درس ۳۰:

روش *Outer Approximation*

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

روش *Outer approximation*، یک روش رایج برای مسائل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط غیر خطی یا *Mixed Integer Nonlinear Programming* است. در مقابل این روش، روش تجزیه بنـدرز[1] وجـود دارد. ایده این دو روش یکسان است و حل مسئله نیازمند حل یک مسئله برنامه ریزی غیرخطـی بـه عنـوان زیـر مسئله[2] و حل یک مسئله برنامه ریزی عدد صحیح مختلط به عنوان مسئله اصلی[3] است. ولی تفاوت ان ها در نحوه نوشتن مسئله اصلی است.

فرم کلی مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط غیرخطی با عنوان *MINLP1* را بـه صـورت زیـر در نظـر بگیرید.

$$(MINLP_1) \qquad \begin{aligned} &\min \ f(x,y) \\ &\text{s.t.} \ \ g(x,y) \leq 0, \\ &\qquad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \ y \in Y \subset \mathbb{Z}^m. \end{aligned}$$

که در مدل فوق، تعاریف ذیل را داریم.

$$f : X \times Y \to \mathbb{R},$$

$$g_i : X \times Y \to \mathbb{R} \ (i = 1, \ldots, q)$$

$$g = (g_1, \ldots, g_q)^T$$

و $\mathbb{Z}^m$ مجموعه m بعدی از اعداد صحیح و $\mathbb{R}^n$ مجموعه n بعدی از اعداد پیوسته است. فرض می شود که توابع f و g_i محدب و مشتق پذیر هستند. مجموع های S و V به صورت زیر تعریف می شوند.

$$S = \{(x,y) \in X \times Y \mid g(x,y) \leq 0\}$$

---

[1] Benders Decomposition

[2] Sub problem

[3] Master problem

$$V = \{y \in Y \mid \text{ there exists } x \in X \text{ such that } g(x,y) \leq 0\}.$$

برای مقدار $y^i \in V$ ، x^i را جواب بهینه مسئله $NLP(y^i)$ (که در ادامه آمده است) در نظر بگیرید.

$$(NLP(y)) \qquad \begin{aligned} &\min \ f(x,y) \\ &\text{s.t. } \ g(x,y) \leq 0, \\ &\qquad x \in X. \end{aligned}$$

مدل *MINLP1* را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\min_{(x,y)\in S} f(x,y) &= \min_{y^i\in V} \min_{x\in X}\{f(x,y^i) \mid g(x,y^i) \leq 0\} \\
&= \min_{y^i\in V} \min \ f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{s.t. } \ g(x^i,y^i) + \nabla g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0 \\
&\qquad\quad x \in X \\
= \ & \min_{y^i\in V} \min \ \alpha \qquad\qquad (13.4. \\
&\quad \text{s.t. } \ \alpha \geq f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad x \in X, \alpha \in \mathbb{R}^1, \qquad ❈
\end{aligned}$$

تعریف کنید،

$$T = \{i \mid y^i \in V \text{ and } x^i \text{ solves } (NLP(y^i))\}.$$

مدل اصلی که با *MOAV* معرفی می شود براساس مجموع *T* به صورت زیر تعریف می شود.

$$(MOAV) \qquad \begin{aligned} &\min \ \alpha \\ &\text{s.t. } \ \alpha \geq f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ y-y^i \end{pmatrix}, \ i \in T, \\ &\qquad 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ y-y^i \end{pmatrix}, \ i \in T, \\ &\qquad x \in X, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

اگر (x^*,y^*) جواب بهینه مدل *MINLP1* در نظر گرفته شود، (α^*,x^*,y^*) مدل * خواهد بود. می توان نشان داد که حل مسئله *MOAV* معادل حل مسئله *MINMP1* است. در موارد اشاره شده، فرض شده است که $y^i \in Y$ منجر به یک جواب امکان پذیر برای $NLP(y^i)$ می شود. ولی اگر این فرض برقرار نباشد، باید بتوان به نحوی جواب y^i را از فضای امکان پذیر مسئله *MOAV* حذف کرد. برای این که نشان دهیم که y^i منجر به یک جواب امکان ناپذیر برای $NLP(y^i)$ می شود، می توان مدل $NLPF(y)$ را حل کرد.

$$
\begin{aligned}
(NLPF(y)) \qquad & \min\ \beta \\
& \text{s.t. } \beta \geq g_i(x,y), \quad i=1,\ldots,q, \\
& \qquad x \in X.
\end{aligned}
$$

y^i منجر به امکان ناپذیری مدل $NLP(y^i)$ می شود اگر $NLPF(y^i)$ یک جواب امکان پذیر $\beta^*>0$ داشته باشد. در این صورت محدودیت زیر را برای حذف y^i از فضای امکان پذیر *MOAV* اضافه می کنیم.

$$0 \geq g_j(x^i,y^i) + \nabla^T g_j(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x-x^i \\ y-y^i \end{pmatrix},\ j=1,\ldots,q,$$

F را مجموعه اندیس هایی تعریف کنید که $y^i \in Y$ باعث امکان ناپذیری $NLP(y^i)$ می شود. در مسئله *MOVA*، رابطه $y \in V$ باعث می شود که مقادیر امکان پذیر برای *y* انتخاب شود. با در نظر گرفتن محدودیت بالا، جواب های امکان ناپذیر از کلیه مقادیر *y* در Y حذف می شود. لذا می توان با جایگزین کردن $y \in V$ با $y \in Y$ و محدویت بالا، مدل *MOAV* را حل کرد که از این پس این مدل را *MOA* می نامیم که به صورت زیر بیان می شود.

$$
\begin{aligned}
(MOA) \qquad & \min\ \alpha \\
& \text{s.t. } \alpha \geq f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T, \\
& \quad 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T, \\
& \quad 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in F, \\
& \quad x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}^1.
\end{aligned}
$$

با توجه به این که محدودیت های مدل فوق به صورت مرحله به مرحله به مدل *MOA* اضافه می شـود، لذا مدل به صورت زیر نوشته می شود.

$$
\begin{aligned}
(MOA_k) \qquad & \min\ \alpha \\
& \text{s.t. } \alpha \geq f(x^i,y^i) + \nabla^T f(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T^k, \\
& \quad 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in T^k, \\
& \quad 0 \geq g(x^i,y^i) + \nabla^T g(x^i,y^i)\begin{pmatrix} x - x^i \\ y - y^i \end{pmatrix},\ i \in F^k, \\
& \quad x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}^1,
\end{aligned}
$$

که در مدل فوق داریم:

$$
\begin{aligned}
T^k &= \{i \mid y^i \in V \text{ and } x^i \text{ solves } NLP(y^i),\ i = 1,\dots,k\}, \\
F^k &= \{i \mid NLP(y^i) \text{ is infeasible and } x^i \text{ solves } NLPF(y^i),\ i = 1,\dots,k\}.
\end{aligned}
$$

با توجه به مواردی که تا کنون گفته شد، می توان الگوریتم *Outer Approximation* را به صـورت زیـر بیان کرد.

گام ۱: $y^1 \in Y$ را در نظر بگیرید. $LB=-\infty; UB=+\infty; T^0=F^0=\varnothing; k=1$

گام ۲: مسئله $NLP(y^k)$ را حل کنید.

الف) اگر $NLP(y^k)$ امکان پذیر بود، جواب بهینه مدل را در x^k قرار دهید. $f(x^k,y^k)=UB^k$ و $T^k=T^{k-1}\cup\{k\}$ و $\min\{UB,UB^k\}=UB$. اگر $UB=UB^k$ باشد $(x^k,y^k)\to(x^*,y^*)$.

ب) اگر $NLP(y^k)$ امکان ناپذیر بود، مسئله $NLPF(y^k)$ را حل کنید. و جواب بهینه x^k را در نظر بگیرید و $F^k=F^{k-1}\cup\{k\}$.

گام ۳: مسئله MOA_k را حل کنید و جواب $(\alpha^k,x^{k+1},y^{k+1})$ را بدست آورید و $\alpha^k=LB^k$. اگر $LB^k\geq UB$ بود متوقف شوید و (x^*,y^*) را جواب بهینه مسئله *MINLP1* معرفی کنید. در غیر این صورت $k:=k+1$ و بروید گام ۲.

مثال: مدل برنامه ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط زیر را به روش *outer approximation* حل کنید.

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x,y)=5y-2\ln(x+1)\\
\text{s.t.}\ & g_1(x,y)=e^{x/2}-(1/2)\sqrt{y}-1\leq 0,\\
& g_2(x,y)=-2\ln(x+1)-y+2.5\leq 0,\\
& g_3(x,y)=x+y-4\leq 0,\\
& x\in[0,2],\ y\in[1,3]\ \text{integer}.
\end{aligned}
$$

حل:

گام ۱: $y^1=1; LB=-\infty; UB=+\infty; T^0=\varnothing; F^0=\varnothing$

گام ۲: مسئله $NLP(y^k)$ را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 5y^k - 2\ln(x+1)\\
&s.t.\\
&e^{x/2} - \frac{1}{2}\sqrt{y^k} - 1 \le 0\\
&-2\ln(x+1) - y^k + 2.5 \le 0\\
&x + y^k - 4 \le 0\\
&x \in [0,2].
\end{aligned}
$$

سوال این است که آیا این مسئله امکان پذیر است یا خیر؟ برای ایـن منظـور، مسـئله $NLPF(y^k)$ را حل می کنیم.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \beta\\
&s.t.\\
&\beta \ge e^{x/2} - 1.5\\
&\beta \ge -2\ln(x+1) - 1.5\\
&\beta \ge x - 3\\
&x \in [0,2]
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$\beta^* = 0.133; x^1 = 0.98$$

لذا مسئله $NLP(y^k)$ امکان ناپذیر است. به عبارت دقیق تر، $NLP(y^k)$ برای $y^k = 1$ امکان ناپـذیر است. لذا $F^1 = \{1\}$.

گام ۳: محدودیت هایی که جواب گام ۲ را از فضای امکان پذیر حذف کند به صورت زیر به مدل *MOA* اضافه می شود.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \alpha \\
&s.t. \\
&0 \geq e^{0.98/2} - 0.5\sqrt{1} - 1 + \left(0.5e^{0.98/2}, -0.5\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)\begin{pmatrix} x - 0.98 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&0 \geq -2\ln(1.98) - 1 + 2.5 + \left(\frac{-2}{0.98+1}, -1\right)\begin{pmatrix} x - 0.98 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&0 \geq 0.98 + 1 - 4 + (1,1)\begin{pmatrix} x - 0.98 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&x \in [0,2], y \in [1,3], \text{int}
\end{aligned}
$$

ساده شده مدل فوق به صورت زیر می شود.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \alpha \\
&s.t. \\
&0 \geq -0.417 + 0.816x - 0.25y \\
&0 \geq 2.1236 - 1.01x - y \\
&0 \geq -4 + x + y \\
&x \in [0,2], y \in [1,3], \text{int}
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$x^2 = 0.1224; y^2 = 2; \alpha^1 = -\infty; LB = -\infty$$

گام ۲: برای $y^2 = 2$ مدل $NLP(y^2)$ دارای جواب امکان پذیر است؟

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 10 - 2\ln(x+1) \\
&s.t. \\
&e^{x/2} - 0.5\sqrt{2} - 1 \leq 0 \\
&-2\ln(x+1) - 2 + 2.5 \leq 0 \\
&x + 2 - 4 \leq 0 \\
&x \in [0,2]
\end{aligned}
$$

برای بررسی امکان پذیری مدل فوق می بایستی مدل زیر را حل کرد:

$$\begin{aligned}&\min \quad \beta\\&s.t.\\&\beta \geq e^{x/2} - 0.5\sqrt{2} - 1\\&\beta \geq -2\ln(x+1) + 0.5\\&\beta \geq x - 2\\&x \in [0,2]\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق برابراست با:

$$\beta^* = -0.3855; x = 0.557$$

با توجه به این که β^* منفی است لذا مدل $NLP(y^2)$ امکان پذیر است. حالا مدل $NLP(y^2)$ را حل می کنیم.

$$\begin{aligned}&\min \quad 10 - 2\ln(x+1)\\&s.t.\\&e^{x/2} - 0.5\sqrt{2} - 1 \leq 0\\&-2\ln(x+1) - 2 + 2.5 \leq 0\\&x + 2 - 4 \leq 0\\&x \in [0,2]\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است:

$$x^2 = 1.069; f\left(x^2, y^2\right) = 8.545 = UB^2$$

$$UB = \min\{+\infty, 8.545\} = 8.545 \rightarrow \left(x^*, y^*\right) = (1.069, 2); T^2 = \varnothing \cup \{2\}$$

گام ۳: مدل *MOA* را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \alpha \\
&s.t. \\
&T^2 = \begin{cases}
\alpha \ge 5\times 2 - 2\ln(1+1.069) + \left(-\dfrac{2}{1.069+1}, 5\right)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix} \\
0 \ge e^{1.069/2} - 0.5\sqrt{2} - 1 + \left(0.5e^{1.069/2}, -0.5\dfrac{1}{2\sqrt{1}}\right)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix} \\
0 \ge -2\ln(1+1.069) - 2 + 2.5 + \left(\dfrac{-2}{1.069+1}, -1\right)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix} \\
0 \ge 3.069 - 4 + (1,1)\begin{pmatrix} x-1.069 \\ y-2 \end{pmatrix}
\end{cases} \\
&F^1 = \begin{cases}
0 \ge -0.417 + 0.816x - 0.25y \\
0 \ge 2.1236 - 1.01x - y \\
0 \ge -4 + x + y
\end{cases} \\
&x \in [0,2], y \in [1,3], \text{int}
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر می شود.

$$x^3 = 1.0692; y^3 = 2; \alpha^2 = 8.545 = LB^2 = UB = 8.545$$

لذا به جواب بهینه رسیدیم که به صورت $(x^*, y^*) = (1.069, 2)$ و پایان.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**