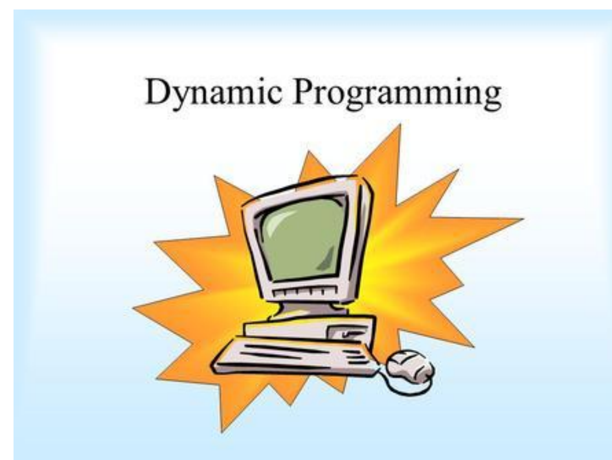
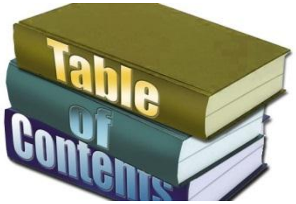
به نام خدا

# درس ۹: برنامه ریزی پویای قطعی



# فهرست مطالب





# برنامه ریزی پویای قطعی

برنامه ریزی پویا که ماهیتا روشی ریاضی است معمولا در رشته هایی از تصمیم گیـری که مرتبط به هم هستند، کارایی دارند

ویژگی های مسائل برنامه ریزی پویا به شرح ذیل است:

۱– مسئله را می توان به چند مرحله (*Stage*) تقسیم کرد. در هـر مرحلـه یـک تصـمیم اتخاذ می گردد.

۲– هر مرحله به تعدادی حالت (*State*) وابسته است. تعداد حالات می تواند متناهی یـا نامتناهی باشد.

۳– در هر مرحله با اتخاذ یک تصمیم، حالت مرحله فعلی به حالتی که وابسته به مرحله بعدی باشد انتقال می یابد.

۴- با فرض معلوم بودن حالت در یک مرحله، سیاست بهینه در مورد مراحل باقی مانده، مستقل از سیاستی است که در مراحل قبلی اتخاذ شده است.

۵- سیاست بهینه همه حالات های مرحله $n$ را می توان با یک رابطه برگشتی و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه تمام حالت های مرحله $(n+1)$ مشخص ساخت. رابطه برگشتی به صورت زیر است.

$$f_n^*(s) = \underset{x_n}{Min}\left\{p(s,x_n) + f_{n+1}^*(x_n)\right\} = \underset{x_n}{Min}\left\{f_n(s,x_n)\right\}$$

که در رابطه فوق، سیستم در مرحله $n$ و حالت $s$ است و هدف یافتن $x_n$ ای است که عبارت $f_n(s,x_n)$ یا $p(s,x_n)+f_{n+1}^*(x_n)$ کمینه شود.

# برنامه ریزی پویای قطعی

۶- روش حل با حرکت پس رو (*Backward*) و با استفاده از رابطه برگشتی (*Recursive relationship*) از مرحله ای به مرحله قبل، بدست می آید.

برای تشریح روش برنامه ریزی پویا، مثال هایی حل می شود.

# تمرین

**مثال:** سازمان جهانی بهداشت به منظور بهداشت و آموزش پزشکی در کشورهای جهان سوم در نظر دارد ۵ گروه پزشکی خود را به سه کشور اعزام کند. این سازمان باید مشخص کند به هر کشور چند گروه اختصاص یابد تا کارایی کل ۳ کشور بیشینه شود. معیار سنجش کارایی این گروه ها، افزایش طول عمر جمعیت است که بر حسب تعداد گروه های پزشکی به صورت جدول زیر است:

# تمرین

| تعداد گروه های پزشکی | کشور 1 | کشور 2 | کشور 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 45 | 20 | 50 |
| 2 | 70 | 45 | 70 |
| 3 | 90 | 75 | 80 |
| 4 | 105 | 110 | 100 |
| 5 | 120 | 150 | 130 |

# تمرین

**حل:**

$x_n$ : معرف تعداد گروه های پزشکی که به کشور $n$–ام اختصاص یافته است.

حالت سیستم $(s)$: تعداد گروه هایی که در مراحل قبلی هنوز تخصیص نیافته اند.

$p_i(x_i)$ : معیار سنجش کارایی از تخصیص $x_i$ گروه پزشکی به کشور $i$–ام است.

مدل برنامه ریزی ریاضی مسئله فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{i=1}^{3} p_i(x_i) \\
&s.t. \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
&x_i \geq 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

# تمرین

با استفاده از قراردادهایی که در خصوص مسئله برنامه ریزی پویا داشتیم، $f_n(s, x_n)$ به صورت زیر می شود:

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$$

با استفاده از موارد بالا می توان روند حل را از $n = 3$ (مرحله آخر) آغاز کرد.

در مرحله ۳ که به دنبال یافتن تعداد گروه های پزشکی برای کشور ۳-ام هستیم. $s$ می توان از ۰ تا ۵ (اعداد صحیح) مقدار بگیرد. اگر $s = 0$ باشد، یعنی هیچ گروهی برای کشور ۳ ام برای تخصیص باقی نمانده است و در مراحل قبل تخصیص انجام شده است، لذا در کشور ۳-ام با توجه به جدول اطلاعات اولیه نمی توان افزایش طول عمر داشت و لذا $f_n^*$ برابر صفر می شود.

# تمرین

اگر $s=1$ باشد، یعنی یک گروه تخصیص نداده شده و می تواند برای کشور ۳ام تخصیص داده شود. با توجه به جدول، $f_n^*$ برابر ۵۰ می شود. برای $s$ از ۲ تا ۵ این روند تکرار می شود.

$n=3$

| $s$ | $f_n^*$ | $x_n^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 50 | 1 |
| 2 | 70 | 2 |
| 3 | 80 | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 130 | 5 |

# تمرین

جدول برای مرحله دوم به صورت زیر می شود:

$$n = 2$$

| $s \backslash x_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_2^*(s)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 0+50 | 20+0 | - | - | - | - | 50 | 0 |
| 2 | 0+70 | 20+50 | 45+0 | - | - | - | 70 | 0 یا 1 |
| 3 | 0+80 | 20+70 | 45+50 | 75+0 | - | - | 95 | 2 |
| 4 | 0+100 | 20+80 | 45+70 | 75+50 | 110+0 | - | 125 | 3 |
| 5 | 0+130 | 20+100 | 45+80 | 75+70 | 110+50 | 0+150 | 160 | 4 |

# تمرین

ستون $x_2 = 0$

در حالتی که $s = 0$ است( یعنی تمامی گروه های پزشکی در کشور ۱-ام تخصیص داده شده است) برای دو کشور ۲ و۳ گروه پزشکی برای تخصیص باقی نمانده است و لذا مقدار $f_2^*(0)$ برابر صفر می شود.

در حالتی که $s = 1$ می شود، یعنی ۱ گروه پزشکی امکان تخصیص دارد که برای کشور ۲ و۳ تخصیص یابد. در این ستون $x_2 = 0$ است، یعنی برای کشور ۲-ام گروه تخصیص داده نشود و یک گروه باقی مانده است که به کشور ۳-ام تخصیص می یابد. حال به جدول $n = 3$ باز می گردیم و مقدار بهینه برای $s = 1$ را بدست می آوریم که برابر با ۵۰ است. لذا $f_2(x_2, s)$ برابر با ۰ (افزایش عمر برای کشور ۲-ام) + ۵۰ (افزایش عمر برای کشور ۳-ام) می شود.

# تمرین

ستون $x_2 = 1$

همان طور که ملاحظه می شود برای $s = 0$ ، خط تیره کشیده شده است چون اگر $s = 0$ باشد، یعنی برای کشورهای ۲ و ۳ گروهی برای تخصیص باقی نمانده است و لذا تخصیص یک گروه برای کشور ۲-ام ( $x_2 = 1$) معنا ندارد و لذا با خط تیره (-) این نکته بیان می شود.

اگر $s = 1$ باشد، یعنی یک گروه پزشکی امکان تخصیص دارد که می توان در کشورهای ۲ و ۳ (همان مراحل ۲ و ۳) تخصیص یابد. چون $x_2 = 1$ است، این گروه به کشور ۲-ام تخصیص می یابد و با توجه به جدول اولیه، افزایش طول عمرا برابر ۲۰ سال خواهد بود. چون تخصیص ۱ گروه پزشکی در کشور ۲-ام، برای کشور ۳-ام گروهی باقی نمی ماند، لذا افزایش طول عمر برای گشور ۳-ام برابر صفر است، بنابراین $f_2(x_2, s)$ برابر ۰+۲۰ می شود.

# تمرین

اگر $s=2$ باشد، یعنی ۲ گروه پزشکی می تواند در کشورهای ۲ و ۳ تخصیص یابد و چون $x_2=1$ است، یک گروه در کشور ۲–ام و یک گروه باقی مانده در کشور سوم باید تخصیص یابد که در این صورت $f_2(x_2,s)$ برابر ۲۰(افزایش طول عمر با تخصیص یک گروه در کشور ۲–ام) + ۵۰ (افزایش طول عمر با تخصیص یک گروه در کشور ۳–ام) می شود.

# تمرین

ستون $f_2^*(s)$ برابر بیشترین $f_2(x_2,s)$ به ازای تمامی $x_2$ است و $x_2$ متناظر با مقادیر بیشتر در $x_2^*$ قرار می گیرد.

$n=1$

| $s$ \ $x_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_1^*(s)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0+160 | 45+125 | 70+95 | 90+70 | 105+50 | 120+0 | 170 | 1 |

در جدول مرحله آخر ( $n=1$ )، چون هیچ تخصیصی صورت گرفته نشده است، لذا ۵ گروه پزشکی باقی مانده است که می توان به گروه های ۱، ۲ و ۳ تخصیص یابد. اگر $x_n=0$ باشد یعنی در کشور ۱-ام هیچ گروه پزشکی تخصیص داده نشود و ۵ گروه باقی مانده برای دو کشور ۲ و۳ استفاده شود که در این صورت مقدار بهینه برابر ۱۶۰ می شود. نحوه محاسبه سایر مقادیر مشابه جدول $n=2$ است. تخصیص گروه های پزشکی به صورت $x_1=1,x_2=3,x_3=1$ می شود که باعث ۱۷۰ سال افزایش عمر خواهد شد.

# تمرین

**مثال:** حجم کار کارگاهی در فصول مختلف نوسانات زیادی دارد. به دلیل هزینه گزاف آموزش و استخدام کارگران جدید، مدیر کارگاه تمایلی به اخراج کارگران اضافی نـدارد از طرفی وی نمی خواهد در فصول کم کاری تعداد زیادی کـارگر اسـتخدام داشـته باشـد. بـه دلیل تولید کالاهای سفارشی در این کارگاه، امکان تولید و ذخیره کالا هم میسر نمی باشد. با این شرایط مدیر کارخانه می خواهد سیاست استخدام کارگر در فصول مختلف را بدانـد. تعداد کارگران مورد نیاز هر فصل به صورت جدول زیر است.

| فصل | بهار | تابستان | پاییز | زمستان | بهار |
|---|---|---|---|---|---|
| تعداد کارگر مورد نیاز | 255 | 220 | 240 | 200 | 255 |

# تمرین

تعداد کارگران هر فصل نمی تواند از مقادیر فوق کمتر باشد. هر کارگر اضافی نیز باعث از دست رفتن حدود ۲۰۰۰ دلار در فصل می شود. به علاوه هزینه های استخدام و اخراج کارگران با حاصل ضرب ۲۰۰ دلار در مربع تفاوت سطح استخدام دو فصل متوالی برابر است. تعداد کارگران می تواند کسری باشد چون می توان استخدام نیمه وقت داشت. سطح استخدام در هر فصل به چه صورت باشد تا هزینه کمینه شود؟

# تمرین

$n$ : تعداد فصل ها

$x_n$ : سطح استخدام در فصل $n$–ام

$S$: سطح استخدام کارگران

$r_n$: حداقل نیروی انسانی مورد نیاز در مرحله $n$ ام

$$f_n(x_n,s)=200(x_n-s)^2+2000(x_n-r_n)+f_{n+1}^*(x_n)$$

در مرحله $n=4$ (فصل بهار) شروع می کنیم:

$n=4$

| $s \backslash x_n$ | $f_4(x_n,s)$ | $x_4^*$ | $f_4^*(s)$ |
|---|---|---|---|
| $s\le 255$ | $200(x_n-s)^2+2000(x_n-255)$ | 255 | $200(255-s)^2$ |

# تمرین

برای مرحله $n=3$ (فصل زمستان)، $f_3(x_n, s)$ به صورت زیر می شود:

$$f_3(x_n, s) = \underset{200 \le x_3 \le 255}{Min} \left\{ 200(x_3 - s)^2 + 2000(x_3 - 200) + 200(255 - x_3)^2 \right\}$$

تعداد کارگران این فصل (فصل زمستان) برابر $x_3$ است و چون در ابتدای این فصل $s$ کارگر از فصل قبل امده است و لذا $x_3 - s$ کارگر باید استخدام یا اخراج شوند و هزینه استخدام و اخراج آن ها برابر با $200(x_3 - s)^2$ خواهد بود. با توجه به این که تعداد کارگران مورد نیاز برابر ۲۰۰ است، اگر تعداد کارگران این فصل ($x_3$) از ۲۰۰ بیشتر شود، باید هزینه کارگر اضافی داد. هزینه مرحله ۴ به این صورت بدست می آید که چون تعداد کارگران این فصل $x_3$ است، در ابتدای فصل بهار سطح استخدامی برابر $x_3$ است و کل هزینه استخدام برابر با $200(255 - x_3)^2$ می شود.

# تمرین

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f_3(s, x_3) = 400(x_3 - s) + 2000 - 400(255 - x_3) = 400(2x_3 - s - 250) = 0$$

$$x_3^* = \frac{s+250}{2}$$

چون مشتق دوم مثبت است، لذا $x_3^*$ کمینه است. چون $\frac{s+250}{2}$ در محدوده (۲۴۵,۲۵۲.۵) قرار دارد، لذا $\frac{s+250}{2}$ در فاصله موجه $x_3$ قرار دارد و مقدار $\frac{s+250}{2}$ کمینه است. پس از جایگزینی $x_3$ با $\frac{s+250}{2}$ در $f_3(x_3^*, s)$ خواهیم داشت:

$$n = 3$$

| $s$ | $x_3^*$ | $f_3^*(s)$ |
|---|---|---|
| $240 \le s \le 255$ | $\frac{s+250}{2}$ | $50(250-s)^2 + 50(260-s)^2 + 1000(s-150)$ |

# تمرین

برای مرحله $n=2$ (پاییز) به صورت زیر عمل می کنیم:

$$f_2(s,x_2)=200(x_2-s)^2+2000(x_2-240)+f_3^*(x_2)$$
$$=200(x_2-s)^2+2000(x_2-240)+50(250-x_2)^2$$
$$+50(260-x_2)^2+1000(x_2-150)$$

برای پیدا کردن $x_2^*$ مدل زیر حل می شود:

$$f_2^*(s)=\underset{220\le x_2\le 255}{Min} f_2(s,x_2)$$

با مشتق گیری و قرار دادن مشتق برابر صفر، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}f_2(s,x_2)=600x_2-400s-240*200=0$$
$$\rightarrow x_2^*=\frac{2s+240}{3}$$
$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}f_2(s,x_2)=600>0$$

# تمرین

اگر $240 \le s \le 255$ باشد، لذا در محدوده مجاز $x^*$ خواهد بود و $x^* = \frac{2s+240}{3}$ است

ولی اگر $220 \le s \le 240$ باشد، $x^* \le 240$ خواهد شد و حداقل $f_2(s, x_2)$ در بازه $220 \le s \le 240$ در $x^* = 240$ رخ می دهد. خلاصه نتایج برای $n=2$ در جدول زیر آمده است:

$$n = 2$$

| $s$ | $x_2^*$ | $f_2^*(s)$ |
|---|---|---|
| $220 \le s \le 240$ | $240$ | $200(240-s)^2 + 115000$ |
| $240 \le s \le 255$ | $\frac{2s+240}{3}$ | $\frac{200}{9}(2(250-s)^2 + (265-s)^2 + 30(3s-575))$ |

# تمرین

برای $n=1$ (تابستان) داریم:

$$f_1(s,x_1)=200(x_1-s)^2+2000(x_1-220)+f_2^*(x_1)$$

مقـــدار $f_2^*(x_1)$ در محـــدودهای $220\le x_1\le 240$ و $240\le x_1\le 255$ دارای دو مقـــدار متفاوت است، لذا $f_1(s,x_1)$ به صورت زیر می توان نوشت:

$$f_1(s,x_1)=\begin{cases}200(x_1-s)^2+2000(x_1-220)+2000(240-x_1)^2+115000 & 220\le x_1\le 240\\ 200(x_1-s)^2+2000(x_1-220)+ & \\ \frac{200}{9}\left[2(250-x_1)^2+(265-x_1)^2+30(3x_1-575)\right] & 240\le x_1\le 255\end{cases}$$

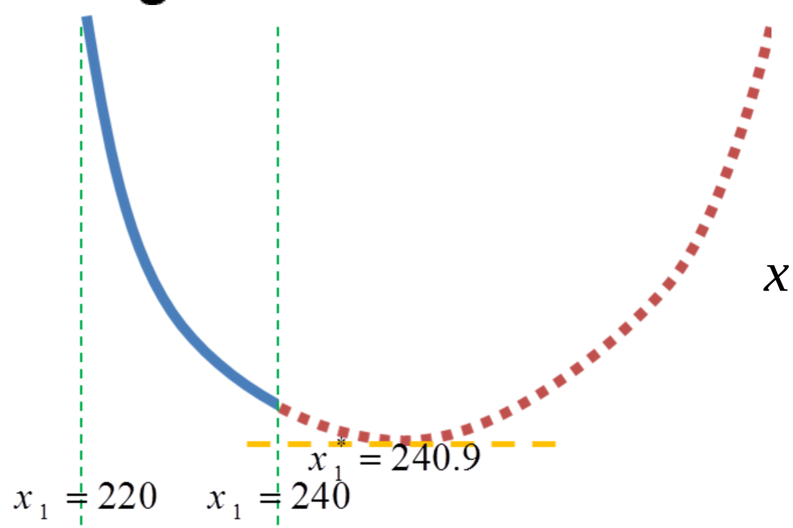
# تمرین

برای یافتن مقدار بهینه $f_1(s,x_1)$، ابتدا فرض می کنیم $x_1 \le 240$، مشتق $f_1(s,x_1)$ بـر حسب $x_1$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) = 4400x_1 - 400s - 958000) = 0$$

با توجه به این که $s = 255$ است، لذا برای تمامی مقادیر $x_1 \le 240$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s,x_1) < 0$$




$$x_1^* = 240.9$$

# تمرین

$f_2^* = 200000$ لذا حداقل روی ناحیه $x_1 \le 240$ به ازای $x_1 = 240$ رخ می دهد.

اگر $240 \le x_1 \le 255$ باشد آنگاه :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s, x_1) = \tfrac{400}{3}(4x_1 - 3s - 225) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3s + 225}{4}$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_1(s, x_1) = \frac{1600}{3} > 0$$

چون در این مرحله، $s = 255$ است، پس در ناحیـه $240 \le x_1 \le 255$ حـداقل $f_1(s, x_1)$ به ازای $x_1 = 247.5$ ایجاد می شود که از مقدار کمینه تابع هـدف دربـازه $220 \le x_1 \le 240$ کمتر است لذا داریم:

$$f_1^*(255) = f_1^*(255, 247.5) = 185000 < 200000$$

# تمرین

خلاصه نتایج $n=1$ در جدول زیر آمده است:

$n=1$

| $s$ | $x_1^*$ | $f_1^*(s)$ |
|---|---|---|
| 255 | 247.5 | 185000 |

لذا سیاست بهینه برابر با $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (247.5, 245, 247.5, 255)$ و هزینه کل ۱۸۵۰۰۰ است.

# تمرین

**تمرین:** برنامه ریزی خطی زیر را از روش برنامه ریزی پویا حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 \leq 4 \\
&\qquad 2x_2 \leq 12 \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

# تمرین

$n$ برابر ۲ و برابر با متغیرهای تصمیم گیری است.

حل:

$(R_1,R_2,R_3)$ بردار حالت است که $R_i$ مقدار باقی مانده از منبع $i$ است.

$x_i$ مقدار متغیر $i$–ام است.

برای $n=2$ داریم:

مقدار تابع $f_2(R_1,R_2,R_3,x_2)$ برابر $5x_2$ است که مقدارهای $x_2$ باید محدودیت های $2x_2 \le R_2$ و $2x_2 \le R_3$ را برآورده کند. لذا برای محاسبه $x_2^*$ مدل زیر را باید حل کرد:

$$f_2^*(R_1,R_2,R_3) = Max\ f_2(R_1,R_2,R_3,x_2) = Max\ \{5x_2\}$$

$$\begin{aligned} &2x_2 \le R_2 \\ &2x_2 \le R_3 \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

# تمرین

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$n = 2$

| $(R_1, R_2, R_3)$ | $f_2^*(R_1, R_2, R_3)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|
| $R_i \geq 0$<br>$i = 1, \ldots, 3$ | $5 \min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\}$ | $\min\left\{\frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2}\right\}$ |

# تمرین

برای $n=1$ داریم:

$$f_1^*(R_1,R_2,R_3)=Max\ f_1(R_1,R_2,R_3,x_1)=Max\ \{3x_1+f_2^*(R_1-x_1,R_2,R_3-3x_1)\}$$
$$x_1 \le R_1$$
$$3x_1 \le R_3$$
$$x_1 \ge 0$$

چون در مرحله اول از منـابع اسـتفاده نشـده اسـت، لـذا $R_1=4$ و $R_2=12$ و $R_3=18$ است. لذا $f_1^*$ به صورت زیر می شود.

$$f_1^*(4,12,18)=\max\{3x_1+f_2^*(4-x_1,12,18-3x_1)\}$$
$$x_1 \le 4$$
$$3x_1 \le 18$$
$$x_1 \ge 0$$
$$=\max_{0\le x_1\le 4}\left\{3x_1+5\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}\right\}$$

# تمرین

توجه داشته باشید که

$$\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}=\begin{cases}6 & 0\le x_1\le 2\\ 9-1.5x_1 & 2\le x_1\le 4\end{cases}$$

با جایگزینی دو عبارت فوق در هم داریم:

$$3x_1+5\min\left\{\frac{12}{2},\frac{18-3x_1}{2}\right\}=\begin{cases}3x_1+30 & 0\le x_1\le 2\\ 45-4.5x_1 & 2\le x_1\le 4\end{cases}$$

با توجه به این که در $x_1=2$ هر دو عبارت $3x_1+30$ و $45-4.5x_1$ بیشینه می شود، لذا $x_1^*=2$ می شود و خواهیم داشت: $(R_1,R_2,R_3)=(2,12,12)$ و $x_2^*=6$ و سود کل برابـر بـا ۳۶ خواهد شد.

# تمرین

تمرین: صاحب یک فروشگاه زنجیره ای، ۵ جعبه تـوت فرنگـی بـرای فـروش در سـه شعبه خود خریداری کرده است. مقدار فروش توت فرنگی در این سه شعبه متناوب است. لذا صاحب فروشگاه مایل است که این ۵ جعبه را طوری به سه شعبه تخصیص دهد که امید ریاضی کل سود حاصل حداکثر شود. همچنین مانعی نیست که یک فروشگاه تـوت فرنگـی نداشته باشد. جدول زیر، امید ریاضی سود هر شعبه را با در نظر گرفتن تعـداد جعبـه تـوت فرنگی که به آن شعبه اختصاص یابد نشان می دهد.

# تمرین

| تعداد جعبه | شماره شعبه 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | 6 | 4 |
| 2 | 9 | 11 | 9 |
| 3 | 14 | 15 | 13 |
| 4 | 17 | 19 | 18 |
| 5 | 21 | 22 | 20 |

**با استفاده از برنامه ریزی پویا چگونگی تخصیص این ۵ جعبه به سه شعبه را طوری تعیین کنید که امید ریاضی سود کل حداکثر شود.**

# تمرین

**حل:**

$x_n$ : تعداد جعبه های توت فرنگی به شعبه $n$ تخصیص داده شده است.

$p_n(x_n)$: امید سود فروش از تخصیص $x_n$ جعبه به شعبه $n$

$s_n$: تعداد جعبه های باقی مانده برای تخصیص به شعب

تعداد مراحل برابر ۳ است.

$$f_n^*(s_n) = \max_{0 \le x_n \le s_n} \left[ p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right]$$

# تمرین

$$n = 3$$

| $s_3$ | $f_3^*(s)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 1 |
| 2 | 9 | 2 |
| 3 | 13 | 3 |
| 4 | 18 | 4 |
| 5 | 20 | 5 |

# تمرین

$s_3 = 0$ : در این صورت هیچ جعبه ای برای تخصیص به شعبه شماره ۳ باقی نمانده است و لذا سودی نمی توان انتظار داشت.

$s_3 = 1$: در این صورت ۱ جعبه باقی مانده است و از تخصیص این جعبه، سود ۴ واحدی عاید می شود.

# تمرین

$n = 2$

| $s_2 \backslash x_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | – | – | – | – | – | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 6 | – | – | – | – | 6 | 1 |
| 2 | 9 | 10 | 11 | – | – | – | 11 | 2 |
| 3 | 13 | 15 | 15 | 15 | – | – | 15 | 1 *or* 2 *or* 3 |
| 4 | 18 | 19 | 20 | 19 | 19 | – | 20 | 2 |
| 5 | 20 | 24 | 24 | 24 | 23 | 22 | 24 | 1 *or* 2 *or* 3 |

# تمرین

$s_2=0$ و $x_2=0$: در این صورت جعبه ای برای تخصیص به شعبه شماره ۲ باقی نمانده و لذا در این شعبه و شعبه ۳ سودی عاید صاحب شعب نمی شود.

$s_2=0$ و $x_2>0$: به دلیل اینکه هیچ جعبه ای باقی نمانده است، لذا امکان تخصیص جعبه به شعبه ۲ و۳ نیست و لذا با – نشان داده شده است.

$s_2=1$ و $x_2=1$: در این صورت یک جعبه برای تخصیص باقی مانده است که این جعبه به شعبه ۲ تخصیص می یابد و جعبه ای برای شعبه ۳ باقی نمی ماند و لذا سود حاصل برابر ۰+۶ می شود.

# تمرین

$s_2=3$ و $x_2=2$: در این صورت ۳ جعبه برای تخصیص باقی مانده است کـه دو جعبـه برای شعبه ۲ و یک جعبه برای شعبه ۳ است لذا سود حاصل برابر با ۴+۱۱=۱۵ می شود.

$s_2=5$ و $x_2=3$: در این صورت ۵ جعبه برای تخصیص باقی مانده است که سه جعبـه به شعبه ۲ و ۲ جعبه باقی مانده به شعبه ۳ تخصیص داده می شود. لذا سود حاصل برابر بـا ۱۵+۹=۲۴ می شود.

# تمرین

$n = 1$

| $s_1 \backslash x_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 24 | 25 | 24 | 25 | 23 | 21 | 25 | $1\ or\ 3$ |

این مسئله دارای دو جواب بهینه به صورت زیر است:

| جواب بهینه | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 0 |

# تمرین

تمرین: دانشجویی ۷ روز هفته وقت دارد تا برای ۴ امتحان اماده شود. بـرای آمـادگی هر درس حداقل یک روز نیاز دارد. این دانشجو برای تمرکز بیشتر تصمیم گرفته است که در یک روز بیش از یک درس نخواند. بنابراین می تواند برای هر درس، یـک، دو، سـه، یـا چهار روز وقت بگذارد. با استفاده از برنامه ریزی پویا چطور می تواند خود را برای امتحـان این ۴ درس آماده کند. نمره این دانشجو برای هر درس با توجه بـه تعـداد روز هـایی کـه مطالعه می نماید به صورت زیر پیش بینی شده است:

# تمرین

| تعداد روز های مطالعه | برآورد نمره بدست آمده از درس شماره 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 6 | 6 | 4 |
| 3 | 6 | 8 | 7 | 5 |
| 4 | 8 | 8 | 9 | 8 |

# تمرین

**حل:**

$x_n$ : برابر تعداد روز های مطالعه درس $n$ –ام

$p_n(x_n)$: نمره اخذ شده پس از $x_n$ روز مطالعه درس $n$–ام

$s_n$: تعداد روز های باقی مانده برای مطالعه

$$f_n^*(s_n) = \max_{1 \le x_n \le \min(s_n, 4)} \left[ p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right]$$

تعداد مراحل برابر ۴ است.

# تمرین

$n = 4$

| $s_4$ | $f_4^*(s)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 8 | 4 |

# تمرین

$n = 3$

| $s_3$ \ $x_3$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | – | – | – | 8 | 1 |
| 3 | 8 | 10 | – | – | 10 | 2 |
| 4 | 9 | 10 | 11 | – | 11 | 3 |
| 5 | 12 | 11 | 11 | 13 | 13 | 4 |

# تمرین

$s_3 = 2$ و $x_3 = 1$: در این حالت ۲ روز برای مطالعه باقی مانده است که یک روز آن به درس ۳ تخصیص می یابد و یک روز باقی مانده می تواند به درس ۴ تخصیص یابد که در این صورت میانگین نمره وی ۴+۴=۸ می شود.

$s_3 = 3$ و $x_3 = 1$: در این حالت ۳ روز برای مطالعه باقی مانده است که یک روز برای مطالعه درس ۳ استفاده می شود و دو روز باقی مانده به درس ۴ –ام تخصیص می یابد. در این صورت میانگین نمره وی ۴+۴=۸ می شود.

$s_3 = 4$ و $x_3 = 2$: در این حالت ۴ روز برای مطالعه باقی مانده است که دو روز برای مطالعه درس ۳ استفاده می شود و دو روز باقی مانده برای درس ۴–ام استفاده می شود. در این صورت میانگین نمره وی ۶+۴=۱۰ می شود.

# تمرین

$s_3 = 5$ و $x_3 = 3$: در این حالت ۵ روز برای مطالعه باقی مانده است که سه روز برای درس سوم استفاده می شود و ۲ روز باقی مانده برای درس ۴. لذا نمره قابل انتظار وی برابر با ۷+۴=۱۱

$n = 2$

| $s_2 \backslash x_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 13 | – | – | – | 13 | 1 |
| 4 | 15 | 14 | – | – | 15 | 1 |
| 5 | 16 | 16 | 16 | – | 16 | 1 *or* 2 *or* 3 |
| 6 | 18 | 17 | 18 | 16 | 18 | 1 *or* 3 |

## تمرین

$s_2=3$ و $x_2=1$: در این حالت ۳ روز برای مطالعه باقی مانده است که یـک روز بـرای درس دوم گذاشته می شود. در این صورت معدل وی برابر  ۵+۸=۱۳ خواهد شد.

$s_2=4$ و $x_2=2$: در این حالت ۴ روز برای مطالعه باقی مانده اسـت کـه دو روز بـرای درس دوم گذاشته می شود که در این صورت معدل وی برابر با ۶+۸=۱۴ می شود.

نکته: به دلیل این که دانشجو باید حداقل یک روز برای هر درس تخصیص دهد، تعداد روز های باقی برای درس ۲ نباید از سه روز کمتر باشد.

# تمرین

$n = 1$

| $s_1 \backslash x_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 19 | 19 | 21 | 21 | 21 | $3 \ or \ 4$ |

**با توجه به این که درس اول ابتدای هفته است، لذا ۷ روز برای مطالعه باقی مانده است.**

**$s_1 = 7$ و $x_1 = 3$: در این حالت۷ روز برای مطالعه باقی مانده است که ۳ روز برای درس اول، و مابقی برای درس های بعدی استفاده می شود که لذا معدل وی برابر با ۱۵+۶=۲۱ می شود. براساس جدول بالا، جواب بهینه به صورت جدول زیر است:**

| جواب بهینه | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $x_3^*$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 1 | 1 | 1 |

# تمرین

**تمرین:** مسئول منطقه یک حزب سیاسی مشغول برنامه ریزی تبلیغاتی انتخاباتی است. برای این منظور می تواند از خدمات ۵ نفر استفاده کند تا در ۴ حوزه فعالیت کنند. با توجه به این که اگر یک دستیار در بیش از یک حوزه فعالیت کند، بازدهی وی کاهش پیدا می کند، لذا هر دستیار به یک حوزه گماشته می شود. همچنین حوزهای می تواند بدون دستیار بماند. برآورد می شود که افزایش تعداد آرا کاندیدا در هر حوزه با توجه به دستیارانی که برای حوزه گماشته شده است، به شرح جدول زیر است:

# تمرین

| تعداد دستیار | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | حوزه | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 6 | 5 | 3 |
| 2 | 7 | 8 | 9 | 7 |
| 3 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 12 | 11 | 10 | 14 |
| 5 | 15 | 12 | 9 | 16 |

# تمرین

**حل:**

$x_n$: تعداد دستیاران فعال در حوزه $n$–ام

$p_n(x_n)$: تعداد آرا وقتی $x_n$ دستیار گماشته می شود.

$s_n$: تعداد دستیاران گماشته نشده تا مرحله $n$–ام.

$$f_n^*(s_n) = \max_{0 \le x_n \le s_n} \left[ p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n) \right]$$

تعداد حالات برابر ۴ فرض می شود:

# تمرین

$n = 4$

| $s_4$ | $f_4^*(s)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 1 |
| 2 | 7 | 2 |
| 3 | 12 | 3 |
| 4 | 14 | 4 |
| 5 | 16 | 5 |

# تمرین

$n = 3$

| $s_3 \backslash x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | – | – | – | – | – | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 5 | – | – | – | – | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 8 | 9 | – | – | – | 9 | 2 |
| 3 | 12 | 12 | 12 | 11 | – | – | 12 | 0 *or* 1 *or* 2 |
| 4 | 14 | 17 | 16 | 14 | 10 | – | 17 | 1 |
| 5 | 16 | 19 | 21 | 18 | 13 | 9 | 21 | 2 |

# تمرین

اگر $s_3 = 1$ و $x_3 = 0$ باشد، در این صورت برای حوزه های ۳ و ۴ تنها یک دستیار باقی مانده است که به حوزه ۳ تعلق نمی گیرد و تنها به حوزه ۴ داده می شود و تعداد آرا برابـر با ۰+۳=۳ می شود.

اگر $s_3 = 2$ و $x_3 = 1$ باشد، در این صورت برای حوزه های ۳ و ۴ دو دستیار باقی مانده است که به حوزه ۳ یک نفر تخصیص می یابد و یک نفر به حوزه ۴ تخصیص می یابد که در این صورت تعداد آرا برابر با ۳+۵=۸ می شود.

اگر $s_3 = 3$ و $x_3 = 3$ باشد، در این صورت سه نفر برای تخصیص به حوزه هـای ۳ و ۴ باقی مانده است که هر سه نفر به حوزه ۳ تخصیص می یابد و به حـوزه ۴ فـردی تخصیـص داده نمی شود و لذا مقدار کل آرا برابر با ۱۱+۰=۱۱ می شود.

اگر $s_3 = 5$ و $x_3 = 2$ باشد، در این صورت ۵ نفر برای تخصیص بـه حـوزه هـای ۳ و ۴ باقی مانده است که ۲ نفر به حوزه ۳ و ۳ نفر به حوزه ۴ تخصیص داده می شود، لذا تعـداد آرا برابر با ۹+۱۲=۲۱ می شود.

# تمرین

$n = 2$

| $s_2 \backslash x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | – | – | – | – | – | 0 | 0 |
| 1 | 5 | 6 | – | – | – | – | 6 | 1 |
| 2 | 9 | 11 | 8 | – | – | – | 11 | 1 |
| 3 | 12 | 15 | 13 | 10 | – | – | 15 | 1 |
| 4 | 17 | 18 | 17 | 15 | 11 | – | 18 | 1 |
| 5 | 21 | 23 | 20 | 19 | 16 | 12 | 23 | 1 |

# تمرین

$n = 1$

| $s_1 \backslash x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 23 | 22 | 22 | 20 | 18 | 15 | 23 | 0 |

براساس جداول بالا، جواب بهینه به صورت زیر می شود:

| جواب بهینه | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $x_3^*$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |

# تمرین

**تمرین:** با استفاده از برنامه ریزی پویا، مسئله برنامه ریزی خطی زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ 15x_1 + 10x_2 \\
&\quad x_1 + 2x_2 \le 6 \\
&\quad 3x_1 + x_2 \le 8 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

# تمرین

**حل:**

در نظر بگیرید $S=(R_1,R_2)$ که $R_i$ کمبود محدودیت $i$–ام است.

$$n=2 \rightarrow f_2(R_1,R_2,x_2)=10x_2,\ 0\le x_2 \le \min\left\{\frac{R_1}{2},R_2\right\}$$

$n=2$

| $s$ | $x_2^*$ | $f_2^*(s)$ |
|---|---|---|
| $(R_1,R_2)$ | $Min\left\{\frac{R_1}{2},R_2\right\}$ | $10Min\left\{\frac{R_1}{2},R_2\right\}$ |

## تمرین

$$n = 1 \rightarrow f_1(6,8,x_1) = 15x_1 + f_2^*(6-x_1, 8-3x_1)$$

$$= 15x_1 + 10 \min_{0 \le x_1 \le \frac{8}{3}} \left\{ \frac{6-x_1}{2}, 8-3x_1 \right\} = \begin{cases} 10x_1 + 30 & 0 \le x_1 \le 2 \\ 80 - 15x_1 & 2 \le x_1 \le \frac{8}{3} \end{cases}$$

مقدار بیشینه $f_1(.)$ در $x_1 = 2$ رخ می دهد که مقدار $f_1^* = 50$ می شود و لذا جواب بهینه $(x_1^*, x_2^*) = (2,2)$ و $z^* = 50$ می شود.

# تمرین

**تمرین:** مسئله برنامه ریزی غیرخطی و عدد صحیح زیر را با استفاده از برنامه ریزی پویا حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 3x_1^2 - x_1^3 + 5x_2^2 - x_2^3 \\
&s.t. \\
&\quad x_1 + 2x_2 \le 4 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

# تمرین

**حل:** حالت، مقدار باقی مانده از محدودیت است. تعداد حالت برابر با ۲ است.

$$n = 2$$

| $s_2$ | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 |
| 4 | 12 | 2 |

$$Max \quad Z = 3x_1^2 - x_1^3 + 5x_2^2 - x_2^3$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{int}$$

# تمرین

$n = 1$

| $x_1$ \ $s_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 12 | 6 | 8 | 0 | $-16$ | 12 | 0 |

جواب بهینه $(x_1^*, x_2^*) = (0,2)$ و $z^* = 12$ است.

$$Max \quad Z = 3x_1^2 - x_1^3 + 5x_2^2 - x_2^3$$

$s.t.$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{int}$$

# تمرین

**مثال:** مدل برنامه ریزی غیر خطی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید. مقدار بهینه را با استفاده از روش برنامه ریزی پویا محاسبه کنید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 32x_1 - 2x_1^2 + 30x_2 + 20x_3 \\
&s.t. \\
&\qquad 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 20 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

# تمرین

حل: حالت، مقدار باقی مانده از محدودیت است و تعداد مراحل برابـر ۳ اسـت. هـدف پیدا کردن مقدار $f_1^*(20)$ :

$n=3$

| $s_3$ | $f_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|
| $0-4$ | 0 | 0 |
| $5-9$ | 20 | 1 |
| $10-14$ | 40 | 2 |
| $15-19$ | 60 | 3 |
| 20 | 80 | 4 |

$$Max \quad 32x_1 - 2x_1^2 + 30x_2 + 20x_3$$
$$s.t.$$
$$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{int}$$

با توجه به این که برای تمامی اعداد بین ۰ تا ۴، مقدار بهینه $f_3^*(s_3)$ و $x_3^*$ یکسان است لذا $s_3$ به صورت بازه ی $0-4$ نشان داده می شود تا در جدول اختصار شود. اگر $s_3$ از ۵ تا ۹ شود، لذا $x_3$ می توان یک باشد که در این صورت مقدار $f_3^*(s_3)$ برابر ۲۰ است.

# تمرین

$$\begin{aligned}&Max \quad 32x_1 - 2x_1^2 + 30x_2 + 20x_3\\&s.t.\\&\quad 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 20\\&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{int}\end{aligned}$$

$n = 2$

| $s_2 \backslash x_2$ | 0 | 1 | 2 | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 – 4 | 0 | – | – | 0 | 0 |
| 5 – 6 | 20 | – | – | 20 | 0 |
| 7 – 9 | 20 | 30 | – | 30 | 1 |
| 10 – 11 | 40 | 30 | – | 40 | 0 |
| 12 – 13 | 40 | 50 | – | 50 | 1 |
| 14 | 40 | 50 | 60 | 60 | 2 |
| 15 – 16 | 60 | 50 | 60 | 60 | 0 or 2 |
| 17 – 18 | 60 | 70 | 60 | 70 | 1 |
| 19 | 60 | 70 | 80 | 80 | 2 |
| 20 | 80 | 70 | 80 | 80 | 0 or 2 |

# تمرین

فرض کنید $s_2 = 5-6$ باشد و $x_2 = 0$ باشد، در این صورت $x_3$ می تواند ۱ باشد که مقدار تابع هدف برابر با ۲۰+۰=۲۰ می شود.

فرض کنید $s_2 = 10-11$ باشد و $x_2 = 1$ باشد، در این صورت $5x_3 \leq 3-4$ می شود و که در این صورت $x_3 = 0$ است و لذا مقدار تابع هدف برابر با ۳۰+۰=۳۰ است.

فرض کنید $s_2 = 17-18$ باشد و $x_2 = 2$ باشد، در این صورت $s_3 = 3-4$ می شود که $x_3 = 0$ می شود و لذا تابع هدف برابر با ۰+۶=۶ می شود.

$n = 1$

| $s_1 \backslash x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $f_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 80 | 100 | 116 | 118 | 126 | 130 | 120 | 130 | 5 |

جواب بهینه $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (5,0,1)$ و $z^* = 130$ است.

$$Max \quad 32x_1 - 2x_1^2 + 30x_2 + 20x_3$$
$$s.t.$$
$$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{int}$$

# تمرین

**تمرین: مدل برنامه ریزی غیرخطی زیر را با استفاده از برنامه ریزی پویا حل کنید.**

$$\begin{aligned} &Max \quad 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 - x_3^2 \\ &s.t. \\ &\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{int} \end{aligned}$$

# تمرین

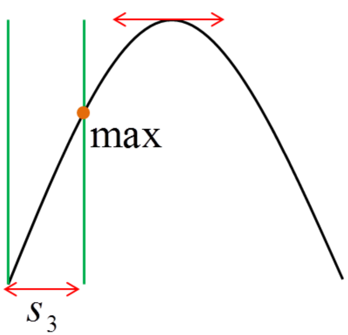
**حل:** $s_n$ ، میزان باقی ماده از منبع در مرحله $n$–ام است.

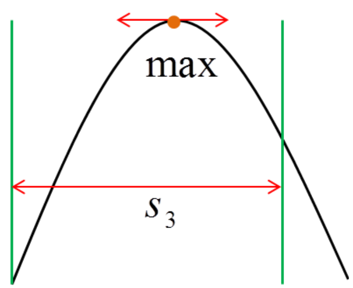
$$n = 3$$

$$\max_{0 \le x_3 \le s_3} \; 4x_3 - x_3^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(4x_3 - x_3^2) = 4 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_3^* = 2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(4x_3 - x_3^2) = -2 < 0$$




$n = 3$

| $s_3$ | $f_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|
| $0 \le s_3 \le 2$ | $4s_3 - s_3^2$ | $s_3$ |
| $2 \le s_3 \le 4$ | $4$ | $2$ |

# تمرین

$n = 2$

$$\max_{0 \le x_2 \le s_2} \left[2x_2 + f_3^*(s_2 - x_2)\right]$$

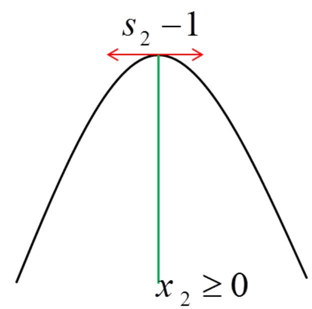
$$if \;\; 0 \le s_2 - x_2 \le 2: \max_{0 \le x_2 \le s_2} \left[2x_2 + 4(s_2 - x_2) - (s_2 - x_2)^2\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[2x_2 + 4(s_2 - x_2) - (s_2 - x_2)^2\right] = -2 + 2s_2 - 2x_2 = 0$$

$$\rightarrow x_2^* = s_2 - 1; f_2^*(s_2) = 2s_2 + 1$$

$$if \;\; 2 \le s_2 - x_2 \le 4: \max_{0 \le x_2 \le s_2} (2x_2 + 4)$$

$$\rightarrow x_2^* = s_2 - 2; f_2^*(s_2) = 2s_2 \le 2s_2 + 1$$




$n = 2$

| $s_2$ | $f_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|
| $0 \le s_2 \le 1$ | $4s_2 - s_2^2$ | $0$ |
| $1 \le s_2 \le 4$ | $2s_2 + 1$ | $s_2 - 1$ |

# تمرین

$$n = 1$$

$$\max_{0 \le x_1 \le s_1} \left[ 2x_1^2 + f_2^*(4 - 2x_1) \right]$$

$$if \;\; 0 \le 4 - 2x_1 \le 1 \rightarrow \max_{0 \le x_1 \le s_1} \left[ 2x_1^2 + 4(4 - 2x_1) - (4 - 2x_1)^2 \right] = \max_{0 \le x_1 \le s_1} \left[ -2x_1^2 + 8x_1 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(-2x_1^2 + 8x_1) = -4x_1 + 8 = 0 \rightarrow x_1^* = 2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(-2x_1^2 + 8x_1) = -4 < 0$$

$$Max \quad 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 - x_3^2$$

$s.t.$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{int}$$

با توجه به موارد بالا، $x_1^* = 2$ یک نقطه بیشینه یا *max* است و داریم: $f_1^*(4,2) = 8$

# تمرین

$$if \;\; 1 \le 4-2x_1 \le 4 \rightarrow \max_{0\le x_1 \le s_1}\left[2x_1^2+2(4-2x_1)+1\right]=\max_{0\le x_1 \le s_1}\left[2x_1^2-4x_1+9\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1^2-4x_1+9)=4x_1-4=0 \rightarrow x_1^*=1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(2x_1^2-4x_1+9)=4>0$$

با توجه به موارد بالا، $x_1^*=1$ یک نقطه کمینه یا *Min* است.

برای یافتن جواب بیشینه، باید نقاط گوشه را چک کرد:

$$1=4-2x_1 \rightarrow x_1=1.5, f_1(4,1.5)=7.5$$

$$4=4-2x_1 \rightarrow x_1=0, f_1(4,0)=9 \rightarrow \max$$

با توجه به موارد بالا، جواب بهینه $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(0,3,1)$ و $f_1^*(4)=9$ است.

# با تشکر

## راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com