درس ۳: نظریه همزادی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

از جمله مهترین نتایجی که در دوره‌های نخستین توسعه برنامه‌ریزی خطی بدست آمد، شناخت مفهوم دوگانگی و شاخه‌های مربوط به آن بوده است. در مطالعه‌های اولیه نشان داده شد که هر مسئله برنامه‌ریزی خطی با یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دیگر که مسئله همزاد (*Dual problem*) نامیده می‌شود، ارتباط دارد. برای روشن شدن موضوع مسئله اولیه به شکل استاندارد به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m \\
& \quad x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

اگر y_i را متغیر همزاد هر محدودیت در نظر بگیریم، مسئله همـزاد مـدل فـوق بـه صـورت زیـر بیـان می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& Min\ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_j \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad j = 1,\dots,n. \\
& \quad y_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

مثال: مدل اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
& s.t. \\
& (1) \quad x_1 \qquad\quad \le 4 \qquad (y_1) \\
& (2) \qquad\quad 2x_2 \le 12 \qquad (y_2) \\
& (3) \quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \qquad (y_3) \\
& \qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,2.
\end{aligned}
$$

مدل همزاد مدل فوق را بنویسید.

حل:

$$
\begin{aligned}
&Min\ y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\
&s.t. \\
&(1) \quad y_1 \qquad\quad + 3y_3 \geq 3 \\
&(2) \qquad\quad 2y_2 + 2y_2 \geq 5 \\
&\qquad y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

جواب بهینه دو مدل فوق به صورت زیر است:

قیمت سایه	متغیرهای اصلی	نام مدل
$y_1 = 0$ $y_2 = 1.5$ $y_3 = 1$	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$	مدل اولیه
$s_1 = 2$ $s_2 = 6$	$y_1 = 0$ $y_2 = 1.5$ $y_3 = 1$	مدل همزاد

مشاهده: همان طور که در جدول فوق مشاهده می‌شود، مقدار بهینه قیمت سایه محدودیت های مدل اولیه با مقدار بهینه متغیرهای اصلی مدل همزاد برابر است که در ادبیات تحقیق در عملیات بـه آن قضـیه همزادی گفته می‌شود. همین طور مقدار بهینه متغیرهای اصلی مدل اولیه با مقدار بهینه قیمت سـایه مـدل همزاد برابر است. این دو مدل دارای خاصیت های مهمی هستند که در ادامه به آن‌ها خـواهیم پرداخـت. در جدول زیر کلیه جواب‌های اساسی مدل اولیه و همزاد برای این مثال آورده شده است.

مسئله همزاد		مقدار تابع هدف	مسئله اولیه		ردیف
موجه؟	جواب اساسی		موجه؟	جواب اساسی	
خیر	(0,0,0,-3,-5)	0	بله	(0,0,4,12,18)	1
خیر	(3,0,0,0,-5)	12	بله	(4,0,0,12,6)	2
خیر	(0,0,1,0,-3)	18	خیر	(6,0,-2,12,0)	3
خیر	(-4.5,0,2.5,0,0)	27	بله	(4,3,0,6,0)	4
خیر	(0,2.5,0,-3,0)	30	بله	(0,6,4,0,6)	5
بله	(0,1.5,1,0,0)	36	بله	(2,6,2,0,0)	6
بله	(3,2.5,0,0,0)	42	خیر	(4,6,0,0,-6)	7
بله	(0,0,2.5,4.5,0)	45	خیر	(0,9,4,-6,0)	8

از جدول فوق مشاهده می‌شود که تنها در یک مورد جواب‌های مسئله اولیه و همزاد موجه هستند و در مابقی حالات یکی از دو مسئله غیر موجه هستند. در جوابی که هر دو مسئله موجه هستند، به جواب بهینه رسیده‌ایم.

مشاهده: اگر یک جواب اساسی در مسائل اولیه و همزاد امکان پذیر باشد، آن جواب اساسی، جواب اساسی بهینه است.

تمرین: یک مدل با دو متغیر و دو محدودیت عملکردی بسازید که مدل اولیه جواب نامحدود داشته باشد. از طریق ترسیمی نشان دهید که مسئله همزاد امکان ناپذیر است.

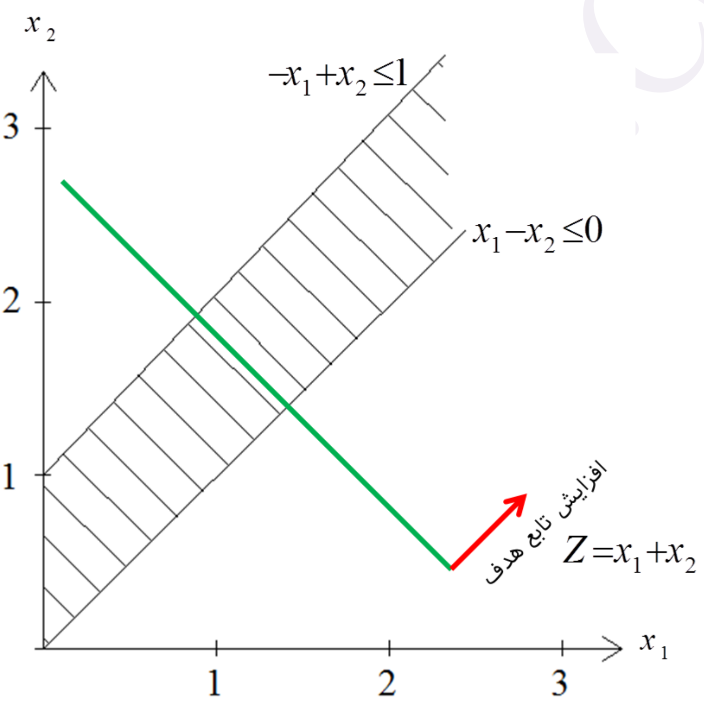
حل:

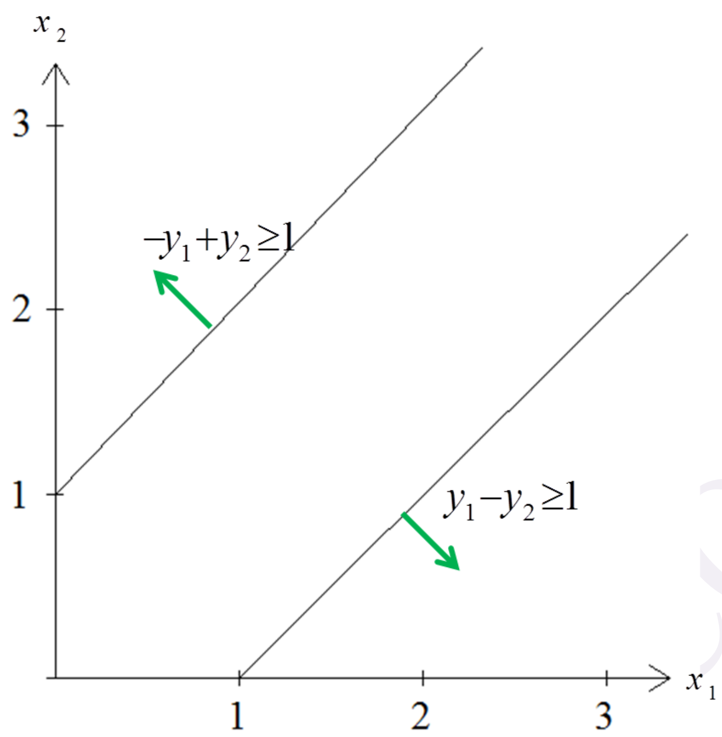
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = x_1 + x_2 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad -x_1 + x_2 \le 1 \qquad (y_1) \\
&\quad (2) \quad \ \ x_1 - x_2 \le 0 \qquad (y_2) \\
&\quad\quad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,2.
\end{aligned}
$$

اگر $x_1 = x_2 = c$ و c به سمت بینهایت میل کند، آنگاه $Z = 2c$ و لذا تابع هدف به سـمت بینهایـت می رود. همزاد مدل فوق به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
& Min\ y_0 = y_1 \\
& s.t. \\
& \quad (1) \quad -y_1 + y_2 \ge 1 \\
& \quad (2) \quad y_1 - y_2 \ge 1 \\
& \quad \quad y_i \ge 0 \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

حل ترسیمی مدل‌های اولیه و همزاد به صورت زیر است.





واضح است که محدوده امکان پذیر مدل همزاد تهی است.

سیمپلکس همزاد

روش سیمپلکس همزاد را می‌توان عکس روش سیمپلکس اولیه دانست. روش سیمپلکس اولیه مستقیما با جواب‌های امکان پذیر سروکار دارد و سعی می‌کند تا با ایجاد شرایط بهینگی به طرف جواب بهینه نزدیک شود. در مقابل روش سیمپلکس همزاد با جواب‌هایی کار می‌کند که شرط بهینگی دارند و با کوشش در جهت موجه کردن آن‌ها، به جواب‌های موجه بهینه نزدیک شود.

روش سیمپلکس همزاد در بعضی از شرایط مخصوص فوق العاده مفید واقع می‌شود. گاهی بدست آوردن یک جواب اساسی موجه ابتدایی مستلزم اضافه کردن تعداد زیاد متغیر مصنوعی است. در چنین مواردی، ممکن است شروع کردن از یک جواب بهینه غیرموجه، استفاده از روش سیمپلکس همزاد آسان تر باشد.

برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i\quad i=1,\dots,m$$
$$x_j\geq 0\quad j=1,\dots,n.$$

مدل فوق را با اضافه کردن متغیرهای کمبود S_i به فرم استاندارد به صورت زیر در می‌آوریم.

$$Max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+S_i=b_i\quad i=1,\dots,m$$
$$x_j\geq 0\quad j=1,\dots,n.$$

با توجه به مدل فوق، بیان رسمی‌آین روش به صورت زیر می‌شود:

گام ۰: در مسئله فوق، $c_j\geq 0$ برای تمامی j ها برقرار باشد. اگر برقرار نبود با تغییر متغیر این شرط برقرار شود.

گام ۱: اگر به ازای $i=1,\dots,m$ رابطه $b_i\geq 0$ برقرار باشد، توقف کنید زیرا به جواب بهینه حاصل شده است. در صورتیکه $b_i<0$ باشد، به گام ۲ می رویم.

گام ۲: سطر لولا (یعنی متغیر که از پایه حذف می‌شود) را با استفاده از رابطه زیر انتخاب کنید.

$$\bar{b}_r=\underset{i}{Min}\{b_i\,|\,b_i<0\}$$

اگر تمامی ضرایب متغیرها در سطر r-ام نامنفی باشد($a_{rj}\geq 0\quad \forall j=1,\dots,n$)، توقف کنید زیرا مسئله امکان ناپذیر است. اگر به ازای مقادیر $j=1,\dots,n$ داشته باشیم $a_{rj}<0$ برقرار باشد، به گام (۳) بروید.

گام ۳: ستون s را طبق رابطه زیر تعیین کنید.

$$\frac{c_s}{a_{rs}} = \underset{j}{Min}\left\{\frac{c_j}{|a_{rj}|} \mid a_{rj} < 0\right\}$$

در این گام متغیر ورودی به پایه تعیین می‌شود.

گام ۴: متغیر S را جایگزین متغیر پایه موجود در سطر r کنید و دوباره فرم استاندارد مدل را با عمل چرخش لولا استاندارد کنید.

گام ۵: به گام ۱ بروید.

برای روشن شدن الگوریتم فوق، مثال زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \qquad x_1 \qquad\quad + 3x_3 \geq 3 \\
&\quad (2) \qquad\qquad 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
&\qquad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

برای آغاز حل، می‌بایستی محدودیت ها به صورت $\leq$ و سپس با اضافه کردن متغیرهای کمبود، فرم محدودیت ها به صورت تساوی درآید. در این صورت مدل به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \qquad -x_1 \qquad\qquad - 3x_3 + x_4 \qquad = -3 \\
&\quad (2) \qquad\qquad - 2x_2 \quad - 2x_3 \qquad + x_5 = -5 \\
&\qquad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

جواب اساسی مدل فوق به صورت $(0,0,0,-3,-5)$ و $Z = 0$ است. چون متغیرهای x_4 و x_5 نامثبت هستند، لذا این جواب اساسی غیرموجه است. اجرای روش سیمپلکس همزاد به صورت زیر می‌شود.

تکرار	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
0	Z	0	1	4	12	18	0	0	0	جدول غیر بهینه
	X_4	1	0	-1	0	-3	1	0	-3	
	X_5	2	0	0	-2	-2	0	1	-5	
1	Z	0	1	4	0	6	0	6	-30	جدول غیر بهینه
	X_4	1	0	-1	0	-3	1	0	-3	
	X_2	2	0	0	1	1	0	-0.5	2.5	
2	Z	0	1	2	0	0	2	6	-36	جدول بهینه
	X_3	1	0	0.33	0	1	-0.33	0	1	
	X_2	2	0	-0.33	1	0	0.33	-0.5	1.5	

تکرار۰: متغیر x_5 را به دلیل این که ۳<۵ به عنوان متغیر ورودی به پایه انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب متغیر خروجی از جواب پایه، از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم چون ($\frac{12}{2} < \frac{18}{2}$) لذا متغیر x_2 به عنوان متغیر خروجی از جواب پایه انتخاب می‌شود. برای خروج x_2 از پایه و ورود x_5 به پایه، سطر معادله ۲ را بر ۲- تقسیم می‌کنیم.

تکرار۱: شرط توقف را کنترل می‌کنیم. چون ۳- بزرگتر از صفر نیست، لذا شرط امکان پذیری جواب برقرار نیست. x_4 به عنوان متغیر خروجی از پایه و با توجه به آزمون نسبت چون ($\frac{4}{1} > \frac{6}{3}$) است لذا متغیر x_3 وارد پایه می‌شود. برای انجام این تغییرات در جداول سیمپلکس، سطر معادله ۱ را بر ۳- تقسیم می‌کنیم.

تکرار۲: چون سمت راست معادله نامنفی است لذا شرط امکان پذیری برقرار است و لذا به جواب بهینه رسیدیم و الگورتیم متوقف می‌شود.

تمرین: مسئله زیر را با استفاده از روش سیمپلکس همزاد حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
&s.t. \\
&\qquad (1) \qquad 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 25 \\
&\qquad (2) \qquad 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 40 \\
&\qquad (3) \qquad 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 20 \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4.
\end{aligned}
$$

حل: فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad -Z = -7x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 \\
&s.t. \\
&\qquad (1) \qquad -2x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 + x_5 = -25 \\
&\qquad (2) \qquad -8x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_6 = -40 \\
&\qquad (3) \qquad -3x_1 - 8x_2 - x_3 - 4x_4 + x_7 = -20 \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7.
\end{aligned}
$$

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	-1	7	2	5	4	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_5	1	0	-2	-4	-7	-1	1	0	0	-25	
X_6	2	0	-8	-4	-6	-4	0	1	0	-40	
X_7	3	0	-3	-8	-1	-4	0	0	1	-20	
Z	0	-1	3	0	2	2	0	0.5	0	-4	جدول بهینه
X_5	1	0	6	0	-1	3	1	-1	0	3	
X_2	2	0	2	1	1.5	1	0	-0.25	0	2	
X_7	3	0	13	0	11	4	0	-2	1	12	

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**