

درس ۹: برنامه‌ریزی پویای قطعی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب



www.behinehyab.com

برنامه‌ریزی پویا که ماهیتاً روشی ریاضی است معمولاً در رشته‌هایی از تصمیم‌گیری که مرتبط به هم هستند، کارایی دارند. برخلاف برنامه‌ریزی خطی، چارچوب استاندارد برای فرموله کردن برنامه‌ریزی پویا وجود ندارد. در واقع روش برنامه‌ریزی پویا آرایه روش برخورد کلی با مسئله را بیان می‌کند و برای هر مسئله با شرایط آن باید روش برنامه‌ریزی پویا را تطبیق داد.

ویژگی‌های مسائل برنامه‌ریزی پویا به شرح ذیل است:

- ۱- مسئله را می‌توان به چند مرحله (Stage) تقسیم کرد. در هر مرحله یک تصمیم اتخاذ می‌گردد.
- ۲- هر مرحله به تعدادی حالت (State) وابسته است. تعداد حالات می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
- ۳- در هر مرحله با اتخاذ یک تصمیم، حالت مرحله فعلی به حالتی که وابسته به مرحله بعدی باشد انتقال می‌یابد.
- ۴- با فرض معلوم بودن حالت در یک مرحله، سیاست بهینه در مورد مراحل باقی مانده، مستقل از سیاستی است که در مراحل قبلی اتخاذ شده است.
- ۵- داشتن حالت فعلی سیستم، حاوی کلیه اطلاعاتی است که برای تعیین سیاست بهینه مربوط به مراحل باقی مانده مورد نیاز است.
- ۶- روش حل این مسائل، با پیدا کردن جواب بهینه مربوط به کلیه حالت‌های مرحله آخر آغاز می‌شود.
- ۷- سیاست بهینه همه حالات‌های مرحله n را می‌توان با یک رابطه برگشتی و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالت‌های مرحله $(n+1)$ مشخص ساخت. رابطه برگشتی به صورت زیر است.

$$f_n^*(s) = \underset{x_n}{\text{Min}} \{p(s, x_n) + f_{n+1}^*(x_n)\} = \underset{x_n}{\text{Min}} \{f_n(s, x_n)\}$$

که در رابطه فوق، سیستم در مرحله n و حالت s است و هدف یافتن x_n ای است که عبارت

$$p(s, x_n) + f_{n+1}^*(x_n) \text{ یا } f_n(s, x_n)$$

۸- روش حل با حرکت پس رو (Backward) و با استفاده از رابطه برگشتی (Recursive relationship) از مرحله ای به مرحله قبل، بدست می آید.

برای تشریح روش برنامه ریزی پویا، مثال هایی حل می شود.

مثال: سازمان جهانی بهداشت به منظور بهداشت و آموزش پزشکی در کشورهای جهان سوم در نظر دارد ۵ گروه پزشکی خود را به سه کشور اعزام کند. این سازمان باید مشخص کند به هر کشور چند گروه اختصاص یابد تا کارایی کل ۳ کشور بیشینه شود. معیار سنجش کارایی این گروه ها، افزایش طول عمر جمعیت است که بر حسب تعداد گروه های پزشکی به صورت جدول زیر است:

تعداد گروه های پزشکی	کشور		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

حل:

x_n : معرف تعداد گروه های پزشکی که به کشور n -ام اختصاص یافته است.

حالت سیستم (S): تعداد گروه هایی که در مراحل قبلی هنوز تخصیص نیافته اند.

$p_i(x_i)$: معیار سنجش کارایی از تخصیص x_i گروه پزشکی به کشور i -ام است.

مدل برنامه‌ریزی ریاضی مسئله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^3 p_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_i \geq 0, \text{int} \end{aligned}$$

با استفاده از قراردادهایی که در خصوص مسئله برنامه‌ریزی پویا داشتیم، $f_n(s, x_n)$ به صورت زیر

می‌شود:

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$$

با استفاده از موارد بالا می‌توان روند حل را از $n = 3$ (مرحله آخر) آغاز کرد.

در مرحله ۳ که به دنبال یافتن تعداد گروه‌های پزشکی برای کشور ۳-ام هستیم، S می‌تواند از ۰ تا ۵ (اعداد صحیح) مقدار بگیرد. اگر $s = 0$ باشد، یعنی هیچ گروهی برای کشور ۳-ام برای تخصیص باقی نمانده است و در مراحل قبل تخصیص انجام شده است، لذا در کشور ۳-ام با توجه به جدول اطلاعات اولیه نمی‌توان افزایش طول عمر داشت و لذا f_n^* برابر صفر می‌شود.

اگر $s = 1$ باشد، یعنی یک گروه تخصیص نداده شده و می‌تواند برای کشور ۳-ام تخصیص داده شود. با

توجه به جدول، f_n^* برابر ۵۰ می‌شود. برای s از ۲ تا ۵ این روند تکرار می‌شود.

$$n = 3$$

s	f_n^*	x_n^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

جدول برای مرحله دوم به صورت زیر می‌شود:

$$n = 2$$

$s \backslash x_n$	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+50	20+0	-	-	-	-	50	0
2	0+70	20+50	45+0	-	-	-	70	1 یا 0
3	0+80	20+70	45+50	75+0	-	-	95	2
4	0+100	20+80	45+70	75+50	110+0	-	125	3
5	0+130	20+100	45+80	75+70	110+50	0+150	160	4

برای تشریح نحوه محاسبه جدول فوق، چند سلول را با جزئیات بیان می‌کنیم.

ستون $x_2 = 0$

در حالتی که $s = 0$ است (یعنی تمامی گروه‌های پزشکی در کشور ۱-م تخصیص داده شده است) برای دو کشور ۲ و ۳ گروه پزشکی برای تخصیص باقی مانده است و لذا مقدار $f_2^*(0)$ برابر صفر می‌شود.

در حالتی که $s = 1$ می‌شود، یعنی ۱ گروه پزشکی امکان تخصیص دارد که برای کشور ۲ و ۳ تخصیص یابد. در این ستون $x_2 = 0$ است، یعنی برای کشور ۲-م گروه تخصیص داده نشود و یک گروه باقی مانده است که به کشور ۳-م تخصیص می‌یابد. حال به جدول $n = 3$ باز می‌گردیم و مقدار بهینه برای $s = 1$ را بدست می‌آوریم که برابر با ۵۰ است. لذا $f_2(x_2, s)$ برابر با 0 (افزایش عمر برای کشور ۲-م) + 50 (افزایش عمر برای کشور ۳-م) می‌شود.

$$\text{ستون } x_2 = 1$$

همان طور که ملاحظه می‌شود برای $s = 0$ ، خط تیره کشیده شده است چون اگر $s = 0$ باشد، یعنی برای کشورهای ۲ و ۳ گروهی برای تخصیص باقی مانده است و لذا تخصیص یک گروه برای کشور ۲-م ($x_2 = 1$) معنا ندارد و لذا با خط تیره (-) این نکته بیان می‌شود.

اگر $s = 1$ باشد، یعنی یک گروه پزشکی امکان تخصیص دارد که می‌توان در کشورهای ۲ و ۳ (همان مراحل ۲ و ۳) تخصیص یابد. چون $x_2 = 1$ است، این گروه به کشور ۲-م تخصیص می‌یابد و با توجه به جدول اولیه، افزایش طول عمر برابر ۲۰ سال خواهد بود. چون تخصیص ۱ گروه پزشکی در کشور ۲-م، برای کشور ۳-م گروهی باقی نمی‌ماند، لذا افزایش طول عمر برای کشور ۳-م برابر صفر است، بنابراین $f_2(x_2, s)$ برابر $20 + 0$ می‌شود.

اگر $s = 2$ باشد، یعنی ۲ گروه پزشکی می‌تواند در کشورهای ۲ و ۳ تخصیص یابد و چون $x_2 = 1$ است، یک گروه در کشور ۲-م و یک گروه باقی مانده در کشور سوم باید تخصیص یابد که در این صورت $f_2(x_2, s)$ برابر 20 (افزایش طول عمر با تخصیص یک گروه در کشور ۲-م) + 50 (افزایش طول عمر با تخصیص یک گروه در کشور ۳-م) می‌شود.

ستون $f_2^*(s)$ برابر بیشترین $f_2(x_2, s)$ به ازای تمامی x_2 است و x_2 متناظر با مقادیر بیشتر در x_2^* قرار می‌گیرد.

$x_n \backslash s$		$n = 1$						$f_1^*(s)$	x_1^*
		0	1	2	3	4	5		
5		0+160	45+125	70+95	90+70	105+50	120+0	170	1

در جدول مرحله آخر ($n = 1$)، چون هیچ تخصیصی صورت گرفته نشده است، لذا ۵ گروه پزشکی باقی مانده است که می‌توان به گروه‌های ۱، ۲ و ۳ تخصیص یابد. اگر $x_n = 0$ باشد یعنی در کشور ۱-ام هیچ گروه پزشکی تخصیص داده نشود و ۵ گروه باقی مانده برای دو کشور ۲ و ۳ استفاده شود که در این صورت مقدار بهینه برابر ۱۶۰ می‌شود. نحوه محاسبه سایر مقادیر مشابه جدول $n = 2$ است. تخصیص گروه‌های پزشکی به صورت $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1$ می‌شود که باعث ۱۷۰ سال افزایش عمر خواهد شد.

تمرین: برنامه‌ریزی خطی زیر را از روش برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل:

n برابر ۲ و تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری است.

(R_1, R_2, R_3) بردار حالت است که R_i مقدار باقی مانده از منبع i است.

x_i مقدار متغیر i -ام است.

برای $n = 2$ داریم:

مقدار تابع $f_2(R_1, R_2, R_3, x_2)$ برابر $5x_2$ است که مقدارهای x_2 باید محدودیت‌های $2x_2 \leq R_2$ و

$2x_2 \leq R_3$ را برآورده کند. لذا برای محاسبه x_2^* مدل زیر را باید حل کرد:

$$f_2^*(R_1, R_2, R_3) = \text{Max } f_2(R_1, R_2, R_3, x_2) = \text{Max } \{5x_2\}$$

$$2x_2 \leq R_2$$

$$2x_2 \leq R_3$$

$$x_2 \geq 0$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$n = 2$		
(R_1, R_2, R_3)	$f_2^*(R_1, R_2, R_3)$	x_2^*
$R_i \geq 0$ $i = 1, \dots, 3$	$5 \min \left\{ \frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2} \right\}$	$\min \left\{ \frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2} \right\}$

برای $n = 1$ داریم:

$$f_1^*(R_1, R_2, R_3) = \text{Max } f_1(R_1, R_2, R_3, x_1) = \text{Max } \{3x_1 + f_2^*(R_1 - x_1, R_2, R_3 - 3x_1)\}$$

$$x_1 \leq R_1$$

$$3x_1 \leq R_3$$

$$x_1 \geq 0$$

چون در مرحله اول از منابع استفاده نشده است، لذا $R_1 = 4$ و $R_2 = 12$ و $R_3 = 18$ است. لذا f_1^* به صورت زیر می‌شود.

$$f_1^*(4, 12, 18) = \max \{3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)\}$$

$$x_1 \leq 4$$

$$3x_1 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 3x_1 + 5 \min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} \right\}$$

توجه داشته باشید که

$$\min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = \begin{cases} 6 & 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 9 - 1.5x_1 & 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

با جایگزینی دو عبارت فوق در هم داریم:

$$3x_1 + 5 \min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = \begin{cases} 3x_1 + 30 & 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 45 - 4.5x_1 & 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

با توجه به این که در $x_1 = 2$ هر دو عبارت $3x_1 + 30$ و $45 - 4.5x_1$ بیشینه می‌شود، لذا $x_1^* = 2$ می‌شود و خواهیم داشت: $(R_1, R_2, R_3) = (2, 12, 12)$ و $x_2^* = 6$ و سود کل برابر با ۳۶ خواهد شد.

تمرین: مسئول منطقه یک حزب سیاسی مشغول برنامه‌ریزی تبلیغاتی انتخاباتی است. برای این منظور می‌تواند از خدمات ۵ نفر استفاده کند تا در ۴ حوزه فعالیت کنند. با توجه به این که اگر یک دستیار در بیش از یک حوزه فعالیت کند، بازدهی وی کاهش پیدا می‌کند، لذا هر دستیار به یک حوزه گماشته می‌شود.

همچنین حوزه‌های می‌تواند بدون دستیار بماند. برآورد می‌شود که افزایش تعداد آرا کاندیدا در هر حوزه با توجه به دستیارانی که برای حوزه گماشته شده است، به شرح جدول زیر است:

حوزه				تعداد دستیار
4	3	2	1	
0	0	0	0	0
3	5	6	4	1
7	9	8	7	2
12	11	10	9	3
14	10	11	12	4
16	9	12	15	5

حل:

x_n : تعداد دستیاران فعال در حوزه n -ام

$p_n(x_n)$: تعداد آرا وقتی x_n دستیار گماشته می‌شود.

s_n : تعداد دستیاران گماشته نشده تا مرحله n -ام.

$$f_n^*(s_n) = \max_{0 \leq x_n \leq s_n} [p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)]$$

تعداد حالات برابر ۴ فرض می‌شود:

$$n = 4$$

s_4	$f_4^*(s)$	x_4^*
0	0	0
1	3	1
2	7	2
3	12	3
4	14	4
5	16	5

$$n = 3$$

$s_3 \backslash x_3$	0	1	2	3	4	5	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	3	5	-	-	-	-	5	1
2	7	8	9	-	-	-	9	2
3	12	12	12	11	-	-	12	0 or 1 or 2
4	14	17	16	14	10	-	17	1
5	16	19	21	18	13	9	21	2

اگر $s_3 = 1$ و $x_3 = 0$ باشد، در این صورت برای حوزه‌های ۳ و ۴ تنها یک دستیار باقی مانده است که به حوزه ۳ تعلق نمی‌گیرد و تنها به حوزه ۴ داده می‌شود و تعداد آرا برابر با $3 = 3 + 0$ می‌شود.

اگر $s_3 = 2$ و $x_3 = 1$ باشد، در این صورت برای حوزه‌های ۳ و ۴ دو دستیار باقی مانده است که به حوزه ۳ یک نفر تخصیص می‌یابد و یک نفر به حوزه ۴ تخصیص می‌یابد که در این صورت تعداد آرا برابر با $8 = 5 + 3$ می‌شود.

اگر $s_3 = 3$ و $x_3 = 3$ باشد، در این صورت سه نفر برای تخصیص به حوزه‌های ۳ و ۴ باقی مانده است که هر سه نفر به حوزه ۳ تخصیص می‌یابد و به حوزه ۴ فردی تخصیص داده نمی‌شود و لذا مقدار کل آرا برابر با $11 = 0 + 11$ می‌شود.

اگر $s_3 = 5$ و $x_3 = 2$ باشد، در این صورت ۵ نفر برای تخصیص به حوزه‌های ۳ و ۴ باقی مانده است که ۲ نفر به حوزه ۳ و ۳ نفر به حوزه ۴ تخصیص داده می‌شود، لذا تعداد آرا برابر با $21 = 12 + 9$ می‌شود.

		$n = 2$							
$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s_2)$	x_2^*	
0	0	-	-	-	-	-	0	0	
1	5	6	-	-	-	-	6	1	
2	9	11	8	-	-	-	11	1	
3	12	15	13	10	-	-	15	1	
4	17	18	17	15	11	-	18	1	
5	21	23	20	19	16	12	23	1	

		$n = 1$							
$s_1 \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s_1)$	x_1^*	
5	23	22	22	20	18	15	23	0	

براساس جداول بالا، جواب بهینه به صورت زیر می‌شود:

جواب بهینه	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
1	0	1	1	3

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**