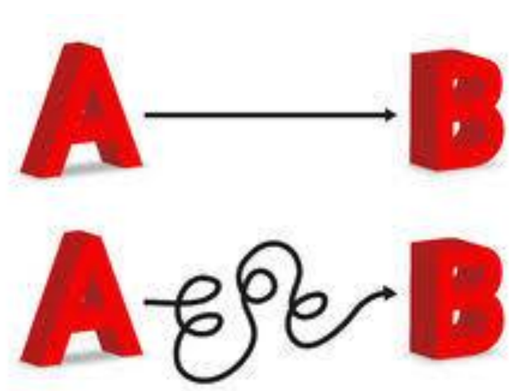
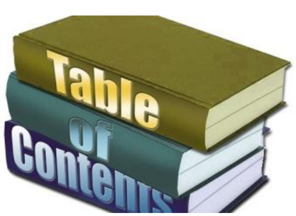
بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP Net DP

به نام خدا

درس ۶: مسئله کوتاهترین مسیر



فهرست مطالب



مسئله عمومی جریان در شبکه

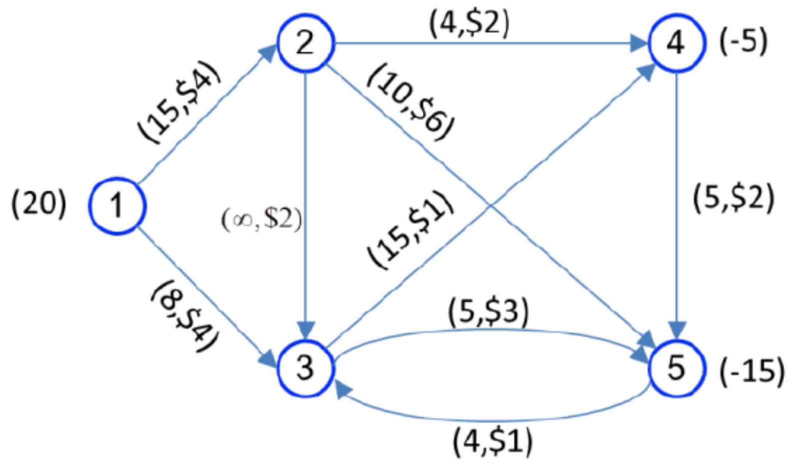
تا کنون به بررسی مسئله برنامه ریزی خطی به صورت کلي پرداختیم. در این بخش بـه بررسـی انـواع خـاص مسئله برنامه ریزی خطی خواهیم پرداخت. در این بخش ابتدا به بررسی مدل عمومی جریان در شبکه پرداختیم و سپس به بررسی مسئله حمل و نقل که حالت خاصی از مسئله جریان در شبکه است، خواهیم پرداخت.

مسئله عمومی جریان در شبکه

در مسئله جریان در شبکه، به دنبال توزیـع محصـول همگـن از کارخانـه (مبـادی) بـه بـازار فـروش (مقاصـد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول مـورد نیـاز معلـوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیما به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریـق سـایر نقـاط بـه مراکز توزیع ارسال شود. به علاوه، قید های ظرفیت بعضی از خطوط حمل و نقل را محدود می کند. هـدف در ایـن مسئله کمینه کردن هزینه حمل محصول ها است.

مسئله عمومی جریان در شبکه

مثال عددی از مسئله جریان در شبکه در شکل زیر را در نظر بگیرید. گره ها با دایره های شماره دار و کمان ها با کمان ها نشان داده شده اند. کمان ها جهت دار هستند. مثلا مواد می توانند از گره ۱ به گره ۲ فرستاده شود ولی از گره ۲ به گره ۱ این امکان وجود ندارد.



در مسئله جریان در شبکه، هدف یافتن الگوی جریان با هزینه کمینه است. برای تبدیل مسئله به صورت برنامه ریزی خطی، فرض کنید:

x_{ij} : تعداد واحدهای حمل شده از گره *i* به گره *j* با استفاده از کمان *i-j* است.

مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل برنامه ریزی خطی جریان در شبکه به صورت زیر ارایه می شود.

$$Min \quad 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + x_{53}$$

$s.t.$

$$\begin{array}{llllllllllll}
(1) & x_{12} & +x_{13} & & & & & & & & = 20 \\
(2) & -x_{12} & & +x_{23} & +x_{24} & +x_{25} & & & & & = 0 \\
(3) & & -x_{13} & -x_{23} & & & +x_{34} & +x_{35} & & -x_{53} & = 0 \\
(4) & & & & -x_{24} & & -x_{34} & & +x_{45} & & = -5 \\
(5) & & & & & -x_{25} & & -x_{35} & -x_{45} & +x_{53} & = -15
\end{array}$$

$$x_{12} \le 15; x_{13} \le 8; x_{23} \le \infty; x_{24} \le 4; x_{25} \le 10; x_{34} \le 15; x_{35} \le 5; x_{45} \le \infty; x_{53} \le 4.$$

مسئله عمومی جریان در شبکه

معادلات ۱ تا ۵، معادلات توازن جریان در شبکه است. برای مثال معادله جریان تعادل در گره ۱ به صورت زیر می شود.

$$x_{12} + x_{13} = 20$$

معادله فوق این نکته را بیان می کند که جریان خروجی از گره ۱ ($x_{12} + x_{13}$)، باید برابر با میزان عرضه گره ۱ (۲۰) باشد.

معادله توازن در گره ۲، بیان می کند که جریان ورودی به گره ۲ (x_{12}) برابر جریان خروجی از گره ۲ ($x_{23} + x_{24} + x_{25}$) است.

مسئله عمومی جریان در شبکه

مدل جریان در شبکه دارای ساختار خاصی است که برای ارایه دستور حل از آن مورد استفاده قرار می گیرد.

متغیرهای جریان x_{ij} در معادلات توازن فقط ضریب ۰، ۱+ و ۱- اخذ می کنند. به علاوه دقیقا در دو معادله توازن ظاهر می شوند: یک بار با ضریب ۱+ مربوط به گره ای که از آن سرچشمه می گیرند و ۱- مربطه به گره ای که به آن وارد می شوند.

$$Min \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{k=1} x_{ki} = b_i \quad i = 1,\dots,n$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$$

مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه

یکی از کاربردهای عملی تئوری شبکه ها در حل مسائل موجود در دنیای واقع مربوط به تعیین کوتاهترین مسیر در شبکه است.

در این مبحث شبکه هایی مورد بررسی قرار می گیرند که گره های آن به مثابه نقاط مختلف موجود در یک منطقه و شاخه ها نقش مسیرهای ارتباطی بین این نقاط را ایفا می کنند.

هدف، تعیین مسیری بین مبدا و مقصد حرکت است که اگر این مسیر برای حرکت انتخاب شود، کمترین فاصله طی می شود که به آن کوتاهترین مسیر در شبکه گفته می شود.

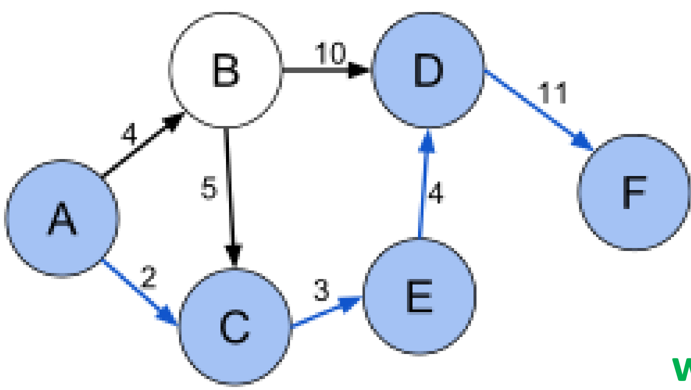
شبکه هایی که در رابطه با این مطلب مطرح می شوند، از لحاظی به دو نوع تقسیم می شوند:

- شبکه های بدون حلقه
- شبکه های دارای حلقه

شبکه های بدون حلقه

روش ساده کوتاهترین مسیر

در این روش یک حرکت محاسباتی از گره مبدا(شروع) تا گره مقصد(پایان) انجام می شود. در طی این حرکت محاسباتی، به هر گره یک کد (m) اختصاص می یابد که نشان دهنده کوتاهترین فاصله آن گره از گره شروع است.



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

گام های الگوریتم این روش به صورت زیر است:

گام ۱: به گره شروع، کد برابر با صفر اختصاص دهید($m_1 = 0$).

گام ۲: کد گره j (m_j) را از رابطه زیر بدست آورید:

$$m_j = \underset{i \in S}{Min}(m_i + d_{ij}) \quad i = 1,2,\dots,j-1 \quad , \quad j = 2,3,\dots,n$$

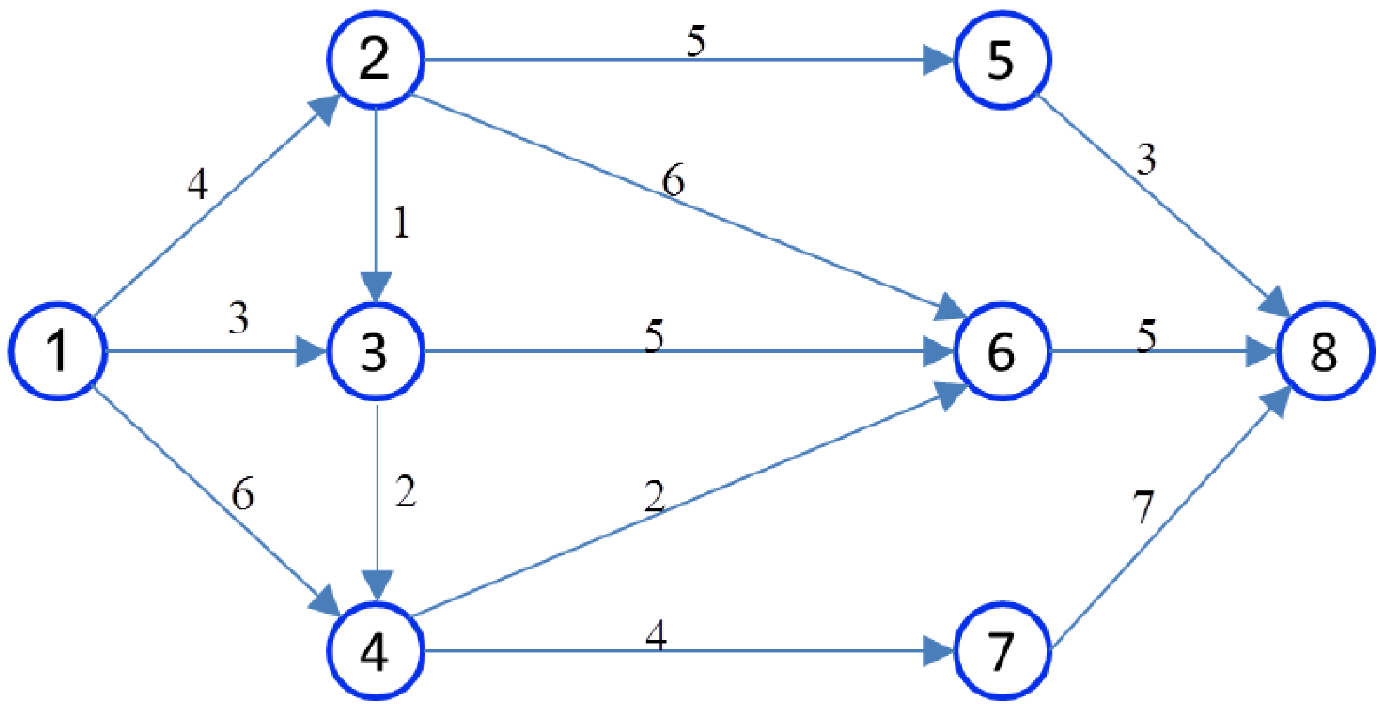
که در آن S مجموعه گره هایی است که شاخه های ورودی به گره J از آن گره ها خارج شده اند و d_{ij} فاصله مستقیم از گره i تا گره j است

گام ۳: هنگامی که گره پایان کد گرفت (m_n)، این کد معرف کوتاهترین فاصله بین گره شروع و پایان شبکه است.

گام ۴: به منظور یافتن کوتاهترین مسیر، از روش حرکت برگشتی استفاده می شود. به بیان دیگر هر یک از شاخه های ورودی به یک گره که تعیین کننده کد آن گره است، بر روی کوتاهترین مسیر قرار دارد.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

مثال: با استفاده از روش ساده حسی، کوتاهترین فاصله و مسیر بین گره های ۱ و ۸ در شبکه شکل زیر را تعیین کنید. فاصله مستقیم بین هر دو گره مجاور بر روی شاخه متصل کننده آن دو درج شده است.



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

حل: ابتدا کد گره ۱ را برابر صفر در نظر گرفته می شود($m_1 = 0$).

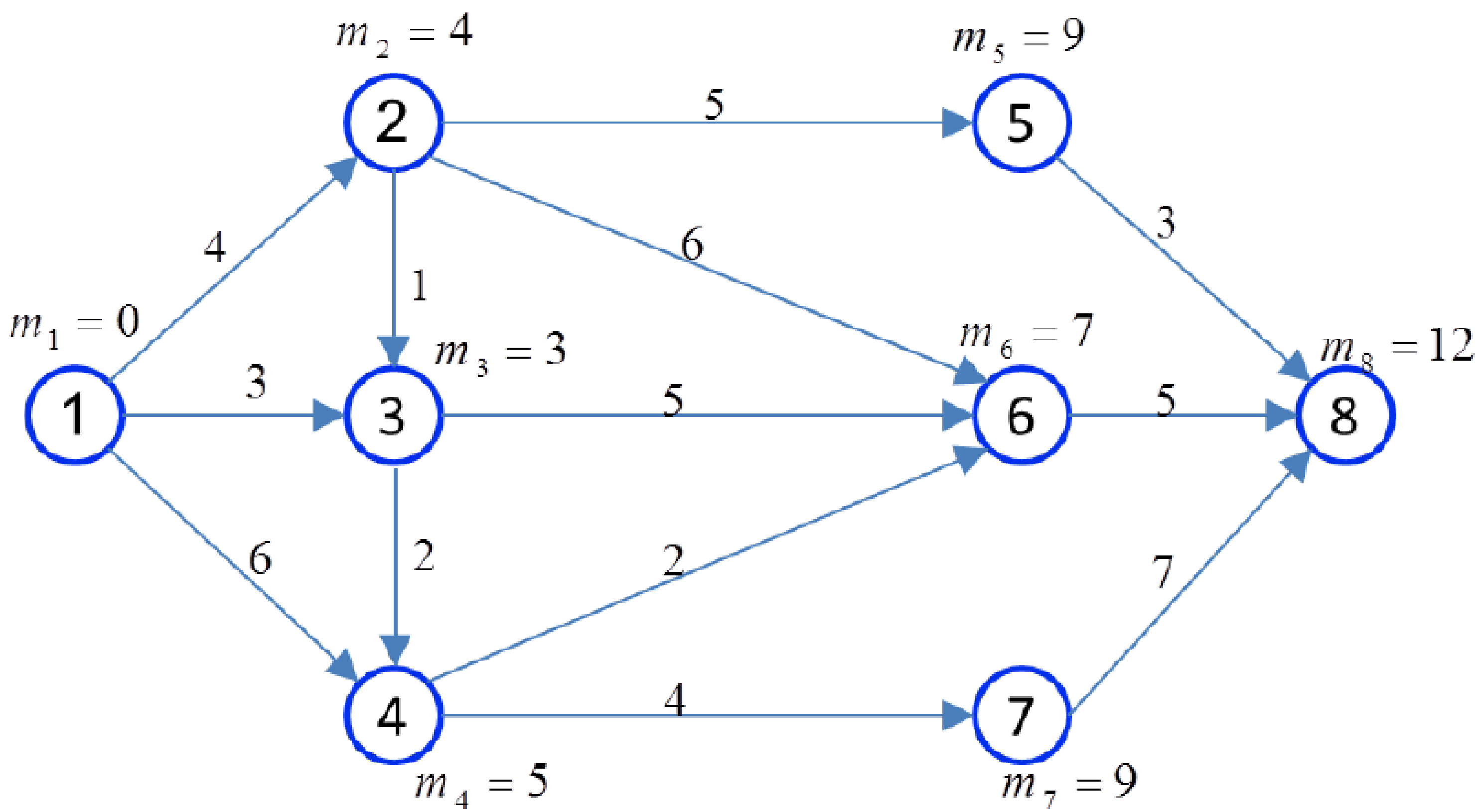
برای گره ۲ می توان نوشت($m_2 = m_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4$)

برای گره ۳ چون دو مسیر برای رسیدن به این گره وجود دارد بایستی حداقل ایـن دو مسیر در نظر گرفته شود:

$$\left.\begin{array}{l} m_3 = m_1 + d_{13} = 0 + 3 = 3 \\ m_3 = m_2 + d_{23} = 4 + 1 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow m_3 = \min(3,5) = 3$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

نتایج محاسبات در شکل زیر خلاصه شده است. کوتاهترین فاصله گره ۸ از گره ۱ برابر با ۱۲ واحد است.



در این حرکت هر گره ای (j) که کد آن (m_j) در رابطه $m_i = m_j - d_{ij}$ صدق کند، بر روی کوتاهترین مسیر واقع است. حرکت از گره پایان آغاز می شود، سه شاخه به این گره وارد شده است:

$$m_8 - d_{58} = 12 - 3 = 9 = m_5$$
$$m_8 - d_{68} = 12 - 5 = 7 = m_6$$
$$m_8 - d_{78} = 12 - 7 = 5 \neq m_7$$

کمان ها (۵,۸) و (۶,۸) بر روی کوتاهترین مسیر قرار دارد. بنابرین تا کنون دو فقـره کوتاهترین مسیر وجود دارد. ابتدا کار از گره ۵ ادامه می دهیم.

$$m_5 - d_{25} = 9 - 5 = 4 = m_2$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

کمان (۲,۵) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

$$m_2 - d_{12} = 4 - 4 = 0 = m_1$$

کمان (۱,۲) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

مسیر یکم مشخص شد. اکنون نوبت به مسیر دوم است/ کار را از گره ششم ادامه می دهیم.

$$m_6 - d_{26} = 7 - 6 = 1 \neq m_2$$
$$m_6 - d_{36} = 7 - 5 = 2 \neq m_3$$
$$m_6 - d_{46} = 7 - 2 = 5 = m_4$$

کمان (۴,۶) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

$$m_4 - d_{34} = 5 - 2 = 3 = m_3$$

$$m_4 - d_{14} = 5 - 6 = -1 \neq m_1$$

کمان (۳,۴) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

$$m_3 - d_{23} = 3 - 1 = 2 \neq m_2$$

$$m_3 - d_{13} = 3 - 3 = 0 = m_1$$

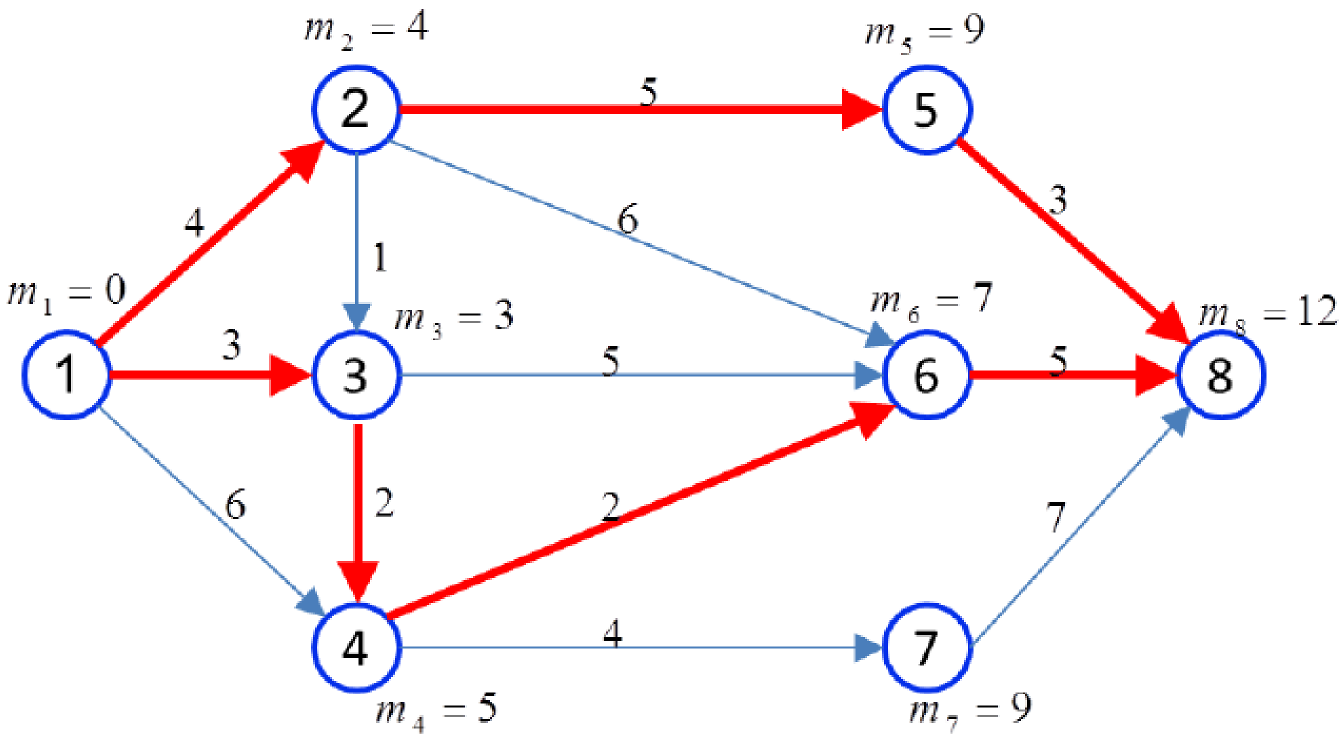
کمان (۱,۳) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

ملاحظه می شود در این شبکه، دو مسیر وجود دارد که کوتاهترین مسیر را دارد.

$$1 \to 2 \to 5 \to 8$$

$$1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8$$



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

چندمین (k-امین) مسیر کوتاه

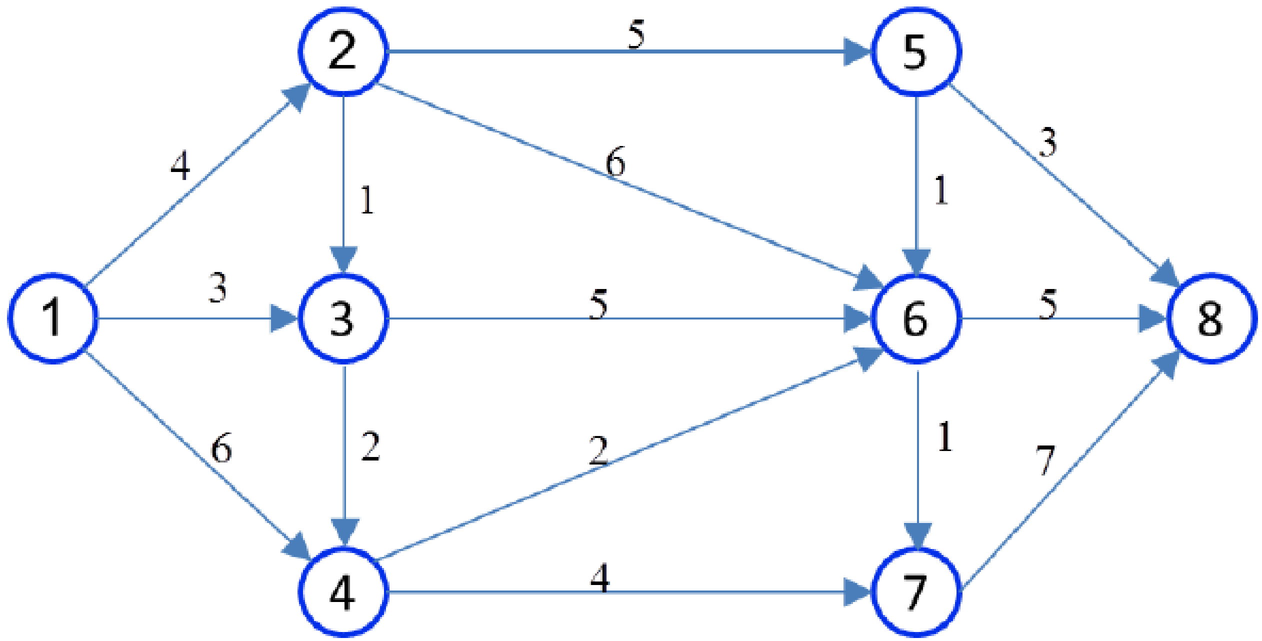
مثال راننده اتوبوس نشان می دهد که گاهی اوقات لازم است که دومین، سومین یـا بـه طور عمومی k امین کوتاهترین مسیر تعیین شد. برای تعیین k-امین مسیر کوتاه، تغییـری به صورت زیر در گام دوم روش ساده کوتاهترین مسیر ایجاد می شود.

$$m_j^{(k)} = \underset{i \in S}{Mink}\{m_i^{(r)} + d_{ij}\} \quad = 1, 2, \ldots, j-1; j = 2, 3, \ldots, n; 1 \le r \le k$$

که در آن منظور از $Mink$ انتخاب k-امین مقدار حداقل در داخل $\{\}$ است.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

مثال: یکمین، دومین، سومین مسیر کوتاه بین گره های ۱ و ۸ را در شبکه زیر تعیین کنید.



مسئله کوتاهترین مسیر–شبکه های بدون حلقه

حل: چنانچه به روش ساده کوتاهترین فاصله عمل شود، کوتاهترین فاصله (یکمین فاصله کوتاه) تا هر گره بدست می آید:

$$m_1^{(1)} = 0 \quad , \quad m_2^{(1)} = 4 \quad , \quad m_3^{(1)} = 3 \quad , \quad m_3^{(1)} = 5$$
$$m_5^{(1)} = 9 \quad , \quad m_6^{(1)} = 7 \quad , \quad m_7^{(1)} = 8 \quad , \quad m_8^{(1)} = 12$$

در خصوص دومین فاصله کوتاه، برای گره مبدا همچنان کد برابر با صفر اختصاص می یابد.

$$m_1^{(2)} = 0$$

فقط یک شاخه به گره ۲ وارد می شود و بنابراین دومین فاصله کوتاه بین گره های ۱ و ۲ وجود ندارد:

$$m_2^{(2)} = -$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

اما برای گره ۳ می توان نوشت:

$$m_3^{(2)} = Min2\{m_1^{(1)} + d_{13}, m_1^{(2)} + d_{13}, m_2^{(1)} + d_{23}, m_2^{(2)} + d_{23}\}$$
$$= Min2\{0+3, 0+3, 4+1, -\} = 5$$

برای سایر گره ها به صورت زیر عمل می کنیم:

$$m_4^{(2)} = Min2\{m_1^{(1)} + d_{14}, m_1^{(2)} + d_{14}, m_3^{(1)} + d_{34}, m_3^{(2)} + d_{34}\}$$
$$= Min2\{0+6, 0+6, 3+2, 5+2\} = 6$$

$$m_5^{(2)} = -$$

$$m_6^{(2)} = Min2\{m_2^{(1)} + d_{26}, m_2^{(2)} + d_{26}, m_3^{(1)} + d_{36}, m_3^{(2)} + d_{36}, m_4^{(1)} + d_{46}, m_4^{(2)} + d_{46}, m_5^{(1)} + d_{56}, m$$
$$= Min2\{4+6, -, 3+5, 5+5, 5+2, 6+2, 9+1, -\} = 8$$

$$m_7^{(2)} = Min2\{m_4^{(1)} + d_{47}, m_4^{(2)} + d_{47}, m_6^{(1)} + d_{67}, m_6^{(2)} + d_{67}\}$$
$$= Min2\{5+4, 6+4, 7+1, 8+1\} = 9$$

$$m_8^{(2)} = Min2\{m_5^{(1)} + d_{58}, m_5^{(2)} + d_{58}, m_6^{(1)} + d_{68}, m_6^{(2)} + d_{68}, m_7^{(1)} + d_{78}, m_7^{(2)} + d_{78}\}$$
$$= Min2\{9+3, -, 7+5, 8+5, 8+7, 9+7\} = 13$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

سومین فاصله کوتاه از گره مبدا تا خودش نیز برابر با صفر است:

$$m_1^{(3)} = 0$$

چون فقط یک شاخه به گره ۲ وارد می شود، بنابراین سومین فاصله کوتاه بین گره های ۱ و ۲ نیز وجود ندارد.

$$m_2^{(3)} = -$$

در مورد گره ۳ داریم:

$$\begin{aligned} m_3^{(3)} &= Min3\{m_1^{(1)} + d_{13}, m_1^{(2)} + d_{13}, m_1^{(3)} + d_{13}, m_2^{(1)} + d_{23}, m_2^{(2)} + d_{23}, m_2^{(3)} + d_{23}\} \\ &= Min3\{0+3, 0+3, 0+3, 4+1, -, -\} = 5 \end{aligned}$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

به همین ترتیب می توان نوشت:

$$m_4^{(3)} = Min3\{m_1^{(1)}+d_{14}, m_1^{(2)}+d_{14}, m_1^{(3)}+d_{14}, m_3^{(1)}+d_{34}, m_3^{(2)}+d_{34}, m_3^{(3)}+d_{34}\}$$
$$= Min3\{0+6, 0+6, 0+6, 3+2, 5+2, 5+2\} = 7$$

$$m_5^{(3)} = -$$

$$m_6^{(3)} = Min3\{m_2^{(1)}+d_{26}, m_2^{(2)}+d_{26}, m_2^{(3)}+d_{26}, m_3^{(1)}+d_{36}, m_3^{(2)}+d_{36}, m_3^{(3)}+d_{36}, m_4^{(1)}+d_{46}, m_4^{(2)}$$
$$+d_{46}, m_4^{(3)}+d_{46}, m_5^{(1)}+d_{56}, m_5^{(2)}+d_{56}, m_5^{(3)}+d_{56}\}$$
$$= Min3\{4+6, -, -, 3+5, 5+5, 5+5, 5+2, 6+2, 7+2, 9+1, -\} = 9$$

$$m_7^{(3)} = Min3\{m_4^{(1)}+d_{47}, m_4^{(2)}+d_{47}, m_4^{(3)}+d_{47}, m_6^{(1)}+d_{67}, m_6^{(2)}+d_{67}, m_6^{(3)}+d_{67}\}$$
$$= Min3\{5+4, 6+4, 7+4, 7+1, 8+1, 9+1\} = 10$$

$$m_8^{(3)} = Min3\{m_5^{(1)}+d_{58}, m_5^{(2)}+d_{58}, m_5^{(3)}+d_{58}, m_6^{(1)}+d_{68}, m_6^{(2)}+d_{68}, m_6^{(3)}+d_{68},$$
$$m_7^{(1)}+d_{78}, m_7^{(2)}+d_{78}, m_7^{(3)}+d_{78}\}$$
$$= Min3\{9+3, -, -, 7+5, 8+5, 9+5, 8+7, 9+7, 10+7\} = 14$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

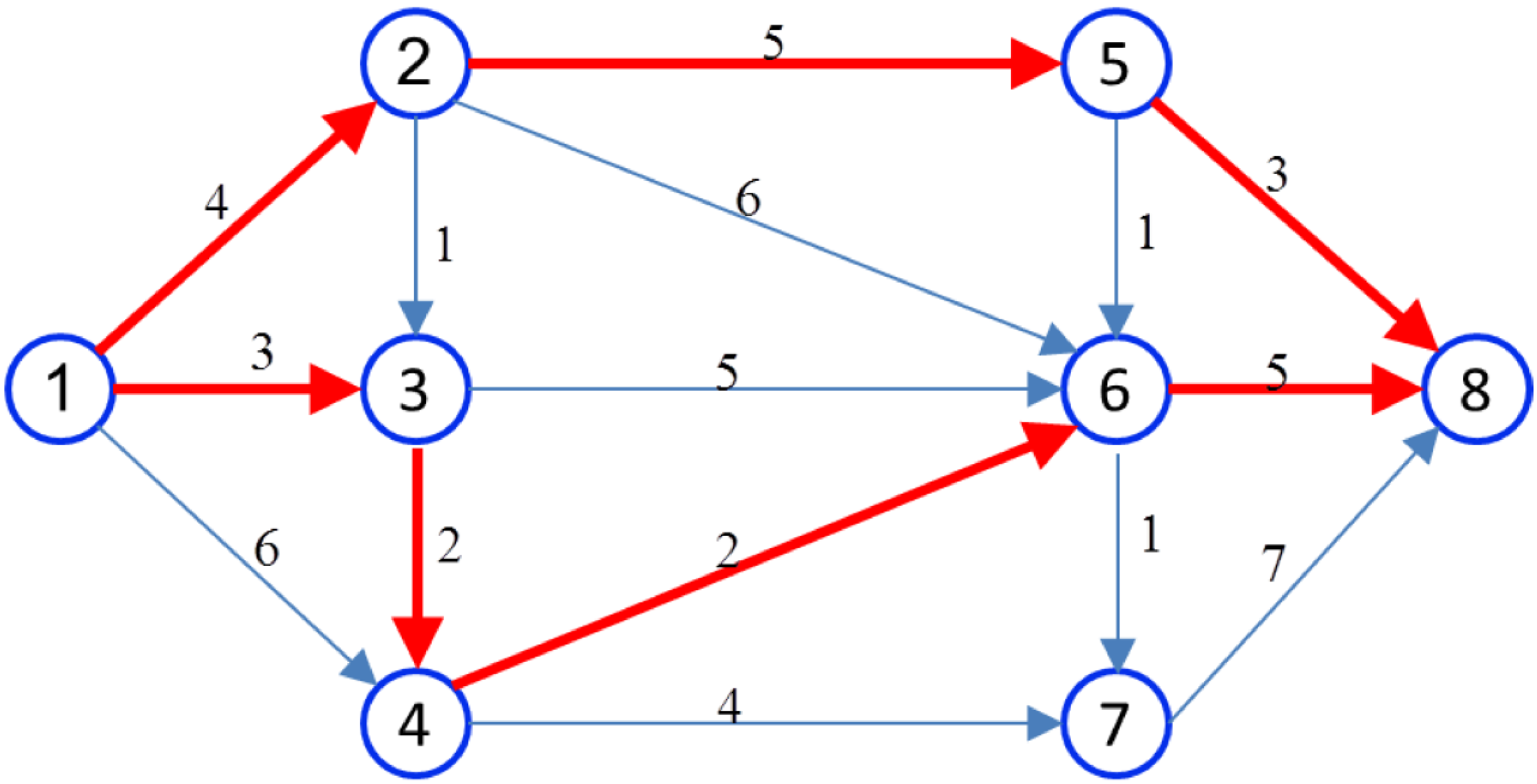
دومین و سومین مسیر **کوتاه** بین گره های ۱ تا ۸ با استفاده حرکت برگشت تعیین می شود. برای دومین مسیر کوتاه دو جواب و برای سومین مسیر کوتاه یک جواب وجود دارد:

دومین مسیر کوتاه: $1 \to 4 \to 6 \to 8 \quad \& \quad 1 \to 3 \to 6 \to 8$

سومین مسیر کوتاه : $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8$

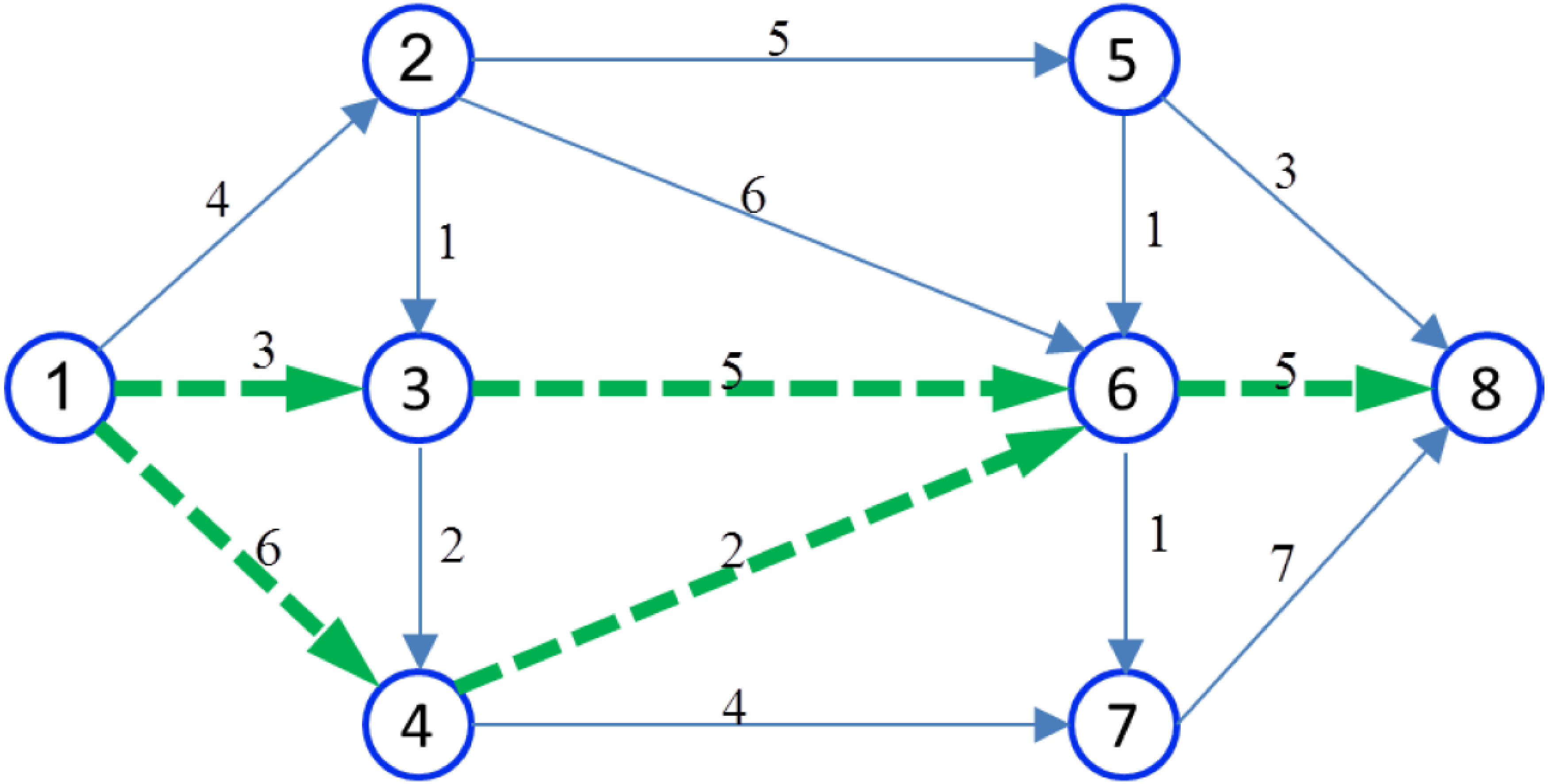
مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

کوتاهترین مسیرها:



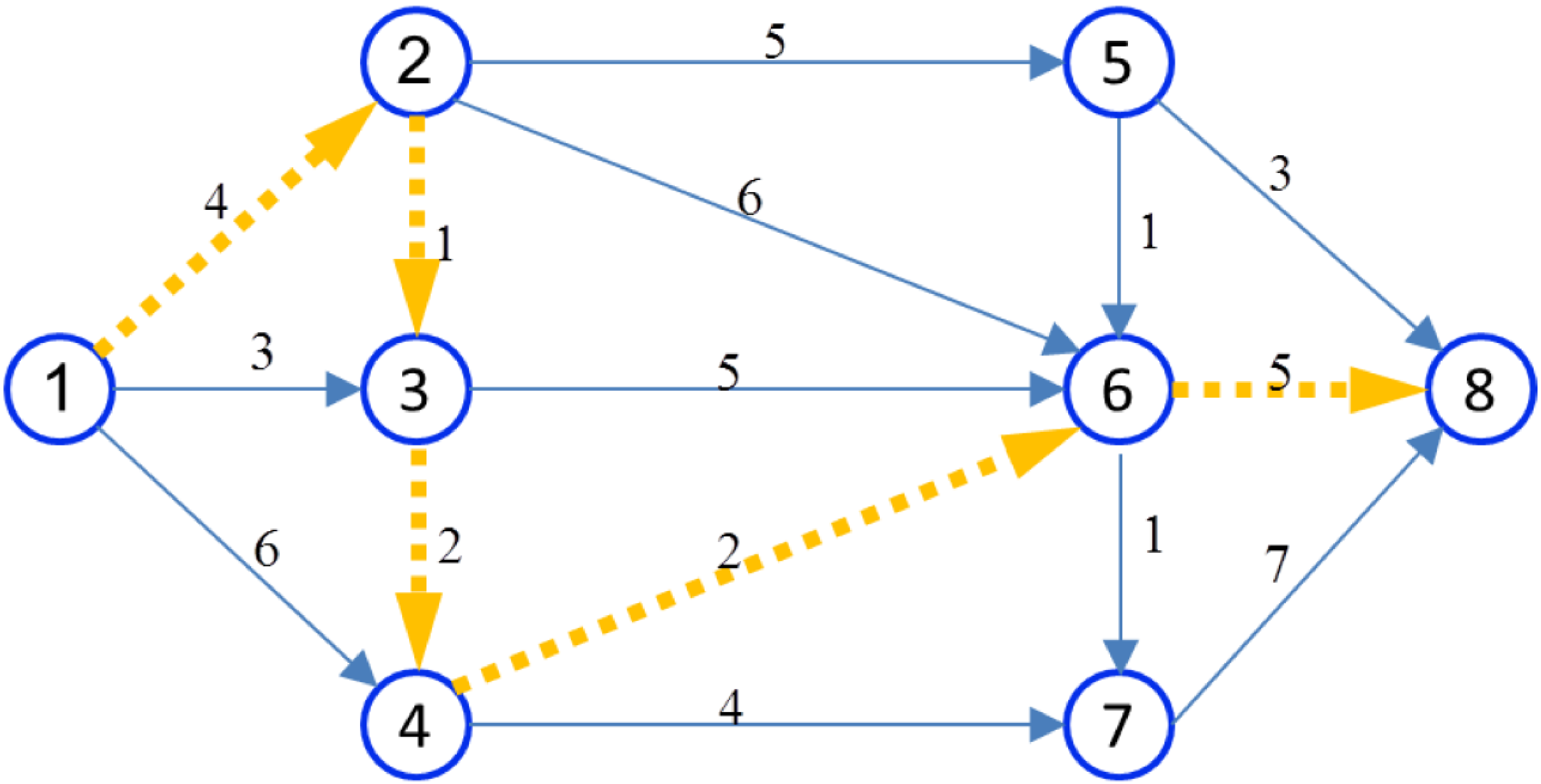
مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

دومین مسیرهای کوتاه



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های بدون حلقه

سومین مسیر کوتاه



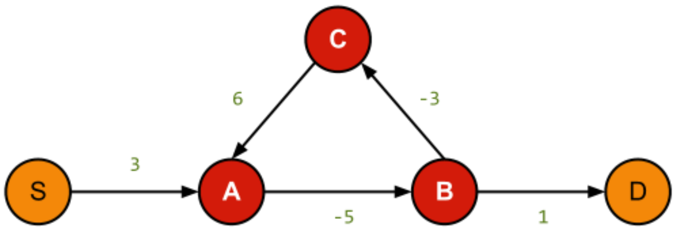
مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

شبکه های دارای حلقه

در این شبکه ها حلقه وجود دارد، به این معنی که بین تعدادی از گره ها یک کمان برای رفت و یک کمان دیگر برای برگشت وجود دارد. در این جا برای حل مسایل در شبکه های حلقه دار (یافتن کوتاهترین مسیر) دو روش بیان می شود:

روش دیجسترا

روش دیجسترا *Dijkestra* به نام ابداع کننده آن موسوم است و در ان به هر گره دو کد اختصاص می یابد:



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

m_i : کوتاهترین فاصله گره *i* از گره مبدا حرکت تا مرحله جاری الگوریتم کـه بـه آن کد موقت گفته می شود زیر ممکن است در مراحل بعدی، فاصله کوتاهتری نیز بدست آید.

M_i: کوتاهترین فاصله مطلق گره *i* از گره مبدا حرکت که کد دایـم نـام دارد زیـر در مراحل بعدی نیز فاصله کوتاهتر از آن بدست نخواهد آمد.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

الگوریتم دیجسترا به صورت زیر است:

گام ۱: کد دایم برابر با صفر به گره شروع اختصاص دهید($M_1 = 0$)

گام ۲: به گره های مجاور گره هایی که کد دایم گرفته اند، با استفاده از رابطه زیر کد موقت اختصاص دهید:

$$m_j = M_i + d_{ij}$$

که در آن d_{ij} فاصله مستقیم از گره i با کد دایم تا گره j که بایستی به آن کد موقت اختصاص یابد، است

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

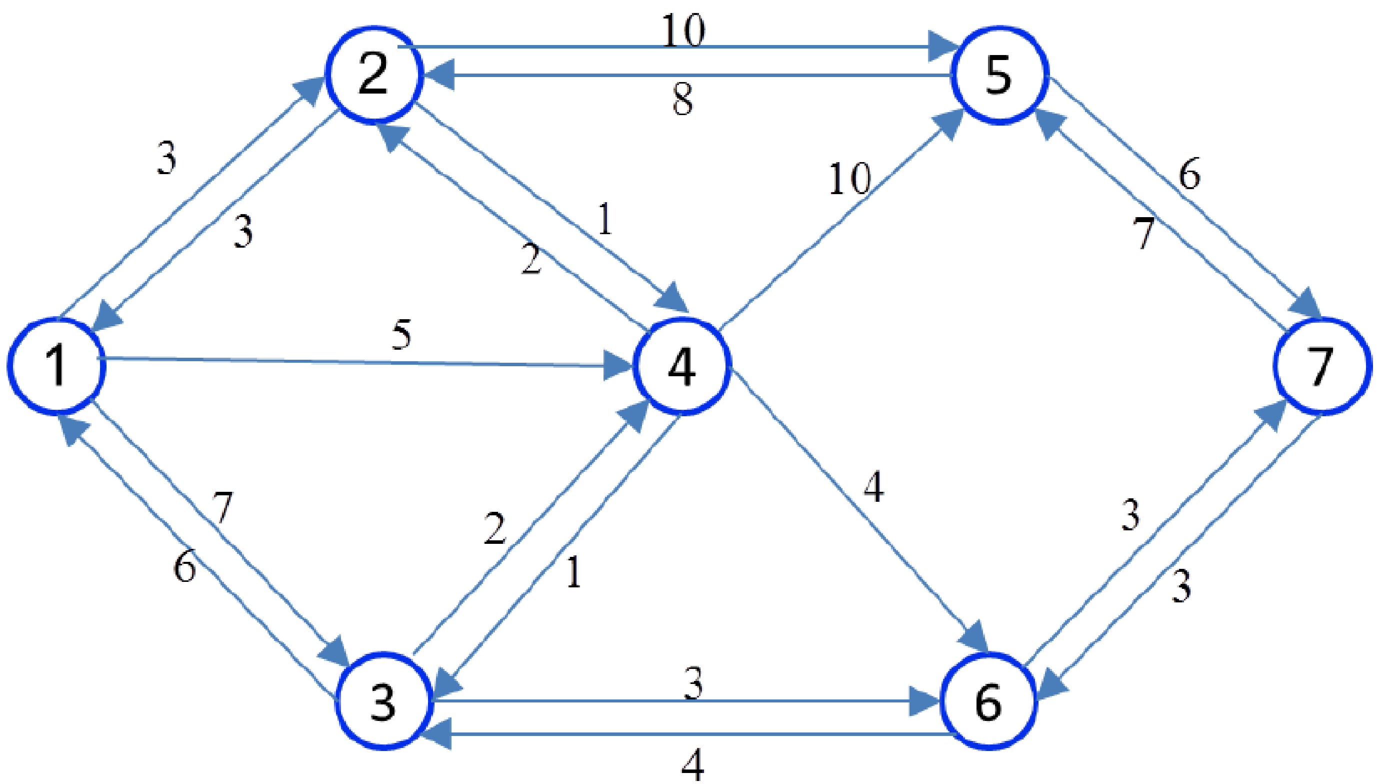
گام ۳: هنگامی که گره پایان (مقصد) کد دایم گرفت، متوقف شوید. M_n نشان دهنده کوتاهترین فاصله گره پایان از گره شروع است.

گام ۴: به منظور یافتن کوتاهترین مسیر، از روش حرکت برگشت با رابطه زیر استفاده کنید:

$$M_i = M_j - d_{ij}$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

مثال: کوتاهترین فاصله و مسیر بین گره های ۱ و ۷ در شبکه زیر را با بهره گیری از روش دیجسترا تعیین نمایید.



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

حل: کد دایم گره ۱ (مبدا حرکت) برابر با صفر در نظر گرفته می شود.

$$M_1 = 0$$

چون گره ۱ کد دایم گرفته، به گره های مجاور آن کد موقت اختصاص می یابد:

$$m_2 = M_1 + d_{12} = 0 + 3 = 3$$
$$m_3 = M_1 + d_{13} = 0 + 7 = 7$$
$$m_4 = M_1 + d_{14} = 0 + 5 = 5$$

حداقل کدهای موقت موجود تا کنون برابر با ۳ بدست می آید بنابراین کد موقت گره ۲ تبدیل به کد دایم می شود:

$$Min(3,7,5) = 3 \rightarrow M_2 = 3$$

به گره های مجاور گره ۲ که کد دایم گرفته، کد موقت داده می شود:

$$m_4 = M_2 + d_{24} = 3 + 1 = 4$$
$$m_5 = M_2 + d_{25} = 3 + 10 = 13$$

گره ۴ از پیش دارای کد موقت برابر با ۵ بود، اما در این مرحله کد موقت جدید برابر با ۴ برای ان بدست امده است. از انجا که کد موقت جدید کوچکتر از کد قبلی است، بنابراین جایگزین آن می شود:

$$m_4 = Min(5,4) = 4$$

حداقل کدهای موقت موجود تاکنون برابر با ۴ مربوط به گره ۴ است:

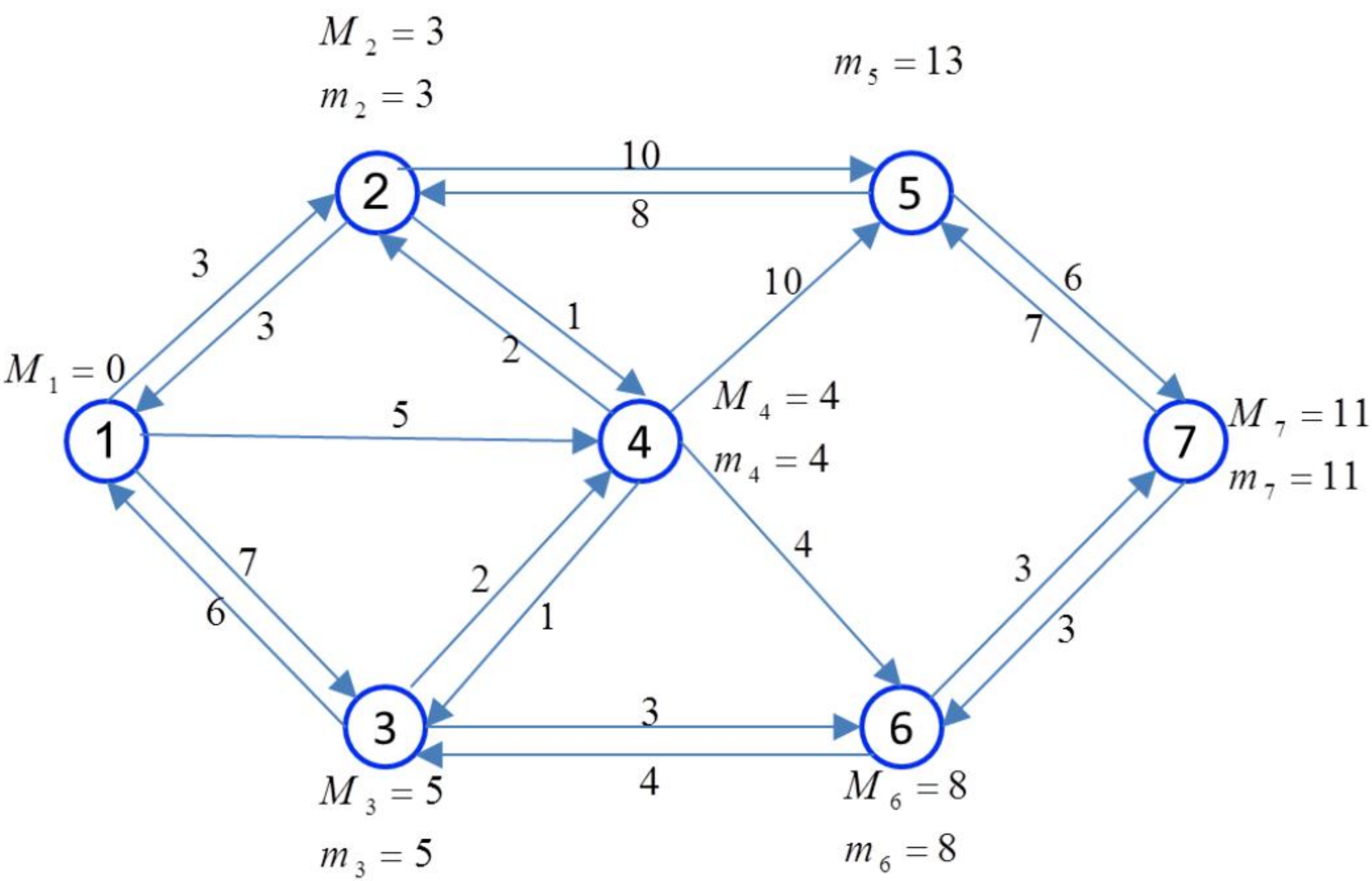
$$Min(7,4,13) = 4 \rightarrow M_4 = 4$$

فرایند به همین صورت ادامه می یابد:

$$m_3 = M_4 + d_{43} = 4 + 1 = 5 \rightarrow m_3 = 5$$
$$m_5 = M_4 + d_{45} = 4 + 10 = 14 \rightarrow m_5 = 13$$
$$m_6 = M_4 + d_{46} = 4 + 4 = 8$$
$$Min(m_3, m_5, m_6) = Min(5, 13, 8) = 5 \rightarrow M_3 = 5$$
$$m_6 = M_3 + d_{36} = 5 + 3 = 8 \rightarrow m_6 = 8$$
$$Min(m_5, m_6) = Min(13, 8) = 8 \rightarrow M_6 = 8$$
$$m_7 = M_6 + d_{67} = 8 + 3 = 11$$
$$Min(m_5, m_7) = Min(13, 11) = 11 \rightarrow M_7 = 11$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

شکل زیر خلاصه نتایج مراحل مختلف الگوریتم را نشان می دهد.



مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

به منظور تعیین کوتاهترین مسیر بین گره های ۱ و ۷ از حرکت برگشت استفاده می شود. روش کار مانند آنچه که در شبکه های بدون حلق بیان شد، است:

$$m_7 - d_{57} = 11 - 6 = 5 \neq M_5$$
$$m_7 - d_{67} = 11 - 3 = 8 = M_6$$

کمان (۶,۷) بر کوتاهترین مسیر واقع شده است.

$$m_6 - d_{46} = 8 - 4 = 4 = M_4$$
$$m_6 - d_{36} = 8 - 3 = 5 = M_3$$

کمان های (۴,۶) و (۳,۶) برکوتاهترین مسیر واقع هستند.

$$m_3 - d_{43} = 5 - 1 = 4 = M_4$$
$$m_3 - d_{13} = 5 - 7 = -2 \neq M_1$$

کمان (۳,۴) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

$$m_4 - d_{24} = 4 - 1 = 3 = M_2$$
$$m_4 - d_{14} = 4 - 5 = -1 \neq M_1$$

کمان (۲,۴) بر کوتاهترین مسیر قرار دارد.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

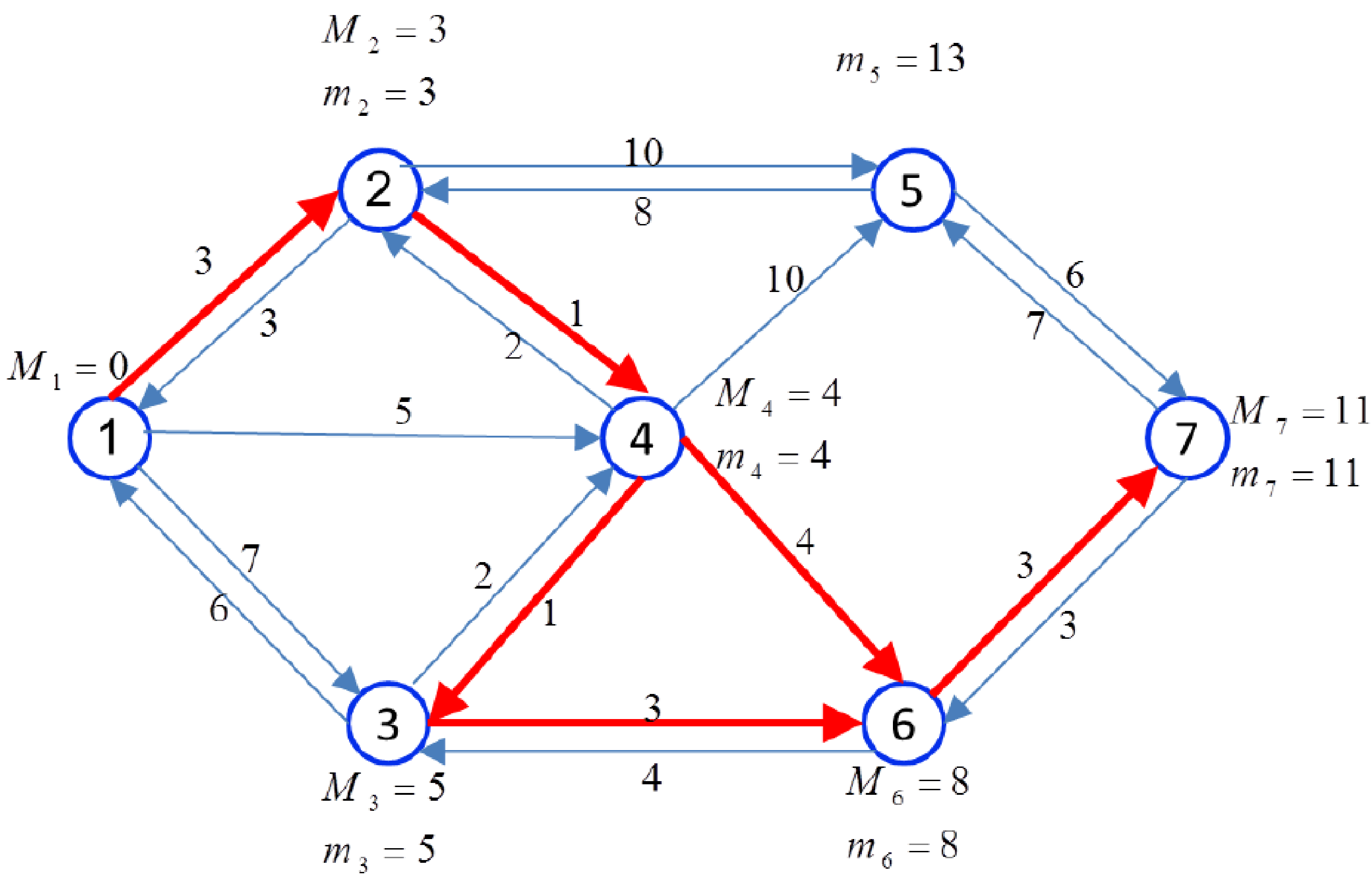
$$m_2 - d_{12} = 3 - 3 = 0 = M_1$$
$$m_2 - d_{25} = 3 - 8 = -5 \neq M_5$$

کمان (۱,۲) بر کوتاهترین مسیر واقع است.

بنابراین در این شبکه، دو مسیر وجود دارد که کوتاهترین فاصله را دارند:

$$1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 7$$
$$1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 6 \to 7$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه



روش جامع کوتاهترین مسیر

دیجسترا روش آسانی برای تعیین کوتاهترین مسیر در شبکه است، اما ضعف روش در این است که با هر بار اجرای الگوریتم، فقط کوتاهترین فاصله بین دو گره مبدا و مقصد مشخص می شود. اما با اجرای الگوریتم روش جامع کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله و مسیر بین کلیه گره ها از یکدیگر قابل محاسبه است.

در این روش دو ماتریس فاصله (D) و مسیر (P) تعریف می شود. d_{ij} نشان دهنده فاصله گره j از گره i و p_{ij} مسیر رسیدن از گره i به گره j است.

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

هر گاه مسیر مستقیمی برای رسیدن از یک گره به گره دیگر وجود نداشته باشد، فاصله بین آن ها ∞ در نظر گرفته می شود و مسیر بین آن ها نیز با علامت تیره "-" مشخص خواهد شد.

به عنوان مثال d_{12} فاصله گره ۱ تا ۲ است.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{2} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، p_{12} مسیر رسیدن از گره ۱ به گره ۲ است.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{2} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

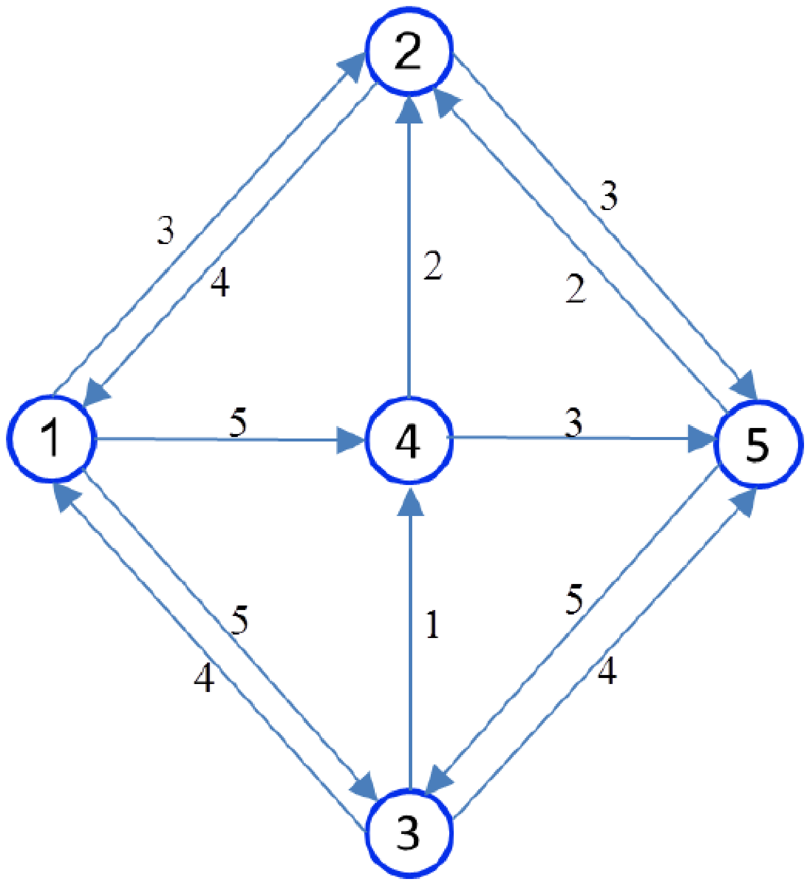
در هر مرحله j $(j=1,2,3,\ldots,n)$، گره j به عنوان واسط در نظر گرفته می شود و فاصله و مسیر رسیدن بین هر دو گره غیر از گره j با استفاده از این واسطه بدست می آید. اگر این فاصله از فاصله قبلی **کمتر** باشد، **جایگزین** آن می شود و در غیر این صورت فاصله قبلی همچنان **حفظ** می شود. به بیان دیگر، ماتریس های مرحله $j-1$ یعنی D_{j-1} و P_{j-1} توسط روابط زیر به ماتریس های مرحله j یعنی D_j و P_j تبدیل خواهند شد.

$$d_{ik}=\begin{cases} d_{ik} & if\ \ d_{ik}\le d_{ij}+d_{jk} \\ d_{ij}+d_{jk} & if\ \ d_{ik}>d_{ij}+d_{jk} \end{cases}=Min(d_{ik},d_{ij}+d_{jk}),i\ne j\ne k$$

$$p_{ik}=\begin{cases} p_{ik} & if\ \ d_{ik}\le d_{ij}+d_{jk} \\ p_{ij} & if\ \ d_{ik}>d_{ij}+d_{jk} \end{cases}$$

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

مثال: با بکاربردن روش جامع کوتاهترین مسیر، کوتاهترین فاصله و مسیر بین کلیه گره های شبکه شکل زیر را بدست آورید.



حل: ابتدا باید ماتریس های D_0 و P_0 را تشکیل دهید.

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & \infty & \infty & 3 \\ 4 & \infty & 0 & 1 & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 2 & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & - \\ 1 & - & - & - & 5 \\ 1 & - & - & 4 & 5 \\ - & 2 & - & - & 5 \\ - & 2 & 3 & - & - \end{bmatrix}$$

کار از یک گره به طور دلخواه (در این جا گره ۱) آغاز و این گره به عنوان واسطه در نظر گرفته می شود. فاصله دو به دو گره های ۲ تا ۵ با واسطه گره ۱ مورد ارزیابی قرار می گیرد:

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

مرحله ۱(گره ۱ واسطه): فاصله بین گره ۲ و ۳ در ماتریس برابر با ∞ است، در حالیکه از طریق گره واسطه یعنی گره ۱ این فاصله معادل ۹ واحد خواهد بود. چون فاصله بدست آمده از طریق واسطه کمتر از فاصله مندرج در ماتریس است، جایگزین آن می شود:

$$d_{23} = Min(d_{23}, d_{21} + d_{13}) = Min(\infty, 4+5) = 9 \rightarrow$$ فاصله و مسیر تغییر می کند

یعنی تا این مرحله، برای رسیدن از گره ۲ به گره ۳ بایستی از طریق گره ۱ حرکت کرد و مسافت طی شده در این حرکت برابر با ۹ واحد فاصله است.

$d_{24} = Min(d_{24}, d_{21} + d_{14}) = Min(\infty, 4+5) = 9 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{25} = Min(d_{25}, d_{21} + d_{15}) = Min(3, 4+\infty) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{32} = Min(d_{32}, d_{31} + d_{12}) = Min(\infty, 4+3) = 7 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{34} = Min(d_{34}, d_{31} + d_{14}) = Min(1, 4+5) = 1 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{35} = Min(d_{35}, d_{31} + d_{15}) = Min(4, 4+\infty) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{42} = Min(d_{42}, d_{41} + d_{12}) = Min(2, \infty+3) = 2 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{43} = Min(d_{43}, d_{41} + d_{13}) = Min(\infty, \infty+5) = \infty \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{45} = Min(d_{45}, d_{41} + d_{15}) = Min(3, \infty+\infty) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{52} = Min(d_{52}, d_{51} + d_{12}) = Min(2, \infty+3) = 2 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{53} = Min(d_{53}, d_{51} + d_{13}) = Min(5, \infty+5) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{54} = Min(d_{54}, d_{51} + d_{14}) = Min(\infty, \infty+5) = \infty \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

ملاحظه می شود که در این مرحله فقط فاصله و مسیر از گره ۲ به ۴ و همچنین از گره ۳ به ۲ تغییر می یابد. بنابراین ماتریس های این مرحله عبارتند از:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 2 & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 \\ - & 2 & - & - & 5 \\ - & 2 & 3 & - & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۲ (گره ۲ واسطه)

$d_{13} = Min(d_{13}, d_{12} + d_{23}) = Min(5, 3+9) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{14} = Min(d_{14}, d_{12} + d_{24}) = Min(5, 3+9) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{15} = Min(d_{15}, d_{12} + d_{25}) = Min(\infty, 3+3) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{31} = Min(d_{31}, d_{32} + d_{21}) = Min(4, 7+4) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{34} = Min(d_{34}, d_{32} + d_{24}) = Min(1, 7+9) = 1 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{35} = Min(d_{35}, d_{32} + d_{25}) = Min(4, 7+3) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{41} = Min(d_{41}, d_{42} + d_{21}) = Min(\infty, 2+4) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{43} = Min(d_{43}, d_{42} + d_{23}) = Min(\infty, 2+9) = 11 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{45} = Min(d_{45}, d_{42} + d_{25}) = Min(3, 2+3) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{51} = Min(d_{51}, d_{52} + d_{21}) = Min(\infty, 2+4) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{53} = Min(d_{53}, d_{52} + d_{23}) = Min(5, 2+9) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{54} = Min(d_{54}, d_{52} + d_{24}) = Min(\infty, 2+9) = 11 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

در این مرحله فاصله و مسیر از گره ۱ به ۵، از گره ۴ به ۱ ، از گره ۴ به ۳، از گره ۵ به ۱ ، و از گره ۵ به ۴ تغییر می یابد. بنابراین می توان ماتریس های مرحلـه ۲ را بـه صـورت زیر نوشت:

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۳ (گره ۳ واسطه)

$d_{12} = Min(d_{12}, d_{13} + d_{32}) = Min(3, 5+7) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{14} = Min(d_{14}, d_{13} + d_{34}) = Min(5, 5+1) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{15} = Min(d_{15}, d_{13} + d_{35}) = Min(6, 5+4) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{21} = Min(d_{21}, d_{23} + d_{31}) = Min(4, 9+4) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{24} = Min(d_{24}, d_{23} + d_{34}) = Min(9, 9+1) = 9 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{25} = Min(d_{25}, d_{23} + d_{35}) = Min(3, 9+4) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{41} = Min(d_{41}, d_{43} + d_{31}) = Min(6, 11+4) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{42} = Min(d_{42}, d_{43} + d_{32}) = Min(2, 11+7) = 2 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{45} = Min(d_{45}, d_{43} + d_{35}) = Min(3, 11+4) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{51} = Min(d_{51}, d_{53} + d_{31}) = Min(6, 5+4) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{52} = Min(d_{52}, d_{53} + d_{32}) = Min(2, 5+7) = 2 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{54} = Min(d_{54}, d_{53} + d_{34}) = Min(11, 5+1) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

در مرحله ۳ تنها فاصله و مسیر از گره ۵ به ۴ تغییر می یابد و در نتیجه می توان ماتریس های مرحله ۳ را به صورت زیر داشت:

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۴ (گره ۴ واسطه)

$d_{12} = Min(d_{12}, d_{14} + d_{42}) = Min(3, 5+2) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{13} = Min(d_{13}, d_{14} + d_{43}) = Min(5, 5+11) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{15} = Min(d_{15}, d_{14} + d_{45}) = Min(6, 5+3) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{21} = Min(d_{21}, d_{24} + d_{41}) = Min(4, 9+6) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{23} = Min(d_{23}, d_{24} + d_{43}) = Min(9, 9+11) = 9 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{25} = Min(d_{25}, d_{24} + d_{45}) = Min(3, 9+3) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{31} = Min(d_{31}, d_{34} + d_{41}) = Min(4, 1+6) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{32} = Min(d_{32}, d_{34} + d_{42}) = Min(7, 1+2) = 3 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{35} = Min(d_{35}, d_{34} + d_{45}) = Min(4, 1+3) = 4 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{51} = Min(d_{51}, d_{54} + d_{41}) = Min(6, 6+6) = 6 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{52} = Min(d_{52}, d_{54} + d_{42}) = Min(2, 6+2) = 2 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{53} = Min(d_{53}, d_{54} + d_{43}) = Min(5, 6+11) = 5 \rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

در مرحله ۴ نیز تنها فاصله و مسیر از گره ۳ به ۲ تغییر می یابد و ماتریس ها چنین خواهد بود.

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

مرحله ۵ (گره ۵ واسطه)

$d_{12}=Min(d_{12},d_{15}+d_{52})=Min(3,6+2)=3\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{13}=Min(d_{13},d_{15}+d_{53})=Min(5,5+6)=5\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{14}=Min(d_{14},d_{15}+d_{54})=Min(5,6+6)=5\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{21}=Min(d_{21},d_{25}+d_{51})=Min(4,3+6)=4\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{23}=Min(d_{23},d_{25}+d_{53})=Min(9,3+5)=8\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

$d_{24}=Min(d_{24},d_{25}+d_{54})=Min(9,6+3)=9\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{31}=Min(d_{31},d_{35}+d_{51})=Min(4,4+6)=4\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{32}=Min(d_{32},d_{35}+d_{52})=Min(3,4+2)=3\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{34}=Min(d_{34},d_{35}+d_{54})=Min(1,4+6)=1\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{41}=Min(d_{41},d_{45}+d_{51})=Min(6,3+6)=6\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{42}=Min(d_{42},d_{45}+d_{52})=Min(2,3+2)=2\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر نمی کند

$d_{43}=Min(d_{43},d_{45}+d_{53})=Min(11,3+5)=8\rightarrow$ فاصله و مسیر تغییر می کند

مسئله کوتاهترین مسیر-شبکه های دارای حلقه

ملاحظه می شود در این مرحله فاصله و مسیر از گره ۲ به ۳ و همچنین از گره ۴ به ۳ تغییر می کند. بنابراین ماتریس های این مرحله (ماتریس نهایی) عبارتند از:

$$D_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_5 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & - & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & - & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & - & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

الگوریتم به پایان می رسد. مسیر مربوطه نیز از طریق ماتریس P_5 قابل رهگیری است. به عنوان نمونه کوتاهترین فاصله بین گره ۲ و گره ۴ در ماتریس D_5 برابر با ۹ واحد فاصله می باشد. از ماتریس P_5، کوتاهترین مسیر از گره ۲ تا گره ۴، از طریق گره ۱ است. کوتاهترین مسیر از گره ۱ تا گره ۴ نیز از طریق خود گره ۴ می باشد.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com