

A decorative graphic featuring a large, irregular cluster of hexagons in various colors including green, blue, pink, orange, and purple. To the right of the hexagonal cluster is a small bar chart with three bars of increasing height in green, orange, and blue. The website address 'www.behinehya' is written in green text at the bottom right.



فهرست مطالب



مبانی نظریه همزادی

۱

روش سیمپلکس همزاد

۲

تمرین ها

۳



از جمله مهمترین نتایجی که در دوره های نخستین توسعه برنامه ریزی خطی بدست آمد، شناخت مفهوم **دوگانگی یا همزادی** و شاخه های مربوط به آن بوده است. در مطالعه های اولیه نشان داده شد که هر مسئله برنامه ریزی خطی با یک مسئله برنامه ریزی خطی دیگر که مسئله **همزاد** (Dual problem) نامیده می شود، ارتباط دارد.

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad y_i$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

اگر y_i را متغیر همزاد هر محدودیت در نظر بگیریم، مسئله همزاد مدل فوق به صورت زیر بیان می شود.

$$\text{Min } y_0 = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n.$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

مثال: مدل اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$(1) \quad x_1 \leq 4 \quad (y_1)$$

$$(2) \quad 2x_2 \leq 12 \quad (y_2)$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (y_3)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

مدل همزاد مدل فوق را بنویسید.

مبانی نظریه همزادی

$$\text{Min } y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

s.t.

$$(1) \quad y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$(2) \quad 2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

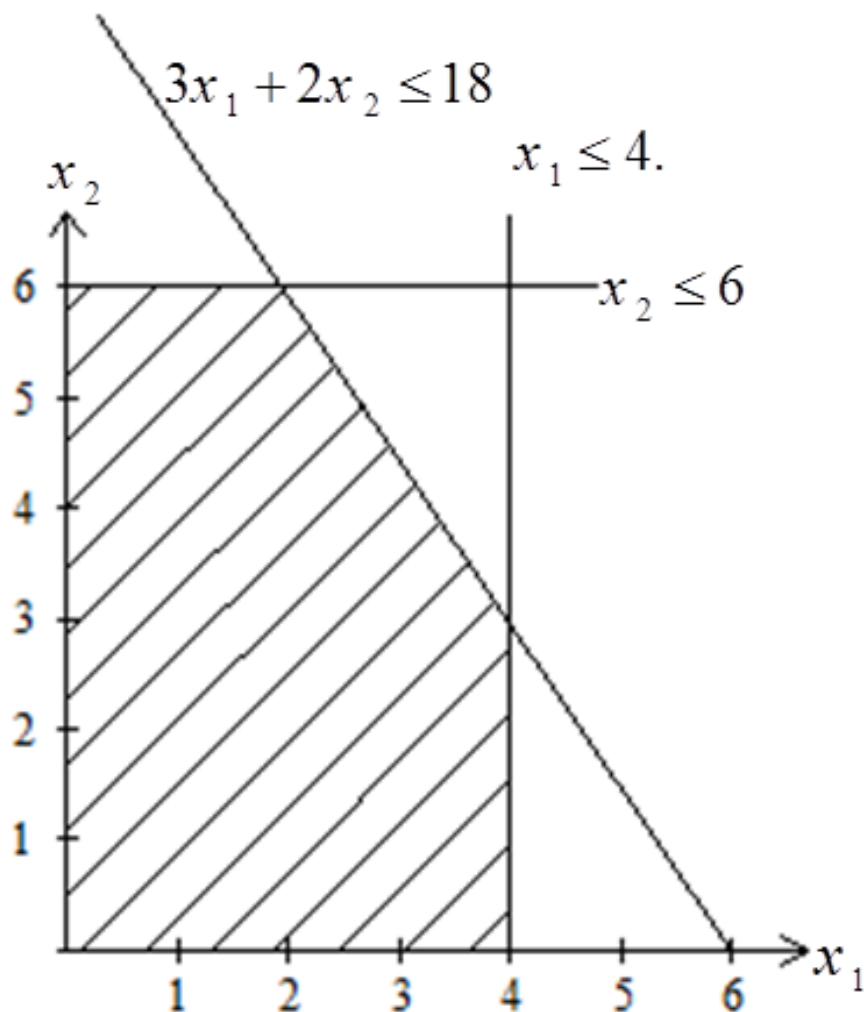
حل:

جواب مدل اولیه و مدل همزاد به صورت زیر می شود.

مشاهده: همان طور که در جدول روبرو مشاهده می شود، مقدار بهینه قیمت سایه محدودیت های مدل اولیه با مقدار بهینه متغیرهای اصلی مدل همزاد **برابر** است که در ادبیات تحقیق در عملیات به آن **قضیه همزادی** گفته می شود.

نام مدل	متغیرهای اصلی	قیمت سایه
مدل اولیه	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$	$y_1 = 0$ $y_2 = 1.5$ $y_3 = 1$
مدل همزاد	$y_1 = 0$ $y_2 = 1.5$ $y_3 = 1$	$s_1 = 2$ $s_2 = 6$

مبانی نظریه همزادی



مبانی نظریه همزادی

مشاهده: در جدول زیر، **تنها در یک مورد** جواب های مسئله اولیه و همزاد موجه هستند و در مابقی حالات یکی از دو مسئله غیر موجه هستند. در جوابی که هر دو مسئله موجه هستند، به جواب بهینه رسیده ایم.

ردیف	مسئله اولیه		مقدار تابع هدف	مسئله همزاد	
	جواب اساسی	موجه؟		جواب اساسی	موجه؟
1	(0,0,4,12,18)	بله	0	(0,0,0,-3,-5)	خیر
2	(4,0,0,12,6)	بله	12	(3,0,0,0,-5)	خیر
3	(6,0,-2,12,0)	خیر	18	(0,0,1,0,-3)	خیر
4	(4,3,0,6,0)	بله	27	(-4.5,0,2.5,0,0)	خیر
5	(0,6,4,0,6)	بله	30	(0,2.5,0,-3,0)	خیر
6	(2,6,2,0,0)	بله	36	(0,1.5,1,0,0)	بله
7	(4,6,0,0,-6)	خیر	42	(3,2.5,0,0,0)	بله
8	(0,9,4,-6,0)	خیر	45	(0,0,2.5,4.5,0)	بله

مبانی نظریه همزادی

تمرین: یک مدل با دو متغیر و دو محدودیت عملکردی بسازید که مدل اولیه جواب نامحدود داشته باشد. از طریق ترسیمی نشان دهید که مسئله همزاد امکان ناپذیر است.

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(1) \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \quad (y_1)$$

$$(2) \quad x_1 - x_2 \leq 0 \quad (y_2)$$

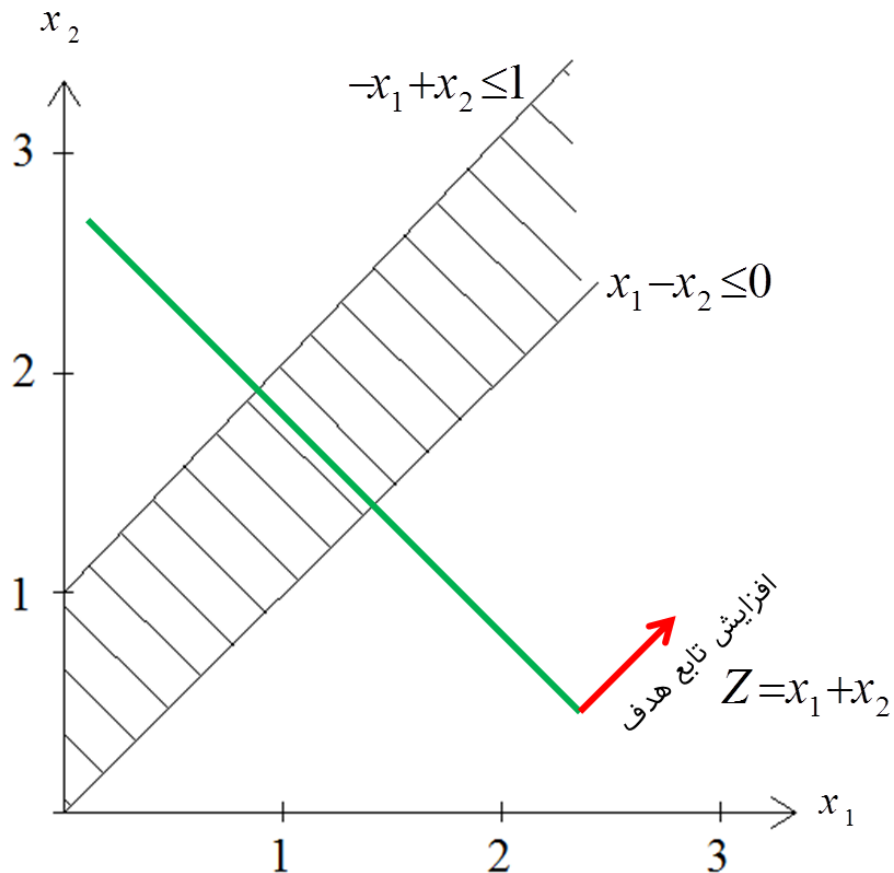
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

حل:

اگر $x_1 = x_2 = c$ و c به سمت بینهایت میل کند، آنگاه $Z = 2c$ و لذا تابع هدف به سمت بینهایت می رود.

مبانی نظریه همزادی

حل ترسیمی مدل اولیه به صورت زیر است.



حل ترسیمی مدل همزاد به صورت زیر است.

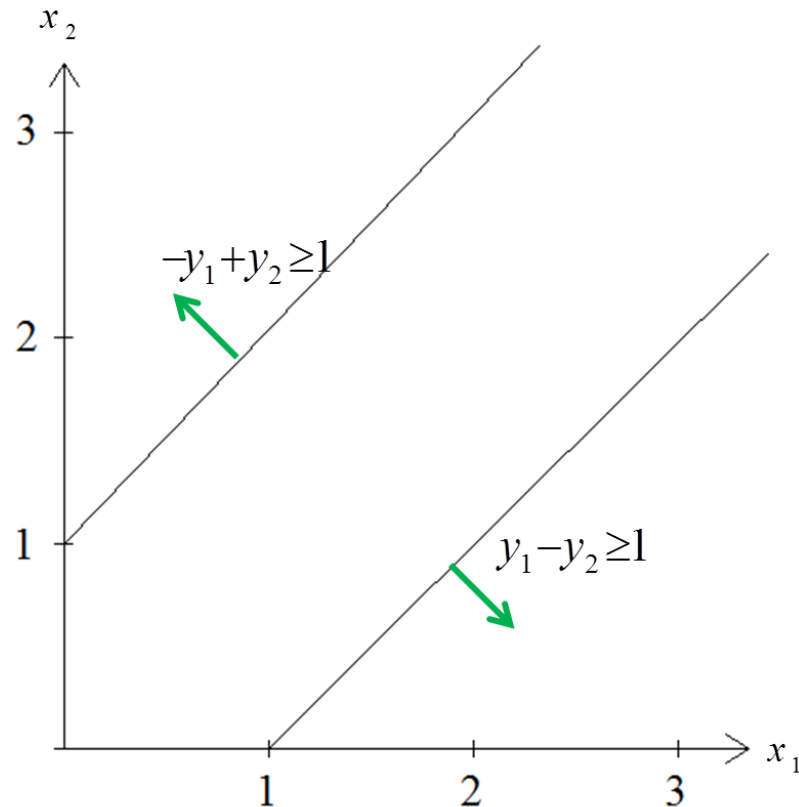
$$\text{Min } y_0 = y_1$$

s.t.

$$(1) \quad -y_1 + y_2 \geq 1$$

$$(2) \quad y_1 - y_2 \geq 1$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$



مبانی نظریه همزادی

تمرین: مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$(1) \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

الف) مدل همزاد مدل فوق را بسازید.

ب) مدل اولیه و مدل همزاد را به صورت ترسیمی حل کنید.

پ) جواب های اساسی تکمیلی برای هر دو مسئله را بدست آورید.

ت) با استفاده از روش سیمپلکس، در هر گام جواب اساسی اولیه و جواب اساسی همزاد را بدست آورید.

حل:

الف) مدل همزاد به صورت زیر می شود.

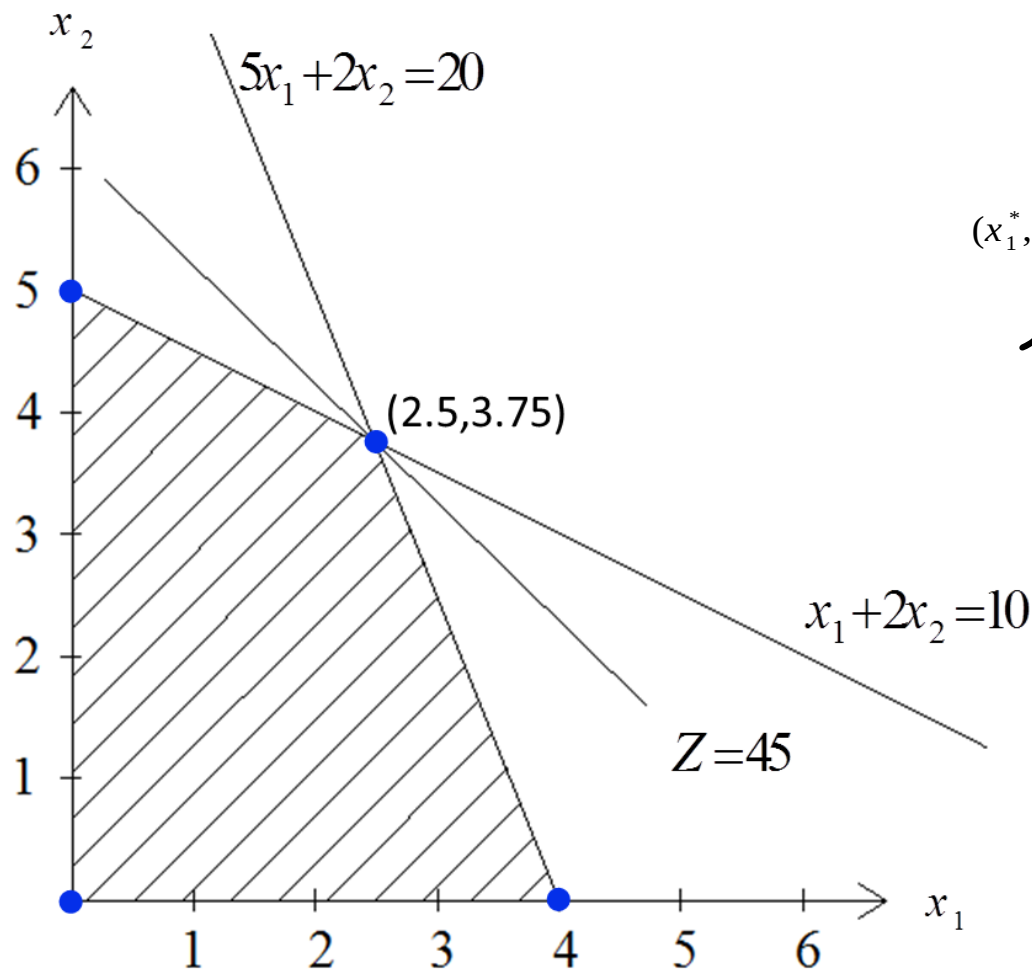
$$\text{Min } W = 20y_1 + 10y_2$$

s.t.

$$(1) \quad 5y_1 + y_2 \geq 6$$

$$(2) \quad 2y_1 + 2y_2 \geq 8$$

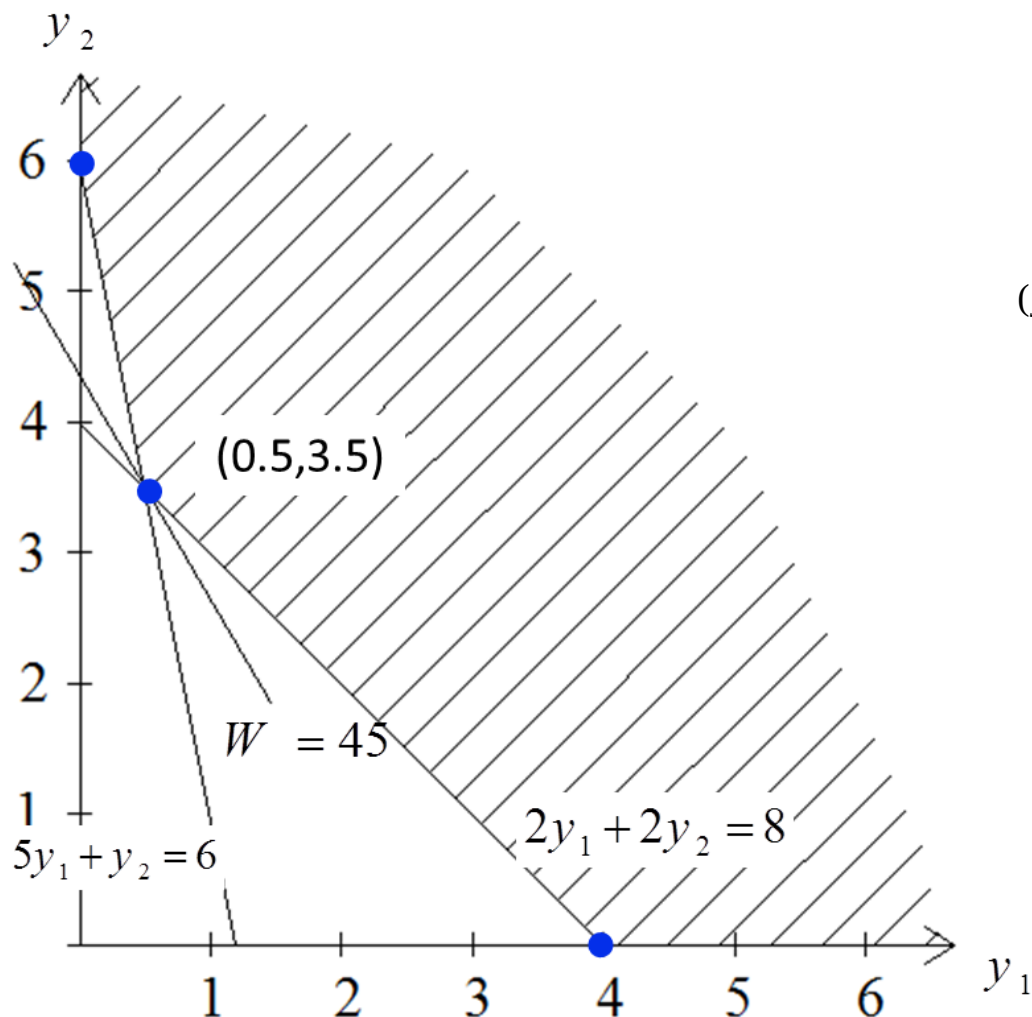
$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$



ب) حل ترسیمی به صورت
زیر می شود.

جواب بهینه برابر $(x_1^*, x_2^*) = (2.5, 3.75)$

و مقدار تابع هدف بهینه برابر
با $Z^* = 45$ است.



ب) حل ترسیمی به صورت
زیر می شود.

جواب بهینه برابر $(y_1^*, y_2^*) = (0.5, 3.5)$

و مقدار تابع هدف بهینه برابر
با $Z^* = 45$ است.

پ) جواب اساسی برای مدل های اولیه و همزاد با استفاده از شکلهای بالا به صورت زیر می شود.

ردیف	مسئله اولیه		Z	مسئله همزاد	
	جواب اساسی	موجه؟		جواب اساسی	موجه؟
1	(0,5,10,0)	بله	40	(0,4,-2,0)	خیر
2	(0,0,20,10)	بله	0	(0,0,-6,-8)	خیر
3	(4,0,0,6)	بله	24	(1.2,0,0,-28/5)	خیر
4	(2.5,3.75,0,0)	بله	45	(0.5,3.5,0,0)	بله
5	(0,10,0,-10)	خیر	80	(4,0,14,0)	بله
6	(10,0,-3,0)	خیر	60	(0,6,0,4)	بله

مبانی نظریه همزادی

(ت)



جواب اساسی اولیه = $(0, 0, 20, 10)$



جواب اساسی همزاد = $(0, 0, -6, -8)$

y_3 y_4 y_1 y_2

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	طرف سمت راست
Z	0	1	-6	-8	0	0	0
X ₃	1	0	5	2	1	0	20
X ₄	2	0	1	2	0	1	10

جدول غیر بهینه

20/2

10/2 کمینه

مبانی نظریه همزادی

✓ جواب اساسی اولیه = $(0, 5, 10, 0)$

✗ جواب اساسی همزاد = $(0, 4, -2, 0)$

			y_3	y_4	y_1	y_2		
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	طرف سمت راست	
Z	0	1	-2	0	0	4	40	جدول غیر بهینه
X ₃	1	0	4	0	1	-1	10	10/4 کمینه
X ₂	2	0	0.5	1	0	0.5	5	5/0.5

مبانی نظریه همزادی

✓ جواب اساسی اولیه = $(2.5, 3.75, 0, 0)$

✓ جواب اساسی همزاد = $(0.5, 3.5, 0, 0)$

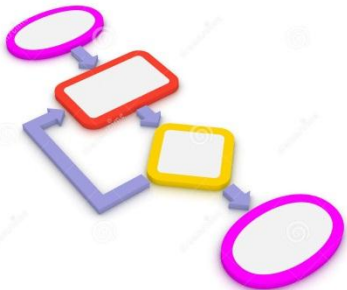
			y_3	y_4	y_1	y_2	
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0.5	3.5	45
X ₁	1	0	1	0	0.25	-0.25	2.5
X ₂	2	0	0	1	-0.13	0.625	3.75

جدول بهینه

روش سیمپلکس همزاد

روش سیمپلکس همزاد را می‌توان **عکس** روش سیمپلکس اولیه دانست. روش سیمپلکس اولیه مستقیماً با جواب‌های امکان‌پذیر سروکار دارد و سعی می‌کند تا با ایجاد شرایط بهینگی به طرف جواب بهینه نزدیک شود. در مقابل روش سیمپلکس همزاد با جواب‌هایی کار می‌کند که **شرط بهینگی** دارند و با کوشش در جهت **موجه کردن** آن‌ها، به جواب‌های موجه بهینه نزدیک شود.

روش سیمپلکس همزاد در بعضی از شرایط مخصوص فوق‌العاده مفید واقع می‌شود. گاهی بدست آوردن **یک جواب اساسی موجه ابتدایی** مستلزم اضافه کردن تعداد **زیاد** متغیر مصنوعی است. در چنین مواردی، ممکن است شروع کردن از یک جواب **بهینه غیرموجه** با استفاده از روش سیمپلکس همزاد آسان‌تر باشد.



برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

مدل فوق را با اضافه کردن متغیرهای کمبود S_i به فرم استاندارد به صورت زیر در می آوریم.

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + S_i = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

روش سیمپلکس همزاد

با توجه به مدل فوق، بیان رسمی این روش به صورت زیر می شود:

گام ۰: در مسئله فوق، $c_j \geq 0$ برای تمامی j ها برقرار باشد. اگر برقرار نبود با تغییر متغیر این شرط برقرار شود.

گام ۱: اگر به ازای $i = 1, \dots, m$ رابطه $b_i \geq 0$ برقرار باشد، توقف کنید زیرا به جواب بهینه حاصل شده است. در صورتیکه $b_i < 0$ باشد، به گام ۲ می رویم.

گام ۲: سطر لولا (یعنی متغیر که از پایه حذف می شود) را با استفاده از رابطه زیر انتخاب کنید.

$$\bar{b}_r = \min_i \{b_i \mid b_i < 0\}$$

اگر تمامی ضرایب متغیرها در سطر r -ام نامنفی باشد ($a_{rj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$)، توقف کنید زیرا مسئله امکان ناپذیر است. اگر به ازای مقادیر $j = 1, \dots, n$ داشته باشیم $a_{rj} < 0$ برقرار باشد، به گام (۳) بروید.

روش سیمپلکس همزاد

گام ۳: ستون s را طبق رابطه زیر تعیین کنید.

$$\frac{c_s}{a_{rs}} = \min_j \left\{ \frac{c_j}{|a_{rj}|} \mid a_{rj} < 0 \right\}$$

در این گام متغیر ورودی به پایه تعیین می شود.

گام ۴: متغیر s را جایگزین متغیر پایه موجود در سطر r کنید و دوباره فرم استاندارد مدل را با عمل چرخش لولا استاندارد کنید.

گام ۵: به گام ۱ بروید.

روش سیمپلکس همزاد

برای روشن شدن الگوریتم فوق، مثال زیر را حل می‌کنیم.

$$\text{Max } Z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3$$

s.t.

$$(1) \quad x_1 + 3x_3 \geq 3$$

$$(2) \quad 2x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

برای آغاز حل، می‌بایستی محدودیت‌ها به صورت $\leq$ و سپس با اضافه کردن متغیرهای کمبود، فرم محدودیت‌ها به صورت تساوی درآید. در این صورت مدل به صورت زیر می‌شود.

$$\text{Max } Z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3$$

s.t.

$$(1) \quad -x_1 - 3x_3 + x_4 = -3$$

$$(2) \quad -2x_2 - 2x_3 + x_5 = -5$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5.$$

روش سیمپلکس همزاد

جواب اساسی مدل فوق به صورت $(0, 0, 0, -3, -5)$ و $Z = 0$ است. چون متغیرهای x_4 و x_5 **نامثبت** هستند، لذا این جواب اساسی غیرموجه است. اجرای روش سیمپلکس همزاد به صورت زیر می‌شود.

تکرار	متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
0	Z	0	1	4	12	18	0	0	0	جدول غیر بهینه
	X_4	1	0	-1	0	-3	1	0	-3	
	X_5	2	0	0	-2	-2	0	1	-5	
1	Z	0	1	4	0	6	0	6	-30	جدول غیر بهینه
	X_4	1	0	-1	0	-3	1	0	-3	
	X_2	2	0	0	1	1	0	-0.5	2.5	
2	Z	0	1	2	0	0	2	6	-36	جدول بهینه
	X_3	1	0	0.33	0	1	-0.33	0	1	
	X_2	2	0	-0.33	1	0	0.33	-0.5	1.5	

روش سیمپلکس همزاد

تکرار ۰: متغیر x_5 را به دلیل این که $3 < 5$ به عنوان متغیر ورودی به پایه انتخاب می کنیم. برای انتخاب متغیر خروجی از جواب پایه، از آزمون نسبت استفاده می کنیم چون $(\frac{12}{2} < \frac{18}{2})$ لذا متغیر x_2 به عنوان متغیر خروجی از جواب پایه انتخاب می شود. برای خروج x_2 از پایه و ورود x_5 به پایه، سطر معادله ۲ را بر ۲- تقسیم می کنیم.

تکرار ۱: شرط توقف را کنترل می کنیم. چون ۳- بزرگتر از صفر نیست، لذا شرط امکان پذیری جواب برقرار نیست. x_4 به عنوان متغیر خروجی از پایه و با توجه به آزمون نسبت چون $(\frac{4}{1} > \frac{6}{3})$ است لذا متغیر x_3 وارد پایه می شود. برای انجام این تغییرات در جداول سیمپلکس، سطر معادله ۱ را بر ۳- تقسیم می کنیم.

تکرار ۲: چون سمت راست معادله نامنفی است لذا شرط امکان پذیری برقرار است و لذا به جواب بهینه رسیدیم و الگوریتم متوقف می شود.

تمرین: مسئله زیر را با استفاده از روش سیمپلکس همزاد حل نمایید.

$$\text{Min } Z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

s.t.

$$(1) \quad 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 25$$

$$(2) \quad 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 40$$

$$(3) \quad 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 20$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4.$$

حل: فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است.

$$\text{Max } -Z = -7x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4$$

s.t.

$$(1) \quad -2x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 + x_5 = -25$$

$$(2) \quad -8x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_6 = -40$$

$$(3) \quad -3x_1 - 8x_2 - x_3 - 4x_4 + x_7 = -20$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7.$$

تمرین ها

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	طرف سمت راست
Z	0	-1	7	2	5	4	0	0	0	0
X ₅	1	0	-2	-4	-7	-1	1	0	0	-25
X ₆	2	0	-8	-4	-6	-4	0	1	0	-40
X ₇	3	0	-3	-8	-1	-4	0	0	1	-20
Z	0	-1	3	0	2	2	0	0.5	0	-4
X ₅	1	0	6	0	-1	3	1	-1	0	3
X ₂	2	0	2	1	1.5	1	0	-0.25	0	2
X ₇	3	0	13	0	11	4	0	-2	1	12

جدول غیر بهینه

جدول بهینه

$$\text{Max } Z = 15x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$(1) \quad 3x_1 + x_2 \leq 40$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 \leq 20$$

$$(3) \quad 5x_1 + 3x_2 \leq 90$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

تمرین: مسئله زیر را در نظر بگیرید:

الف) این مسئله را با استفاده از روش سیمپلکس اولیه حل نمایید. در هر تکرار جواب اساسی آن را در مسئله همزاد مشخص کنید.

ب) مسئله همزاد این مسئله را با استفاده از روش سیمپلکس همزاد حل نمایید. سلسله جواب های اساسی را با جواب های اساسی در قسمت اول مقایسه کنید.

الف) حل با استفاده از روش سیمپلکس اولیه

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	طرف سمت راست	جواب اولیه	جواب همزاد
Z	0	1	-15	-10	0	0	0	0	جدول غیر بهینه (0,0,40,20,90)	(0,0,0,-15,-10)
X ₃	1	0	3	1	1	0	0	40		
X ₄	2	0	1	1	0	1	0	20		
X ₅	3	0	5	3	0	0	1	90		
Z	0	1	0	-5	5	0	0	200	جدول غیر بهینه (40/3,0,0,20/3,70/3)	(5,0,0,0-5)
X ₁	1	0	1	0.33	0.33	0	0	40/3		
X ₄	2	0	0	0.66	-0.33	1	0	20/3		
X ₅	3	0	0	1.33	-1.66	0	1	70/3		
Z	0	1	0	0	2.5	7.5	0	250	جدول بهینه (10,10,0,0,10)	(2.5,7.5,0,0,0)
X ₁	1	0	1	0	0.5	-0.5	0	10		
X ₂	2	0	0	1	-0.5	1.5	0	10		
X ₅	3	0	0	0	-1	-2	1	10		

تمرین ها

$$\text{Min } Z = 40y_1 + 20y_2 + 90y_3$$

s.t.

$$(1) \quad 3y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 15$$

$$(2) \quad y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 10$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

(ب) مدل همزاد به صورت زیر است:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	طرف سمت راست	جواب همزاد	جواب اولیه
Z	0	-1	40	20	90	0	0	0		
Y ₄	1	0	-3	-1	-5	1	0	-15	(0,0,0,-15,-10)	(0,0,40,20,90)
Y ₅	2	0	-1	-1	-3	0	1	-10	جدول غیر بهینه	
Z	0	1	0	20/3	70/3	40/3	0	-200		
Y ₁	1	0	1	0.33	1.66	-0.33	0	5	(5,0,0,0-5)	(40/3,0,0,20/3,70/3)
Y ₅	2	0	0	-0.66	-1.33	-0.33	1	-5	جدول غیر بهینه	
Z	0	1	0	0	10	10	10	-250		
Y ₁	1	0	1	0	1	-0.5	0.5	2.5	(2.5,7.5,0,0,0)	(10,10,0,0,10)
Y ₂	2	0	0	1	2	0.5	-1.5	7.5	جدول بهینه	

جواب بهینه مدل همزاد (2.5,7.5,0) و $Z = 250$ است.

تمرین: مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = -5x_1 - 10x_2$$

s.t.

$$(1) \quad 2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$(2) \quad x_2 \geq 15$$

$$(3) \quad -2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

الف) مدل فوق را به صورت ترسیمی حل نمایید.

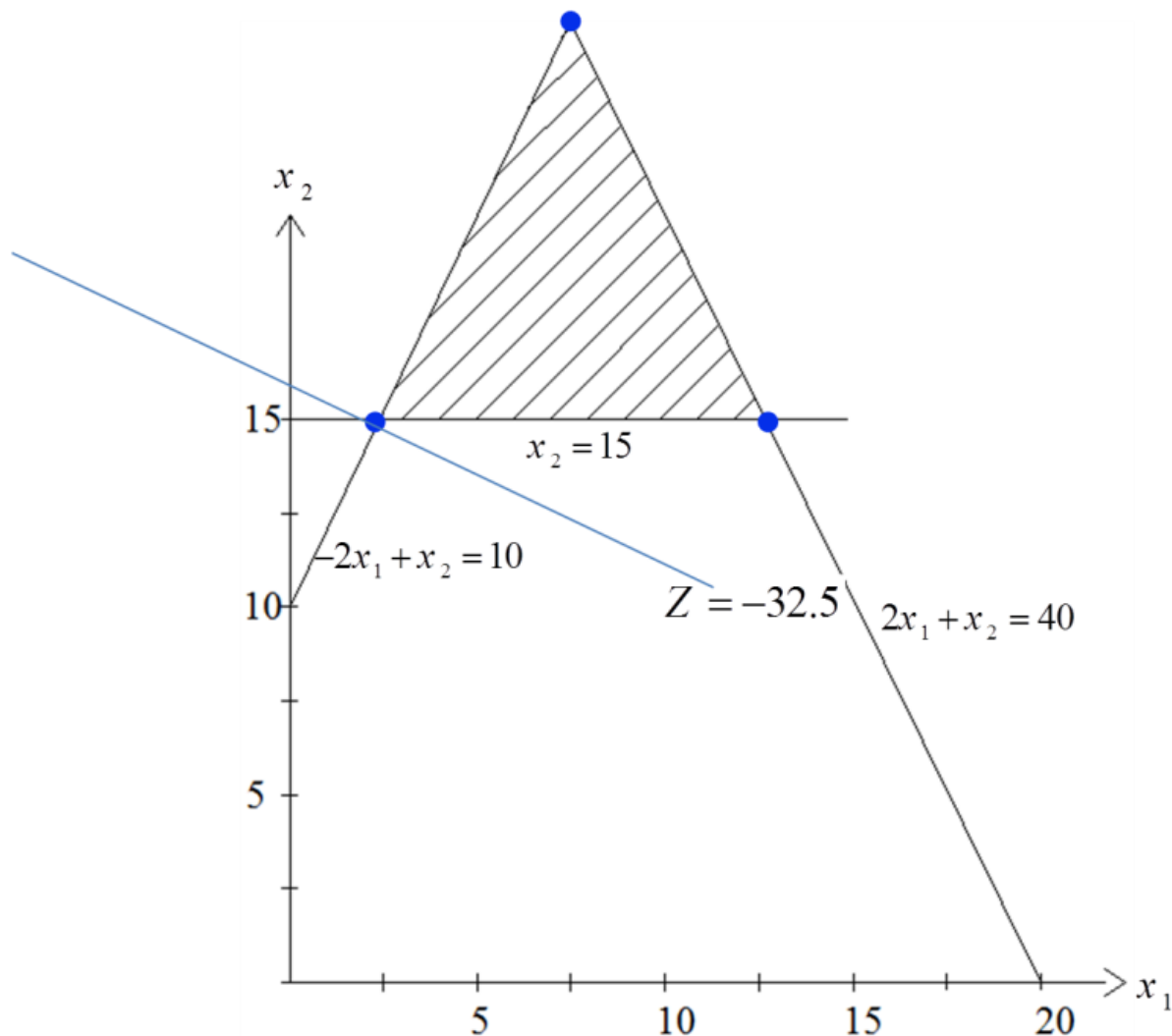
ب) مدل فوق را به روش سیمپلکس همزاد حل نمایید.

پ) مسیر حرکت جدول سیمپلکس همزاد را در شکل نشان دهید.

.

تمرین ها

(الف)



تمرین ها

(ب)

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	طرف سمت راست
Z	0	1	1	2	0	0	0	0
X ₃	1	0	2	1	1	0	0	40
X ₄	2	0	0	-1	0	1	0	-15
X ₅	3	0	-2	1	0	0	1	10
Z	0	1	2	0	0	2	0	-30
X ₃	1	0	0	0	1	1	0	25
X ₂	2	0	0	1	0	-1	0	15
X ₅	3	0	-2	0	0	1	1	-5
Z	0	1	0	0	0	2.5	0.5	-32.5
X ₃	1	0	0	0	1	2	1	20
X ₂	2	0	0	1	0	-1	0	15
X ₁	3	0	1	0	0	-0.5	-0.5	2.5

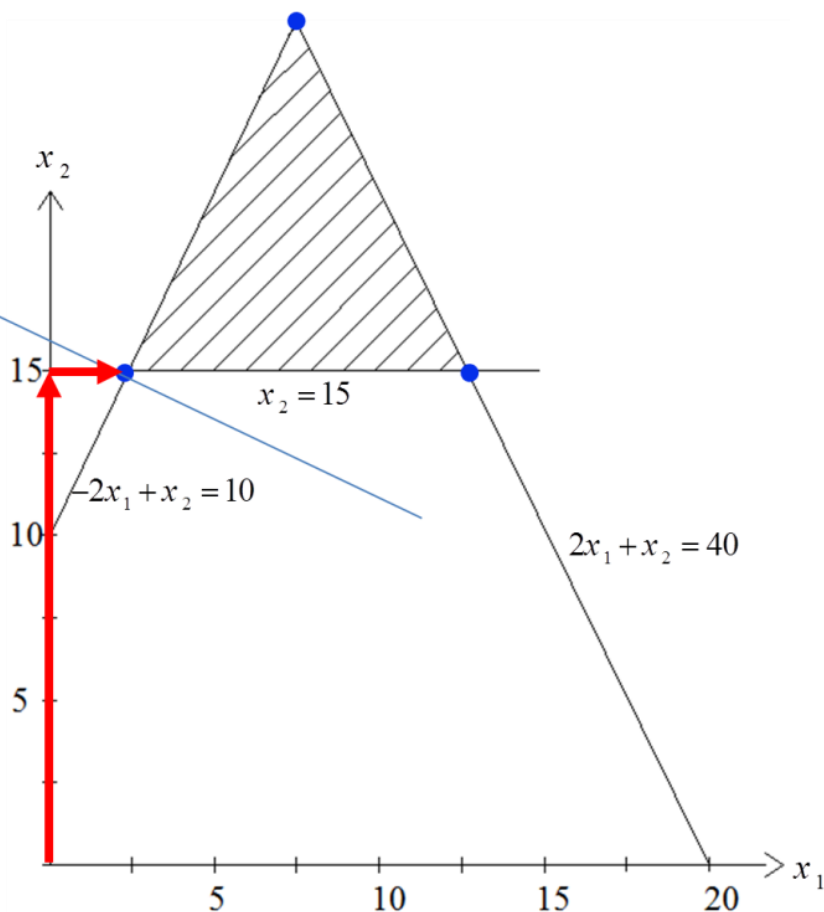
جدول غیر
بهینه

جدول غیر
بهینه

جدول بهینه

جواب بهینه برابر $(x_1, x_2) = (2.5, 15)$ و $Z = -32.5$ است.

پ) مسیر حرکت جدول سیمپلکس همزاد در شکل به صورت زیر است: $(0,0) \rightarrow (0,15) \rightarrow (2.5,15)$



با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com