکثر تغییر در مقدار بهینه}}{b_i \quad \text{افزایش مجاز در منبع i}}$$

تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف

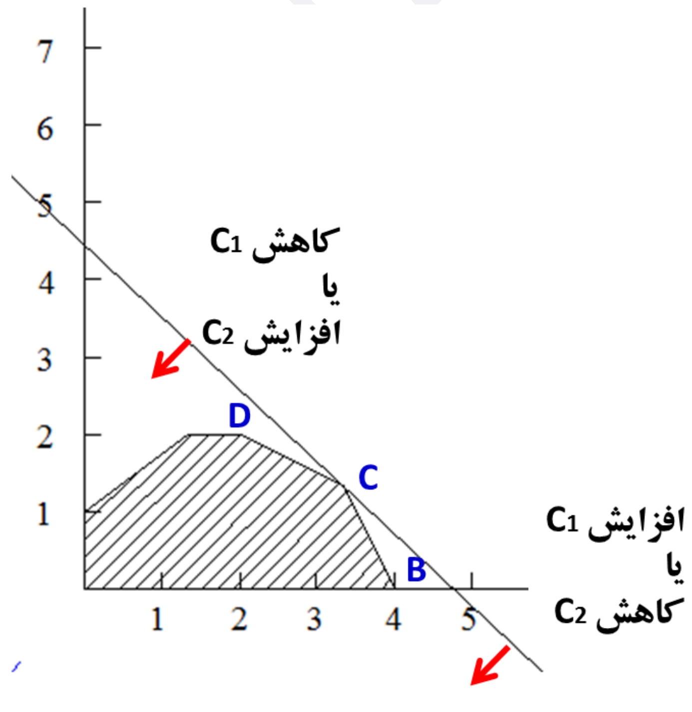
تغییر در ضرایب تابع هدف در شیب خط تابع هدف اثر می گذارد. این تغییر اگر از یک میزان مشخص، بیش تر شود، نقطه بهینه عوض خواهد شد. بدین معنی که تغییرات در ضرایب تابع هدف می تواند مجموعه ای از محدودیت های الزام آور و نتیجتا وضعیت (کمیاب یا غیرکمیاب) منابع را تغییر دهد. تحلیل حساسیت تابع هدف درصدد پاسخ به این سوال است:

چه مقدار ضرایب تابع هدف را می توان تغییر داد (افزایش یا کاهش) بدون این که تغییری در نقطه بهینه ایجاد کند؟

مثال: اگر ضرایب تابع هدف در مثال قبلی با C_1 و C_2 نشان داده شود، تابع هدف چنین می شود:

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

همان طور که در شکل زیر نشان داده شده است، با افزایش C_1 یا کاهش C_2 ، خط تابع هدف در جهت عقربه های ساعت و حول نقطه C چرخانده می شود. برعکس، کاهش در C_1 یا افزایش C_2 موجب می شود که Z برخلاف عقربه های ساعت حرکت کند. بنابراین نقطه C تا هنگامی که شیب تابع هدف (Z) بین شیب های محدودیت ۱ و ۲ تغییر کند همچنان بهینه باقی می ماند. هنگامی که شیب Z با شیب محدودیت اول منطبق می شود، مسئله دارای دو نقطه گوشه بهینه C و D خواهد بود. متشابها، هنگامی که شیب Z بر شیب محدودیت دوم منطبق شود، دو نقطه C و B بهینه خواهند شد. هر تغییر کوچک خارج از دامنه تعریف شده بالا برای C_1 باشد، جواب بهینه جدید را در نقطه B یا D قرار خواهد داد. در ادامه رویه ای برای تعیین دامنه تغییرات C_1، به گونه ای که نقطه بهینه تغییر نکند ارایه می شود. به منظور محاسبه دامنه تغییرات، ابتدا مقدار عددی ضریب x_2 ثابت نگه داشته و ضریب x_1 با C_1 نشان داده می شود.



شکل فوق نشان می دهد که C_1 می تواند تا انطباق Z با محدودیت دوم افزایش یابد، یا تا انطباق با محدودیت اول کاهش یابد. بنابراین حداقل یا حداکثر مقدار C_1 را می تواند از طریق مساوی قراردادن شیب

Z با شیب محدودیت اول و دوم به دست اورد. شیب Z عبارت است از $-C_1/2$ و شیب محدودیت های اول و دوم برابر با $-1/2$ و ۲- خواهد بود. در این جا حداقل مقدار C_1 از رابطه زیر پیدا می شود.

$$-\frac{C_1}{2}=\frac{-1}{2}\rightarrow C_1=1$$

متشابها، حداکثر مقدار C_1 برای بهینه باقی ماندن نقطه C چنین است:

$$-\frac{C_1}{2}=\frac{-2}{1}\rightarrow C_1=4$$

دامنه تغییرات C_1 برای بهینه باقی ماندن نقطه C چنین است:

$$1\le C_1\le 4$$

وقتی C_1 برابر ۱ باشد، جواب گوشه بهینه در نقطه C یا D قرار خواهد داشت. اگر مقدار C_1 کمتر از 1 شود، نقطه بهینه به D انتقال می یابد. متشابها می توان تفسیری برای C_1 مساوی یا بیشتر از ۴ باشد. اگر $C1$ بیشتر از ۴ باشد، نقطه بهینه به B انتقال می یابد.

اضافه شدن یک محدودیت جدید

بعد از حل مسئله و پیدا کردن جواب بهینه این امکان وجود دارد که بر اثر شرایط اقتصادی یا فنی، محدودیت جدیدی بر محدودیت های قبلی افزوده شود، که این امر ممکن است در منطقه موجه فعلی اثر بگذارد و موجب کاهش منطقه موجه شود یا تاثیری بر منطبقه موجه نداشته باشد. این تاثیر را در دو حالت زیر می توان نشان داد:

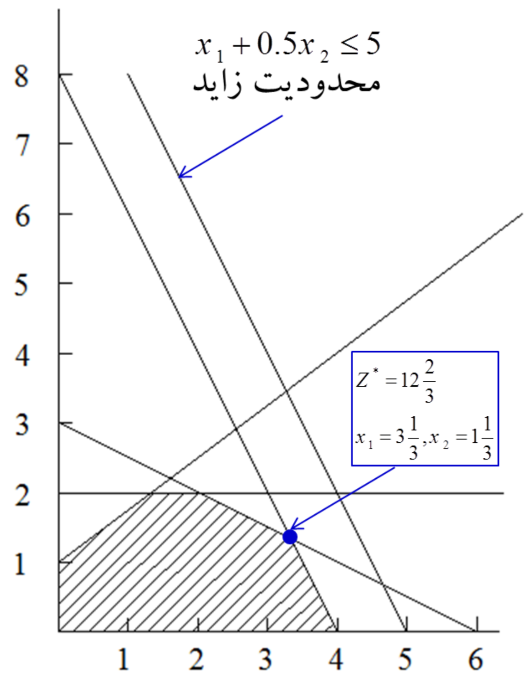
۱) اضافه شدن یک محدودیت زاید

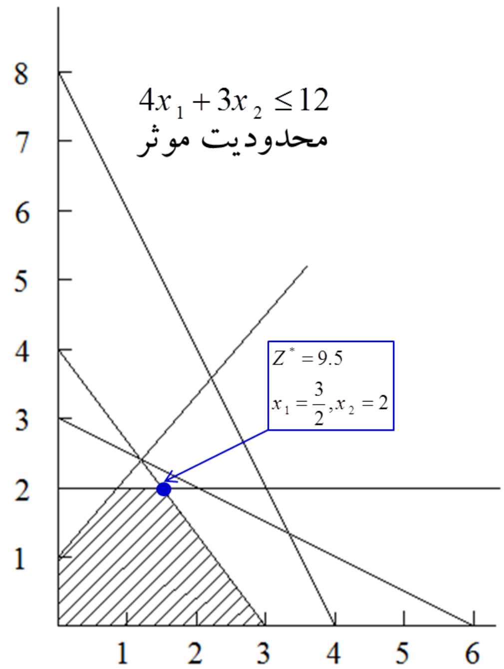
محدودیت زاید محدودیتی است که بود یا نبود آن تاثیری بر منطقه موجه و نتیجتا جواب بهینه ندارد. با توجه به مثال قبل همان طور که در شکل زیر نشان داده می شود اگر محدودیتی به صورت $x_1+0.5x_2<=5$ به محدودیت های چهارگانه قبلی اضافه شود، تاثیری بر منطقه موجه نمی گذارد و جواب بهینه همچنان

بهینه می ماند. صدق کردن جواب بهینه مسئله در یک محدودیت جدید نشان دهنـده زایـد بـودن آن، و در غیر این صورت بیانگر موثر بودن محدودیت است.

۲) اضافه شدن یک محدودیت موثر

محدودیت موثر محدودیتی است که در تغییر منطقه موجه موثر است و می تواند موجب تغییـر جـواب بهینه شود. محدودیت $4x_1+3x_2<=12$ موجب کاهش منطقه موجه و تغییر Z^* از ۱۲.۶۶ به ۹.۵ می شود.





برنامه ریزی خطی پارامتری

در تحلیل حساسیت، تاثیر گسسته پارامترهای مدل بر جواب نهایی بررسی می شد. هر گاه بررسی تاثیر تغییرات پیوسته پارامترها و در تمام دامنه های ممکن مدنظر باشد باید از برنامه ریزی خطی پارامتری یاری جست.

تغییر نظام گرای پارامترهای c_j

تابع هدف زیر را در نظر بگیرید:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

در برنامه‌ریزی پارامتری، تابع هدف فوق با تابع زیر جایگزین می‌شود.

$$Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

α_j داده‌های ثابتی هستند که معرف آهنگ تغییرات ضرایب تابع هدف خواهند بود. مقدار θ به تدریج از صفر بزرگتر می‌شود. برای تشریح عملکرد مدل برنامه‌ریزی خطی با تغییر θ ، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\ &s.t. \\ &(1) \quad x_1 + x_3 = 4 \\ &(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12 \\ &(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ &\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

حل: مقدار $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = -1$ در نظر بگیرید. لذا تابع هدف به صورت زیر می‌شود.

$$Z(\theta) = (3 + 2\theta)x_1 + (5 - \theta)x_2$$

از جدول نهایی سیمپلکس با $\theta = 0$ شروع می‌کنیم که تابع هدف به صورت زیر می‌شود.

$$Z + 1.5x_4 + x_5 = 36$$

تغییرات تابع هدف را به سمت چپ تابع هدف اضافه می‌کنیم که به صورت زیر می‌شود.

$$Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + 1.5x_4 + x_5 = 36$$

چون x_1 و x_2 متغیرهای اساسی هستند (که در معادلات ۲ و ۳ ظاهر شدند)، باید ضریب این دو متغیر در تابع هدف فوق برابر صفر شود که این کار با اضافه کردن معادلات ۲ و ۳ به تابع هدف میسر می‌شود که به صورت زیر می‌شود:

$$Z+(1.5-\frac{7}{6}\theta)x_4+(1+\frac{2}{3}\theta)x_5=36-2\theta$$

با توجه به دستور توقف الگوریتم سیمپلکس اولیه، مادامیکه ضرایب متغیرهای غیراساسی غیرمنفی باقی بمانند، جواب اساسی موجه فعلی بهینه خواهد ماند پس داریم:

$$1.5-\frac{7}{6}\theta\geq 0\rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{9}{7}$$
$$1+\frac{2}{3}\theta\geq 0\rightarrow 0\leq\theta$$

بنابراین اگر $\theta>\frac{9}{7}$ شود، x_4 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می‌گردد و با استفاده از روش سیمپلکس اولیه جواب بهینه جدید بدست آید. جدول جدید سیمپلکس با ورود x_4 به پایه و خروج x_3 از پایه (با توجه به آزمون نسبت) به صورت زیر می شود.

دامنه θ	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
$\frac{9}{7}\leq\theta\leq 5$	Z	0	1	0	0	$\frac{-9+7\theta}{2}$	0	$\frac{5-\theta}{2}$	$27+5\theta$
	X_4	1	0	0	0	3	1	-1	6
	X_2	2	0	0	1	-1.5	0	0.5	3
	X_1	3	0	1	0	1	0	0	4

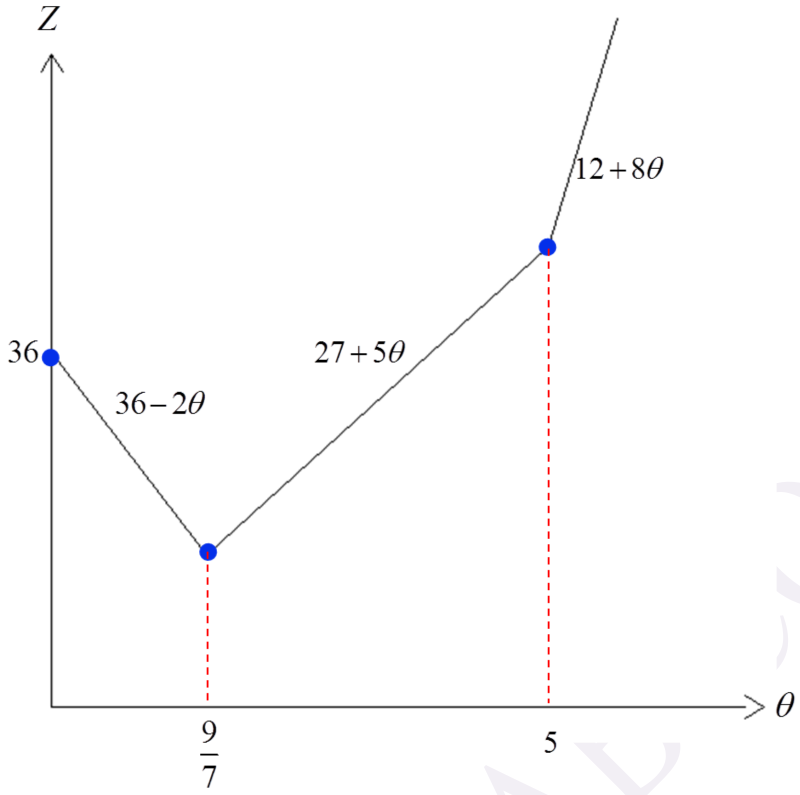
بنابراین اگر $\theta>5$ شود، x_5 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می‌گردد و با استفاده از روش سیمپلکس اولیه جواب بهینه جدید بدست آید. جدول جدید سیمپلکس با ورود x_5 به پایه و خروج x_2 از پایه (با توجه به آزمون نسبت) به صورت زیر می شود.

دامنه θ	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
$\theta \ge 5$	Z	0	1	0	$-5+\theta$	$3+2\theta$	0	0	$12+8\theta$
	X_4	1	0	0	2	0	1	0	12
	X_5	2	0	0	2	-3	0	1	6
	X_1	3	0	1	0	1	0	0	4

همان طور که در جدول فوق مشخص است، به ازای $\theta > 5$ سطر صفر نامنفی خواهند بود و مقدار θ تا بی نهایت می تواند افزایش یابد و تغییری در متغیرهای پایه ایجاد نمی شود. خلاصه رویه فوق به ازای تمامی مقادیر θ در جدول زیر آمده است.

دامنه θ	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
$0 \le \theta \le \frac{9}{7}$	Z	0	1	0	0	0	$\frac{9-7\theta}{6}$	$\frac{3+2\theta}{3}$	$36-2\theta$
	X_3	1	0	0	0	1	0.33	-0.5	2
	X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6
	X_1	3	0	1	0	0	-0.33	0.33	2
$\frac{9}{7} \le \theta \le 5$	Z	0	1	0	0	$\frac{-9+7\theta}{2}$	0	$\frac{5-\theta}{2}$	$27+5\theta$
	X_4	1	0	0	0	3	1	-1	6
	X_2	2	0	0	1	-1.5	0	0.5	3
	X_1	3	0	1	0	1	0	0	4
$\theta \ge 5$	Z	0	1	0	$-5+\theta$	$3+2\theta$	0	0	$12+8\theta$
	X_4	1	0	0	2	0	1	0	12
	X_5	2	0	0	2	-3	0	1	6
	X_1	3	0	1	0	1	0	0	4

همچنین مقدار تابع هدف جواب بهینه به عنوان تابعی از θ به صورت زیر می‌شود.


Z
$12+8\theta$
36
$27+5\theta$
$36-2\theta$
θ
$\frac{9}{7}$
5

تغییرات نظام گرا پارامترهای سمت راست (b_i)

در این حالت تغییری که داده می‌شود این است که به جای b_i عبارت $b_i+\alpha_i\theta$ قرار می‌گیرد که α_i داده‌های ثابتی هستند. بنابراین، مسئله به صورت زیر در می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z(\theta)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i+\alpha_i\theta \quad i=1,\dots,m\\
&x_j\ge 0 \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

هدف از این بخش، مشخص کردن جوب بهینه به عنوان تابعی از θ است. رویه حلی که در زیر بیان می‌شود شباهت زیادی با روند آنچه که به ازای تغییر c_j گفته شده دارد که دلیل آن معادل بودن تغییر در ضرایب تابع هدف مسئله اولیه با تغییر ضرایب سمت راست مسئله همزاد است. برای تشریح بیشتر موضوع چند تمرین حل می‌کنیم.

تمرین: از رویه برنامه‌ریزی خطی پارامتری برای انجام تغییرات نظام گرا در b_i استفاده کنید و جواب بهینه مسئله زیر را به صورت تابعی از θ برای $0\le\theta\le 25$ بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
&Max\quad Z(\theta)=2x_1+x_2\\
&s.t.\\
&(1)\quad x_1 \le 10+2\theta\\
&(2)\quad x_1+x_2 \le 25-\theta\\
&(3)\quad x_2 \le 10+2\theta\\
&x_i\ge 0 \quad i=1,2.
\end{aligned}
$$

حل:

بدون در نظر گرفتن مقدار θ جواب بهینه مدل فوق را بدست می آوریم که در جدول زیر آورده شده است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-2	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_4	2	0	1	1	0	1	0	$25-\theta$
X_5	3	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$
Z	0	1	0	-1	2	0	0	$20+4\theta$
X_1	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_4	2	0	0	1	-1	1	0	$15-3\theta$
X_5	3	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$
Z	0	1	0	0	2	0	1	$30+6\theta$
X_1	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_4	2	0	0	0	-1	1	-1	$5-5\theta$
X_2	3	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$

به ازای $0\le\theta\le1$ جدول آخر دارای شرایط بهینگی خواهد بود. ولی به ازای $\theta>1$، متغیر X_4 از پایه خارج می شود و متغیر X_5 وارد پایه می شود. در جدول بهینه بعدی، به ازای $1\le\theta\le5$ جدول بهینه باقی خواهد ماند. ولی به ازای $\theta>5$، متغیر X_2 از پایه خارج می شود و متغیر X_3 وارد پایه می شود. در جدول بهینه بعدی، به ازای $\theta\ge5$، جدول بهینه باقی خواهد ماند با افزایش θ، تغییری در شرایط بهینه و امکان پذیری جدول ایجاد نخواهد شد. جدول سیمپلکس مربوط به ازای تغییر θ آورده شده است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
Z	0	1	-2	-2	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_4	2	0	1	1	0	1	0	$25-\theta$
X_5	3	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$
Z	0	1	0	-1	2	0	0	$20+4\theta$
X_1	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_4	2	0	0	1	-1	1	0	$15-3\theta$
X_5	3	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$
Z	0	1	0	0	2	0	1	$30+6\theta$
X_1	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_4	2	0	0	0	-1	1	-1	$5-5\theta$
X_2	3	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$
Z	0	1	0	0	1	1	0	$35+\theta$
X_1	1	0	1	0	1	0	0	$10+2\theta$
X_5	2	0	0	0	1	-1	1	$5\theta-5$
X_2	3	0	0	1	-1	1	0	$15-3\theta$
Z	0	1	0	1	0	2	0	$50-2\theta$
X_1	1	0	1	1	0	1	0	$25-\theta$
X_5	2	0	0	1	0	0	1	$10+2\theta$
X_3	3	0	0	-1	1	-1	0	$3\theta-15$

خلاصه نتایج در جدول زیر آمده است.

θ	(x_1^*, x_2^*)	$Z^*(\theta)$
$0 \le \theta \le 1$	$(10+2\theta, 10+2\theta)$	$30+6\theta$
$1 \le \theta \le 5$	$(10+2\theta, 15-3\theta)$	$35+\theta$
$5 \le \theta \le 25$	$(25-\theta, 0)$	$50-2\theta$

تمرین

$$\begin{aligned} & Max \quad Z(\theta) = 8x_1 + 24x_2 \\ & s.t. \\ & \quad (1) \qquad x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & \quad (2) \qquad 2x_1 + x_2 \le 10 \\ & \qquad x_i \ge 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

فرض کنید $Z(\theta)$ معرف سود باشد و با جابه جایی درست نیروی انسانی بین دو فعالیت، بتوان تابع هدف را تا حدودی تغییر داد. به طور مشخص، فرض کنید بتوان سود فعالیت اول را از ۸ بالاتر برد(حداکثر تا ۱۸). اما به ازای افزایش هر واحد سود واحد اول، سود فعالیت دوم به اندازه دو واحد کاهش می‌یابد. بنابراین، $Z(\theta)$ باید به صورت زیر نشان داده شود.

$$Z(\theta) = (8+\theta)x_1 + (24-2\theta)x_2$$

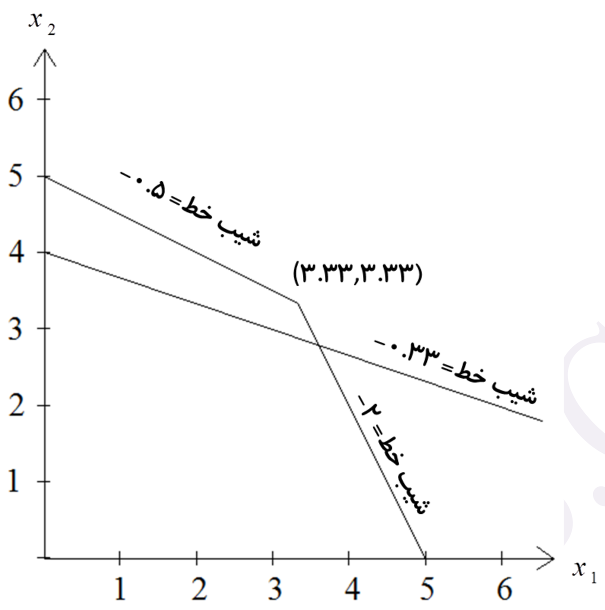
که θ خود یک متغیر تصمیم گیری است به طوریکه $0 \le \theta \le 10$.

الف) از برنامه‌ریزی خطی پارامتری استفاده کرده و جواب بهینه و همچنین مقدار بهینه $Z(\theta)$ را به صورت تابعی از θ به ازای $0 \le \theta \le 10$ مشخص کنید.

ب) مقدار بهینه θ را مشخص کنید. سپس چگونگی پیدا کردن این مقدار بهینه را فقط با استفاده از حل دو مسئله برنامه‌ریزی خطی مشخص کنید.

حل:

الف)



از شکل فوق می‌توان نتیجه گرفت:

جواب بهینه $(0,5)$ تا زمانی برقرار است که

$$-\frac{8+\theta}{24-2\theta} \geq -0.5 \rightarrow \theta \leq 2$$

جواب بهینه $(3.33,3.33)$ تا زمانی بهینه است که

$$-0.5 \geq -\frac{8+\theta}{24-2\theta} \geq -2 \rightarrow 2 \leq \theta \leq 8$$

جواب بهینه $(5,0)$ تا زمانی بهینه است که

$$-\frac{8+\theta}{24-2\theta} \leq -2 \rightarrow \theta \geq 8$$

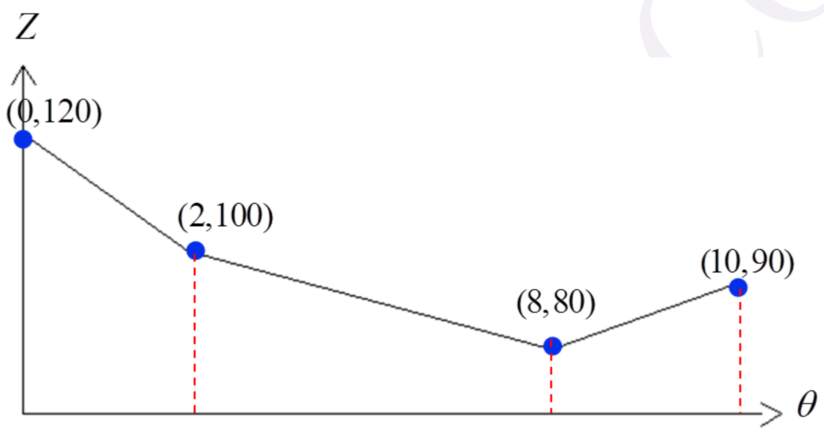
در صورتیکه بخواهیم با استفاده از جدول سیمپلکس نتایج فوق را بدست آوریم بـه صـورت زیـر عمـل مـی کنیم. در تکرار صفر، X_3 از پایه خارج می شود و X_2 وارد پایه می شـود کـه در ایـن صـورت بـه ازای $\theta = 0$ جدول تکرار ۱ شرایط بهینگی دارد. به ازای $0 \le \theta \le 2$ جدول تکرار ۱ شرایط بهینگی را دارد. در صـورتیکه $\theta > 2$ باشد ضریب X_1 در سطر صفر منفی می شود و لذا با توجه به روش سیمپلکس اولیه، X_1 وارد پایه می شود و متغیر X_4 از پایه خارج می شود. ضرایب سطر صفر برای $2 \le \theta \le 8$ نامنفی خواهد بود. برای $\theta > 8$ ، ضریب X_3 در سطر صفر منفی می شود و با توجه به روش سیمپلکس اولیه وارد پایه می شود و متغیـر x_2 از پایه خارج می شود که منجر به جدول تکرار ۴ می شـود. در جـدول تکـرار ۴، بـه ازای $\theta \ge 8$ سـطر صـفر نامنفی باقی خواهد ماند و با افزایش این پارامتر جواب اساسی تغییر نمی کند. بـرای مقـادیر مختلـف θ بـا استفاده از جدول سیمپلکس مقدار تابع هدف را محاسبه می‌کنیم.

تکرار	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست
0	Z	0	1	$-8-\theta$	$-24+2\theta$	0	0	0
	X_3	1	0	1	2	1	0	10
	X_4	2	0	2	1	0	1	10
1	Z	0	1	$4-2\theta$	0	$12-\theta$	0	$120-10\theta$
	X_2	1	0	0.5	1	0.5	0	5
	X_4	2	0	1.5	0	-0.5	1	5
2	Z	0	1	0	0	$\frac{40-5\theta}{3}$	$\frac{4\theta-8}{3}$	$\frac{320-10\theta}{3}$
	X_2	1	0	0	1	0.66	-0.33	3.33
	X_1	2	0	1	0	-0.33	0.66	3.33
4	Z	0	1	0	$\frac{-40+5\theta}{2}$	0	$\frac{8+\theta}{2}$	$40+5\theta$
	X_3	1	0	0	1.5	1	-0.5	5
	X_1	2	0	1	0.5	0	0.5	5

جدول زیر جواب بهینه مدل را به ازای کلیه مقادیر $0 \le \theta \le 10$ نشان می‌دهد.

θ	(x_1^*, x_2^*)	$Z^*(\theta)$
$0 \le \theta \le 2$	$(0,5)$	$120-10\theta$
$2 \le \theta \le 8$	$(3.33,3.33)$	$\frac{(320-10\theta)}{2}$
$8 \le \theta \le 10$	$(5,0)$	$40+5\theta$

نمایش جدول فوق به صورت ترسیمی به صورت زیر می‌شود.



ب) با توجه به گراف بالا می‌توان فهمید که به ازای $\theta=0$ بهترین جواب مدل را خواهیم داشت. با توجه به اینکه $Z(\theta)$ یک تابع محدب بر حسب θ است، مقدار ماکزیمم در حدود اتفاق می‌آفتد و لذا کافی است که برنامه‌ریزی خطی برای مقادیر $\theta=0$ و $\theta=10$ را حل نماییم.

تمرین: با استفاده از برنامه‌ریزی خطی پارامتری مقدار بهینه مدل زیر را برای $0 \le \theta \le 20$ بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z(\theta) = (20+4\theta)x_1 + (30-3\theta)x_2 + 5x_3 \\
&s.t. \\
&(1) \qquad 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 10 \\
&(2) \qquad 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 25 \\
&(3) \qquad 6x_1 + x_2 + x_3 \le 15 \\
&\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

حل:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	طرف سمت راست
Z	0	1	$-20-4\theta$	$-30+3\theta$	-5	0	0	0	0
X_4	1	0	3	3	1	1	0	0	10
X_5	2	0	8	6	4	0	1	0	25
X_6	3	0	6	1	1	0	0	1	15
Z	0	1	$10-7\theta$	0	$5-\theta$	$10-\theta$	0	0	$100-10\theta$
X_2	1	0	1	1	0.33	0.33	0	0	3.33
X_5	2	0	2	0	2	-2	1	0	5
X_6	3	0	5	0	0.66	-0.33	0	1	11.66
Z	0	1	0	0	$\frac{55-\theta}{15}$	$\frac{160-22\theta}{15}$	0	$\frac{-10+7\theta}{5}$	$\frac{230+19\theta}{3}$
X_2	1	0	0	1	0.2	0.4	0	-0.2	1
X_5	2	0	0	0	26/15	-28/15	1	-0.4	0.33
X_1	3	0	1	0	2/15	-1/15	0	1/5	2.33
Z	0	1	0	$\frac{-80+11\theta}{3}$	$\frac{-5+2\theta}{3}$	0	0	$\frac{10+2\theta}{3}$	$50+10\theta$
X_4	1	0	0	2.5	0.5	1	0	-0.5	2.5
X_5	2	0	0	14/3	8/3	0	1	-4/3	5
X_1	3	0	1	1/6	1/6	0	0	1/6	2.5

مقدار بهینه تابع هدف به ازای مقادیر مختلف θ به صورت زیر است.

θ	(x_1^*, x_2^*, x_3^*)	$Z^*(\theta)$
$0 \le \theta \le \frac{10}{7}$	$(0, \frac{10}{3}, 0)$	$100-10\theta$
$\frac{10}{7} \le \theta \le \frac{80}{11}$	$(3.33, 1, 0)$	$\frac{(230+19\theta)}{3}$
$\frac{80}{11} \le \theta$	$(2.5, 0, 0)$	$50+10\theta$

تمرین: از روش برنامه‌ریزی خطی پارامتری برای انجام تغییرات استفاده کنید و جواب بهینه مسئله زیر را به صورت تابعی از θ به ازای $0 \le \theta \le 30$ بدست آورید.

$$Max \quad Z(\theta) = 5x_1 + 42x_2 + 28x_3 + 49x_4$$

$$s.t.$$

$$(1) \qquad 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 135 - 2\theta$$

$$(2) \qquad 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \le 78 - \theta$$

$$(3) \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30 + \theta$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,..,4.$$

حل:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-42	-28	-49	0	0	0	0
X_5	1	0	3	-2	1	3	1	0	0	$135-2\theta$
X_6	2	0	2	4	-1	2	0	1	0	$78-\theta$
X_7	3	0	1	2	1	2	0	0	1	$30+\theta$
Z	0	1	19.5	7	-3.5	0	0	0	24.5	$735+24.5\theta$
X_5	1	0	1.5	-5	-0.5	0	0	0	-1.5	$90-3.5\theta$
X_6	2	0	1	2	-2	0	0	0	-1	$48-2\theta$
X_4	3	0	0.5	1	0.5	1	0	0	0.5	$15+0.5\theta$
Z	0	1	24	14	0	7	0	0	28	$840+28\theta$
X_5	1	0	2	-4	0	1	0	0	-1	$105-3\theta$
X_6	2	0	3	6	0	4	0	0	0.5	108
X_3	3	0	1	2	1	2	0	0	1	$30+\theta$

برای $\theta \le 30$ جواب بهینه $840+28\theta$ و $(0,0,30+\theta,0,105-3\theta,108)$ خواهد بود.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**