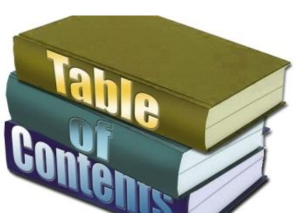
به نام خدا

درس ۱۲: حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح: روش شاخه و کرانه

فهرست مطالب



مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

تفاوت اصلی یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی خطی در **فرض صحیح بودن متغیرهای مسئله** است. شاید در نگاه اول صحیح بودن متغیرها باعث می‌شود که تعداد جواب‌های امکان پذیر **شمارا** باشد که با کنترل **تمامی** *آن‌ها* می‌توان جواب بهینه را یافت. فرض کنید یک مدل دارای n متغیر دودویی (مقدار صفر یا یک می‌تواند اخذ نماید) باشد. اگر $n=10$ باشد، تعداد جواب‌های بیش از ۱۰۰۰ تا و اگر $n=20$ باشد، تعداد جواب‌ها، بیش از یک میلیون و اگر $n=30$ باشد، تعداد جواب‌ها بیشتر از یک میلیارد خواهد بود.

پیچیدگی محاسبات یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح به دو عامل بستگی دارد:

۱) تعداد متغیرهای عدد صحیح

۲) ساختار مسئله

مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

تعداد محدودیت‌ها اثری در دشوار حل مسئله ندارد که این برخلاف مسئله برنامه‌ریزی خطی است. از انجاییکه حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح عملا بسیار دشوار تر از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است، لذا گاهی منطقی به نظر می‌رسد که با حذف محدودیت‌های عدد صحیح، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده تبدیل ساخت و سپس آن را با روش سیمپلکس حل جواب‌ها را گرد کرد. این روش دارای دو اشکال زیر است:

۱-شاید جواب گرد شده دیگر موجه نباشد.

۲-شاید جواب گره شده دیگر بهینه نباشد.

مقدمه حل مسائل برنامه ریزی عدد صحیح

برای تشریح دو اشکال فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

$$Max \quad Z = x_1 + 5x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 10x_2 \le 20$$
$$x_1 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

جواب بهینه مسئله فوق، $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}, z = 11$ است. متغیر که غیرصحیح دارد یعنی $x_2 = \frac{9}{5}$ را به عدد صحیح $x_2 = 1$ گرد می‌کنیم، جواب حاصل $x_1 = 2, x_2 = 1$ و $z = 7$ می‌شود که این جواب با جواب بهینه مدل اصلی، یعنی $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$ اختلاف زیادی دارد.

روش شاخه و کرانه عمومی

چون تعداد جواب‌های موجه یک مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح محدود، متناهی است، لذا طبیعی است که برای پیدا کردن جواب بهینه آن از روش شمارش استفاده شود. مبنـای روش شاخه و کرانه به شرح زیر است:

فرض کنید تابع هدف مسئله مورد نظر باید حداقل شود و مقدار تابع هدف نیز از مقدار مشخصی که آن را حد بـالا (*Upper Bound*) بـا z_u نشـان داده مـی‌شـود) تجاوز نمی‌کند. این حد بالا معمولا مقدار تابع هدف به ازای بهترین جواب موجهی است کـه تاکنون پیدا شده است.

روش شاخه و کرانه عمومی

منطقه جواب به چند زیر مجموعه منشعب می‌شود. آنگاه حد پایین هر زیر مجموعـه (Z_L) بدست می‌آید. این حد پایین به این معنا است که Z_L از Z_u بیشتر باشـد از بررسی خارج می‌شود. هر زیر مجموعه که جواب موجه ندارد و یا این که بهترین جـواب موجه ان یافته شده است، از بررسی خارج می‌شود. هر زیر مجموعه ای که بـه هـر کـدام از دلایل فوق حذف شوند به ته رسیده یا *fathomed* گفته می‌شود. وقتی یک مجموعـه بـه تـه می‌رسد، یکی دیگر از مجموعه‌های باقی مانده که مثلا کمترین حد پـایین را دارنـد انتخـاب می‌شود. در عمل شاخه شدن بر روی آن انجام می‌شود.

روش شاخه و کرانه عمومی

الگوریتم روش شاخه و کرانه

قدم ابتدایی: $z_U = \infty$. کل جواب‌های مورد بحث را به عنوان زیر مجموعه موجود در نظر بگیرید.

قدم انشعاب $(Branch\ \ step)$: یکی از زیر مجموعه‌های باقی مانده (یک زیر مجموعه که نه به ته رسیده و نه منشعب شده است) را برای انشعاب انتخاب کنید. آن گاه زیر مجموعه انتخاب شده را به دو تا چند زیر مجموعه تقسیم کنید.

قدم تحدید $(Bound\ \ step)$: حد پایینی مقدار تابع هدف (z_L) برای این زیر مجموعه تعیین کنید.

روش شاخه و کرانه عمومی

ادامه الگوریتم روش شاخه و کرانه

قدم به ته رسیدن (*fathoming step*): هر زیر مجموعه جدید که دارای یکی از شرایط زیر باشد، از بررسی بیشتر کنار گذاشته می‌شود.

آزمون ۱: $z_L \geq z_U$

آزمون ۲: زیر مجموعه مورد نظر شامل هیچ جواب موجهی نیست.

آزمون ۳: بهترین جواب موجه این زیر مجموعه مشخص شده است. اگر $z_L < z_U$ باشد، این جواب جایگزین بهترین جواب موجود می‌شود و $z_U = z_L$ و سپس آزمون ۱ برای باقی گره‌ها انجام می‌شود.

قدم بهینگی: هنگامی‌که زیر مجموعه دیگری برای انشعاب باقی نمانده است، توقف کنید. بهترین جواب موجه همان جواب بهینه است. در غیر این صورت، به قدم انشعاب بروید.

روش شاخه و کرانه عمومی

مثال: مسئله تخصیص کار به نفر زیر را در نظر بگیرید. هدف این است که هر کدام از کارها منحصرا به یکی از چهار نفر طوری تخصیص داده شود که مجموع هزینه‌های انجام شده حداقل شود.

نفر	1	2	3	4
A	9	5	4	5
B	4	3	5	6
C	3	1	3	2
D	2	4	2	6

حل:

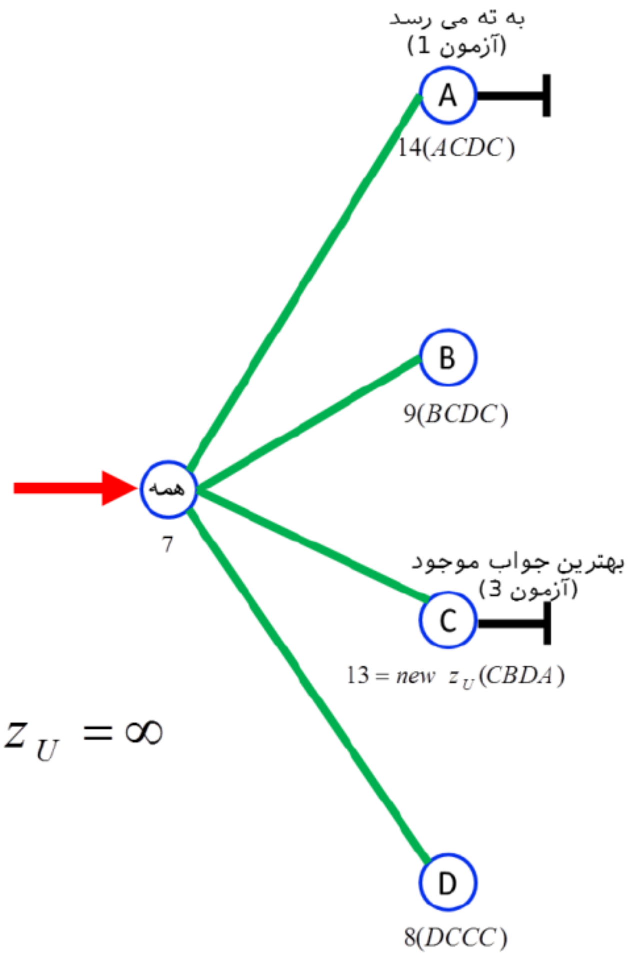
تکرار صفر: این مسئله دارای $4!=24$ ترکیب مختلف از جواب‌ها است. حد پایین این ۲۴ جواب را با z_L نشان می‌دهیم. برای چنین حد پایینی، جمع کردن حداقل‌های ممکن هزینه‌های تخصیص در نظر گرفته می‌شود که برابر با $7=2+2+1+2$ می‌شود. این جواب مربوط به تخصیص $DCDC$ است که یک جواب غیرموجه است.

تکرار ۱: با تخصیص کار ۱ به هر کدام از افراد آغاز می‌کنیم و کل جواب‌ها را به ۴ زیر مجموعه تخصیص می‌دهیم. برای مثال، حد پایین z_L برای تخصیص کار ۱ به نفر A برابر با $(2+2+1)+9=14$ می‌شود. به این صورت که ۹ هزینه تخصیص کار ۱ به نفر A است و حداقل هزینه‌ها برای مابقی کارها به شرط این که به فرد A دیگر کاری تخصیص داده نشود. حد پایین برای کار ۱ به نفر B، برابر با $(2+2+1)+4=9$ ، برای کار ۱ به فرد C، حد پایین برابر $(5+2+3)+3=13$ و برای تخصیص کار ۱ به فرد D، z_L برابر با $(2+3+1)+2=8$ می‌شوند.

چون z_L برای زیر مجموعه C، منجر به جواب موجه $CBDA$ می‌شود، لذا حد بالایی جواب بهینه نیز به صورت $z_U=13$ به هنگام می‌شود و $CBDA$ جواب بهینه فعلی می‌شود. طبق آزمون ۳، زیر مجموعه C به ته می‌رسد. با توجه به آزمون ۱، زیر مجموعه A به ته می‌رسد و لذا تنها دو مجموعه B و D برای انشعاب باقی می‌ماند.

روش شاخه و کرانه عمومی

شماره کار: 1 2 3 4

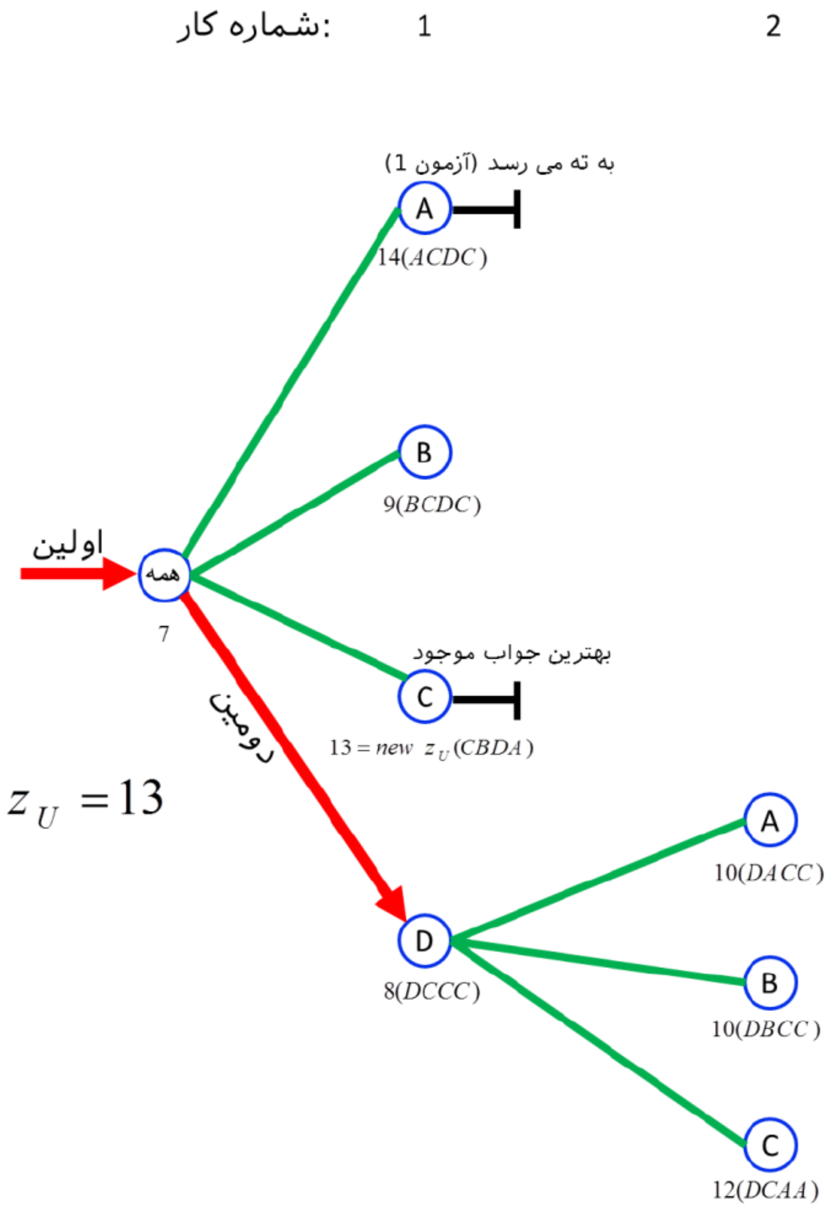


$z_U = \infty$

روش شاخه و کرانه عمومی

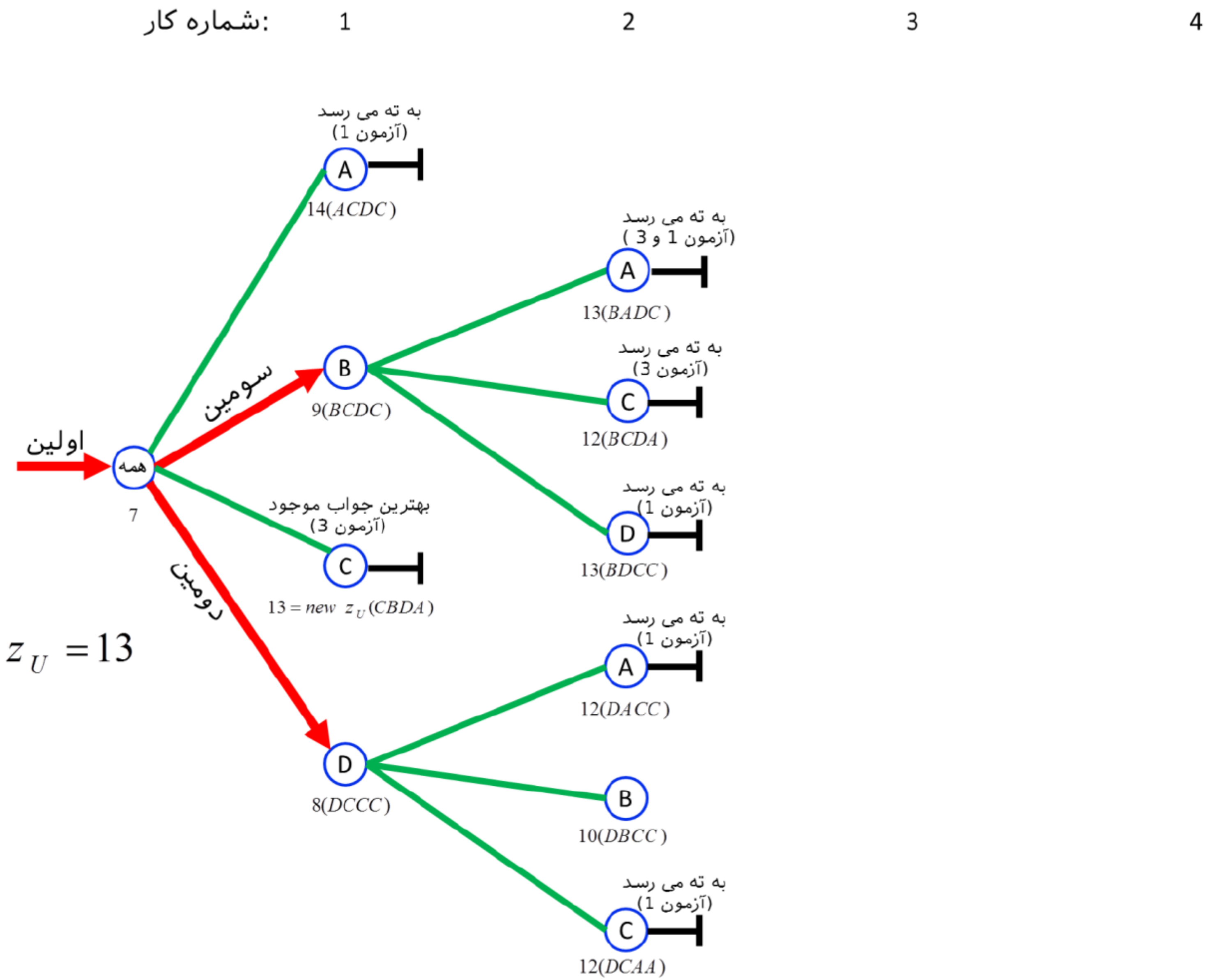
تکرار ۲: از بین دو زیر مجموعه باقی مانده، زیر مجموعه D به دلیل این که کمترین حد پایین را دارد انتخاب می‌شود. به این اصل، اصل بهترین حد گفته می‌شود. در این زیر مجموعه کار ۱ به فرد D تخصیص داده می‌شود و در این زیر مجموعه، می‌توان ۳ زیر مجموعه DA، DB، و DC منشعب کرد که حد پایین به ترتیب برابر با ۱۲، ۱۰، و ۱۲ می‌شود.

روش شاخه و کرانه عمومی



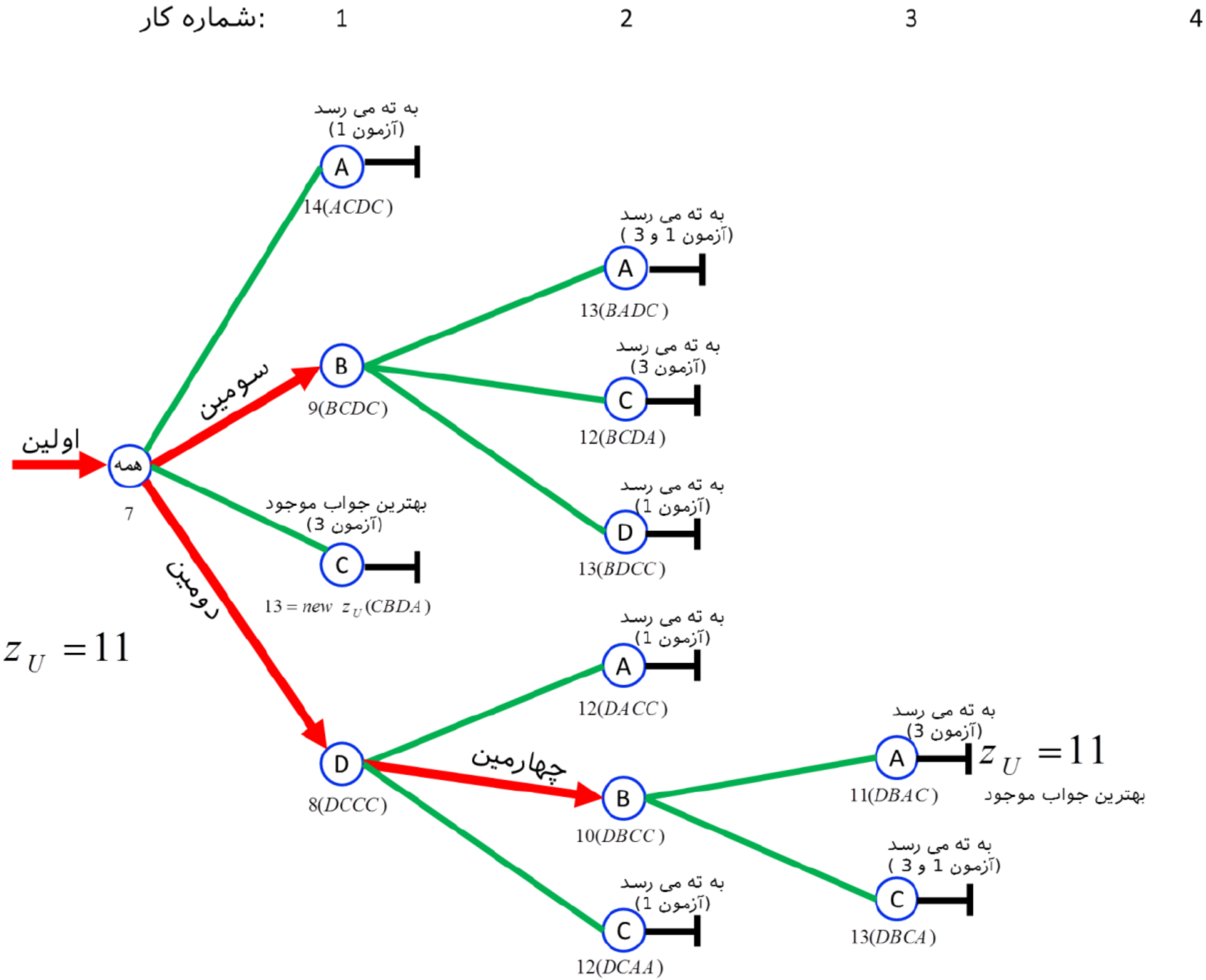
تکرار۳: از بین چهار زیر مجموعه باقی مانده، زیـر مجموعـه B بـه دلیـل کمتـرین حـد پایین انتخاب می‌شود و انتخاب به سه زیر مجموعه BA،BC، BD منشعب می‌شود. حد پـایین آن‌ها به ترتیـب برابـر بـا $4+5+(2+2)=13$ ، $4+1+(2+5)=12$ و $4+4+(3+2)=13$ خواهد بود. چون زیر مجموعه‌هـای BA و BC جـواب‌هـای موجـه هسـتند و حـد پـایین زیـر مجموعه‌های BA و BD برابر حد بالای هستند، لذا هر3زیر مجموعه به ته می‌رسـد. همچنـین چون زیر مجموعه BC یک جواب موجه است مقـدار تـابع هـدف در ان از z_U فعلـی کمتـر است، لذا جواب $BCDA$ بهترین جواب موجه جدید محسوب می‌شود. از آن جاییکه $z_U = 12$ برابر با z_L زیر مجموعـه‌هـای DA و DC اسـت، لـذا ایـن دو مجموعـه نیـز بـه تـه مـی‌رسـد. بنابراین، تنها زیر مجموعه ای که تا این لحظه به جا مانده است، DB است.

روش شاخه و کرانه عمومی



تکرار ۴: تنها زیر مجموعه باقی مانده، DB است که بـه زیـر مجموعـه‌هـای DBA و DBC تقسیم می‌شود. حد پایین *آن‌ها* به ترتیب $2+3+4+(2)=11$ و $2+3+3+(5)=13$ اسـت. چون این دو حد مربوط به جـواب‌هـای موجـه مـی‌شـوند، لـذا هـر دو زیـر مجموعـه بـه تـه می‌رسند. علاوه بر این‌ها، جواب موجه $DBAC$ مربوط به زیر مجموعه DBA از بهترین جواب موجود بهتر است ($11<12$)، لذا این جواب ($DBAC$) به عنوان جواب جدید انتخاب می‌شود. بهترین جواب موجه (یعنی $DBAC$)، جواب بهینه است و الگوریتم به پایان می‌رسد

روش شاخه و کرانه عمومی



روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

در برخی از مسائل، متغیرها می‌توانند بیش از دو مقدار به خود بگیرنـد. مـی‌تـوان ایـن مدل‌ها را ، به متغیرهای دودویی تبدیل کرد. فرض کنید که x یک عدد صحیح است. در ایـن صـورت مـی‌تـوان گفـت $x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i$ کـه $2^N \le x < 2^{N+1}$. در ایـن حالـت، y_i متغیرهای کمکی از نوع صفر و یک هستند.

برای ارایه دستور حل شاخه و کرانه برای مسئله برنامه‌ریـزی عـدد صـحیح دودویـی، مسئله ای عمومی‌به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,\dots,m$$

$$x_j = 0 \; or \; 1, \quad j = 1,\dots,n.$$

که در مدل فوق $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ است. این فرض در واقع محدودیتی ایجاد نمی‌کند. زیرا اگر $c_j < 0$ باشد، می‌توان x_j را با $1 - x'_j$ جایگزین کرد که در این صورت ضریب متغیر x'_j در تابع هدف مثبت خواهد شد.

الگوریتم روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

گام شاخه کردن: در این گام با تخصیص ۰ یا یک به برخی از متغیرها یک زیر مجموعه تعریف می‌شود که آن را جواب جزیی $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ می‌نامند. تکمیل جواب جزیی، جوابی است که N متغیر اول آن برابر متغیرهای جزیی است. اگر $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ آخرین جواب باشد، این جواب به دو زیر مجموعه تقسیم می‌شود که در یکی از آن $x_{N+1} = 1$ و در دیگری $x_{N+1} = 0$ است.

الگوریتم روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

گام کرانه: حد پایین z_L مربوط بـه جـواب جزیـی $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ که موجه باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_L = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

چنانچه جواب جزیی، موجه نباشد و $x_N = 0$، می‌توان حد پـایینی را به شرح زیر تعریف کرد:

$$z_L = \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j + c_{N+1}$$

در صورتیکه جواب جزیی موجه نباشد و $x_N = 1$ باشد، حد پایین از رابطه $z_L = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$ محاسبه می‌شود.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

گام توقف یا به ته رسیدن: در صورتیکه جواب جزیی فعلی در یکی از آزمون‌های سه گانه زیر صدق کرد، دیگر نیازی به شاخه کردن نیست. این آزمون‌ها عبارتند از:

آزمون ۱: $z_L \geq z_U$

که z_U مقدار تابع هدف بهترین جواب موجهی است که تا این مرحله بدست آمده است. در صورتیکه تاکنون جواب موجهی بدست نیامده است، $z_U = \infty$ منظور می‌شود.

آزمون ۲: در این آزمون نبودن جواب موجه در زیر مجموعه مورد نظر بررسی می‌شود که با تکمیل جواب جزیی فعلی آیا ممکن است که حداقل یکی از محدودیت‌ها هرگز برقرار نشود؟ طبق این آزمون، در صورتیکه به ازای یکی از مقادیر $i = 1, \ldots, m$، رابطه زیر صدق نماید، آنگاه شاخه کردن جواب جزیی فعلی متوقف می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + \sum_{j=N+1}^{n} \max\{a_{ij}, 0\} < b_i$$

آزمون ۳:

در این آزمون رسیدن به بهترین جواب موجه در زیر مجموعه بررسی می‌شود که آیا جواب جزیی فعلی موجه است یا نه. چنانچه جواب جزیی فعلی به $x_N = 0$ ختم شود، به جای بررسی موجه بود جواب جزیی فعلی، موجه بودن جواب جزیی که در آن $x_{N+1} = 1$ بررسی می‌شود. بیان ریاضی این آزمون به صورت زیر است.

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j + a_{i,N+1}(1 - x_N) \geq b_i$$

چنانچه این شرط برقرار شود و همچنین داشته باشیم $z_L < z_U$، لذا $z_U = z_L$ می‌شود و این جواب به عنوان بهترین جواب موجود در نظر می‌گیریم.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تمرین: مسئله برنامه ریزی عدد صحیح زیر را حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6 \\
&s.t. \\
&\qquad -x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 2 \\
&\qquad -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2 \\
&\qquad +5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq 3 \\
&\qquad x_j = 0 \; or \; 1; j = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

حل:

تکرار صفر: $z_U=\infty$ و چون ضریب متغیرها در تابع هدف نـامنفی هسـتند، لـذا مقـدار بهینه تابع هدف قطعا از صفر بزرگتر است و لـذا $z_L=0$. چـون جـواب $(0,0,0,0,0,0)$ در محدودیت‌های ۱ و ۳ امکان پذیر نیست، لذا شرایط توقف برقرار نیست و بایـد ایـن گـره، شاخه کرد و این گره به دو شاخه $x_1=1$ و $x_1=0$ تقسیم می‌شود.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار ۱: جواب جزیی (۱) بررسی می‌شود:

آزمون ۱: $3 = z_L \not\geq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$$constr1: -1 + 6 + 4 + 1 \not< 2$$

$$constr2: -5 + 1 + 3 + 1 \not< -2$$

$$constr3: 5 + 4 + 2 \not< 3$$

این گره در این آزمون به ته نمی‌رسد.

آزمون ۳: جواب $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ بررسی می‌شود که محدودیت‌ها برقرار یا نه؟

$$constr1: -1 \geq 2 \quad N.G.$$

$$constr2: -5 \geq -2 \quad N.G.$$

$$constr3: 5 \geq 3 \quad O.K.$$

این گره در آزمون ۳ بسته نمی‌شود.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار ۲: گره با جواب جزیی $(1,0)$ بررسی شود:

آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$constr1: -1+4+1 \not< 2$

$constr2: -5+1+3+1 \not< -2$

$constr3: 5+4+2 \not< 3$

آزمون ۳: جواب $(1,0,1,0,0,0)$ را از نظر برقراری در محدودیت‌ها بررسی شود.

$constr1: -1 -3 \not\geq 2.$

$constr2: -5+1 \not\geq -2$

$constr3: 5+4 \geq 3.$

این گره در آزمون ۳ بسته نمی‌شود.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار۳: جواب جزیی $(1,0,0)$ بررسی شود.

آزمون ۱: $12 = z_L \not\geq z_U = \infty$

آزمون ۲:

$constr1: -1+4+1 \not< 2$

$constr2: -5+3+1 \not< -2$

$constr3: 5+2 \not< 3$

آزمون ۳: با توجه به این که جـواب جزیــی $(1,0,0)$ اسـت، بایـد جـواب $(1,0,0,1,0,0)$ کنترل شود که در محدودیت‌ها برقرار است یا نه؟

$constr1: -1+4 \geq 2.$

$constr2: -5+3 \geq -2$

$constr3: 5-2 \geq 3.$

جواب $(1,0,0,1,0,0)$ امکان پذیر است و لذا $z_U = 12$.

تکرار ۴: جواب جزیی $(1,0,1)$ در نظر بگیرید

آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: -2-3+4+1 < 2$$

$$constr2: -5+1+3+1 \not< -2$$

$$constr3: 5+4+2 \not< 3$$

چون محدودیت ۱ برقرار نیست لذا این گره با توجه به آزمون ۲ به ته می‌رسد.

تکرار ۵: جواب جزیی $(1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $8 = z_L \not< z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: -1 + 6 + 4 + 1 \not< 2$$

$$constr2: -5 - 3 + 1 + 3 + 1 < -2$$

$$constr3: 5 - 1 + 4 + 2 \not< 3$$

این گره به ته می‌رسد.

تکرار۶: جواب جزیی (0) را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $5 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: 0+6+4+1 \not< 2$$

$$constr2: 0+1+3+1 \not< -2$$

$$constr3: 0+4+2 \not< 3$$

با این آزمون به ته نمی‌رسد.

آزمون۳: چون $x_1 = 0$ است، باید کنترل شود که $(0,1,0,0,0,0)$ امکان پذیر است یا نه؟

$$constr1: 6 \geq 2.$$

$$constr2: -3 \not\geq -2$$

$$constr3: -1 \not\geq 3.$$

در این آزمون، گره به ته نمی‌رسد.

تکرار۷: جواب جزیی $(0,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $5 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: 6+4+1 \not< 2$$

$$constr2: -3+1+3+1 \not< -2$$

$$constr3: -1+4+2 \not< 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,1,0,0,0,0)$ بررسی شود.

$$constr1: 6 \geq 2.$$

$$constr2: -3 \not\geq -2$$

$$constr3: -1 \not\geq 3.$$

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار۸: جواب جزیی $(0,1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $11 = z_L \not\geq z_U = 12$

آزمون ۲:

$$constr1: 6-3+4+1 \not< 2$$

$$constr2: -3+1+3+1 \not< -2$$

$$constr3: -1+4+2 \not< 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,1,1,0,0,0)$ کنترل شود.

$$constr1: 6-3 \geq 2.$$

$$constr2: -3+1 \geq -2$$

$$constr3: -1+4 \geq 3.$$

این گره با آزمون ۳ به ته می‌رسد و $z_U = 11$ بهترین جواب موجه فعلی است.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار۹: جواب جزیی $(0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $11 = z_U \geq z_L = 14$ برقرار است و لذا این گره بسته می‌شود.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار ۱۰: جواب جزیی $(0,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $6 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$constr1 : +4+1 \not< 2$$

$$constr2 : 1+3+1 \not< -2$$

$$constr3 : +4+2 \not< 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0,0)$ رابررسی کنید.

$$constr1 : -3 \not\geq 2.$$

$$constr2 : +1 \geq -2$$

$$constr3 : +4 \geq 3.$$

این گره به ته نمی‌رسد.

تکرار ۱۱: جواب جزیی $(0,0,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $6 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$constr1: -3+4+1 \not< 2$$
$$constr2: 1+3+1 \not< -2$$
$$constr3: +4+2 \not< 3$$

آزمون ۳: جواب $(0,0,1,0,0,0)$ کنترل شود.

$$constr1: -3 \not\geq 2.$$
$$constr2: +1 \geq -2$$
$$constr3: +4 \geq 3.$$

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی صفر و یک

تکرار ۱۲: جواب جزیی $(0,0,1,1)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $11 = z_U \geq z_L = 15$، و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۳: جواب $(0,0,1,0)$ را در نظر بگیرید.

آزمون ۱: $11 = z_U \geq z_L = 16$ را در نظر بگیرید و لذا این گره بسته می‌شود.

تکرار ۱۴: جواب $(0,0,0)$ را در نظر بگیرید.

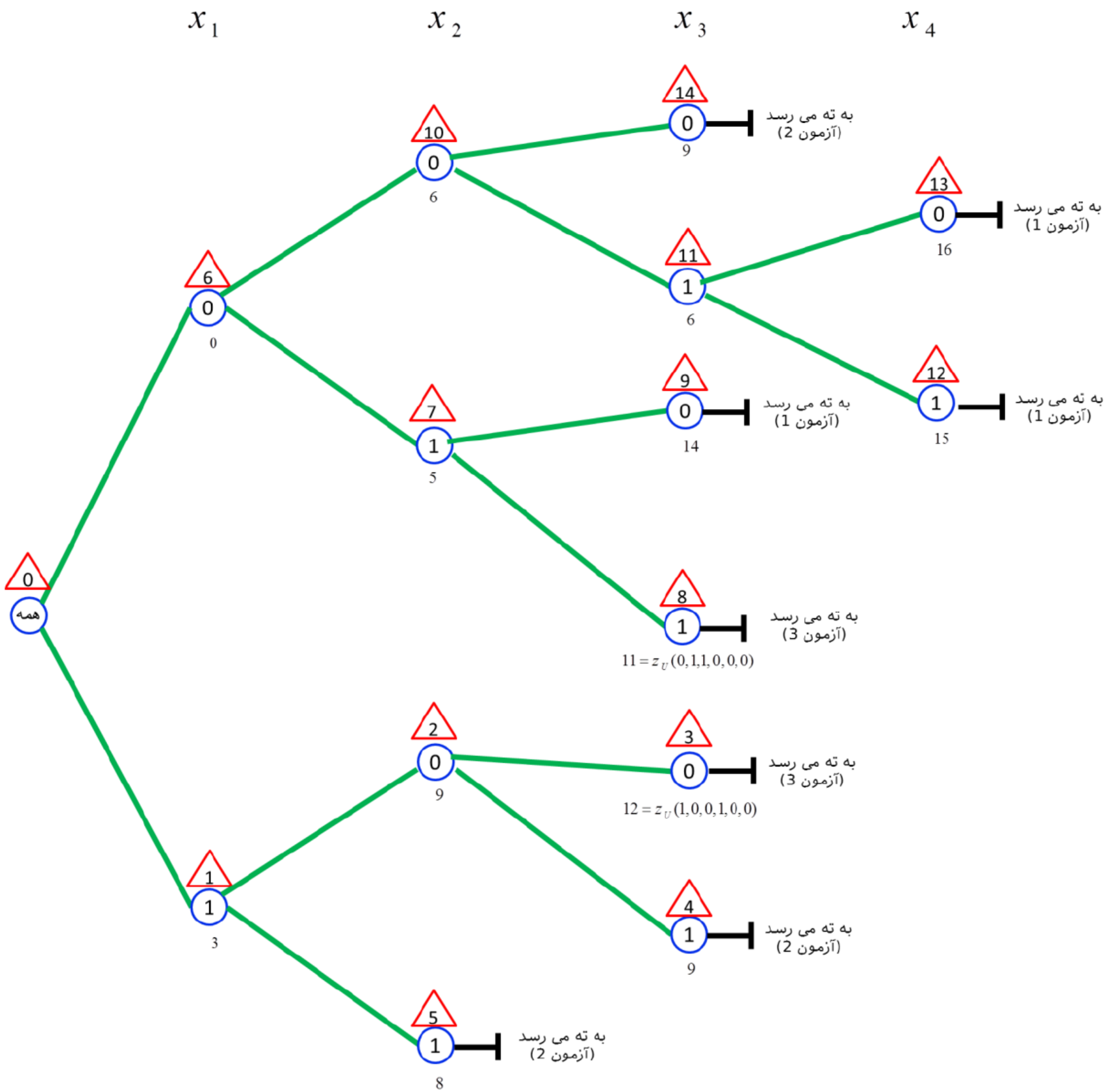
آزمون ۱: $9 = z_L \not\geq z_U = 11$

آزمون ۲:

$$constr1: +1 < 2$$
$$constr2: +1 \not< -2$$
$$constr3: +2 < 3$$

این گره با آزمون ۲ به ته می‌رسد.

کلیه گره‌ها بسته شده است و جواب بهینـه $z = 11$ و $(0,1,1,0,0,0)$ مـی‌شـود.



x_1
x_2
x_3
x_4
همه
به ته می رسد (آزمون 2)
به ته می رسد (آزمون 1)
به ته می رسد (آزمون 3)
$11 = z_U(0,1,1,0,0,0)$
$12 = z_U(1,0,0,1,0,0)$

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$Max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n$$

$$x_j \in \text{int} \quad j=1,\dots,I$$

برای حل مدل فوق الگوریتم زیر ارایه می‌شود.

با حذف محدودیت عدد صحیح و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده انجام می‌شود. اگر جواب حاصل به ازإ تمامی‌متغیرهای عدد صحیح، مقدار صحیح به خود بگیرد، در این صورت جواب بهینه بدست آمده است. در غیر این صورت،

$$k < x_j < k+1$$

۱- جواب‌هایی که در آن $x_j \le k$

۲- جواب‌هایی ک در آن $x_j \ge k+1$

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

با حذف شرط صحیح بودن و حل مسئله برنامه‌ریزی خطی آزاد شده یک حد **بالا** برای زیر مجموعه بدست می‌آید. جواب مسئله آزاد شده توسط روش سیمپلکس ثانویه بدست می‌آید. آزمون‌های به ته رسیدگی به صورت سه آزمون زیر است:

آزمون ۱: $z_L \geq z_{U}$

آزمون ۲: با روش سیمپلکس ثانویه در می‌یابیم که جواب موجهی وجود ندارد.

آزمون ۳: در جواب بهینه، تمام متغیرهای x_j $(j=1,\dots,I)$ عدد صحیح باشند.

اگر زیر مجموعه ای با آزمون ۳ به ته رسید و $z_U > z_L$ باشد، آنگاه $z_L = z_U$ قرار داده شده و این جواب را به عنوان بهترین جواب موجود ذخیره می‌شود. پس از آن که تمامی‌زیر مجموعه‌های باقی مانده به ته رسیدند، آنگاه حد پایین مورد نظرمسئله همان جواب بهینه است.

مثال: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را از روش شاخه و کرانه حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
Max \quad Z &= 5x_1 + 8x_2 \\
x_1 + x_2 &\le 6 \\
5x_1 + 9x_2 &\le 45 \\
x_1, x_2 &\ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

حل: فرم استاندارد مدل فوق به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
Max \quad Z &= 5x_1 + 8x_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
5x_1 + 9x_2 + x_4 &= 45 \\
x_1, x_2 &\ge 0, \text{int}
\end{aligned}
$$

بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP NET DP

A0							
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	طرف سمت راست
Z	0	1	-5	-8	0	0	0
X_3	1	0	1	1	1	0	6
X_4	2	0	5	9	0	1	45
Z	0	1	-5/9	0	0	8/9	40
X_3	1	0	4/9	0	1	-1/9	1
X_2	2	0	5/9	1	0	1/9	5
Z	0	1	0	0	5/4	¾	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	3.75

جدول بهینه

متغیر x_1 و x_2 دارای مقدار غیرصحیح در جواب بهینه است. لذا یکی از متغیرها را باید برای شاخه کردن انتخاب کرد که در این مرحله x_2 انتخاب می‌شود.

A0	
$x_1 = 2.25$ $x_2 = 3.75$	$z = 41.25$

$z_L = -\infty$

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$$x_2 \geq 4 \rightarrow -x_2 \leq -4 \rightarrow -x_2 + s_1 = -4$$

A1								
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	-1	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	0	-5/4	0.25	1	-0.25
Z	0	1	0	0	0	1	1	41
X_1	1	0	1	0	0	1/5	9/5	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0.2

جدول بهینه

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$z_L = -\infty$

A0

$x_1 = 2.25$

$x_2 = 3.75$

$z = 41.25$

$x_2 \geq 4$

A1

$x_1 = 1.8$

$x_2 = 4$

$z = 41$

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$$x_1 \geq 2 \rightarrow -x_1 \leq -2 \rightarrow -x_1 + s_2 = -2$$

A2

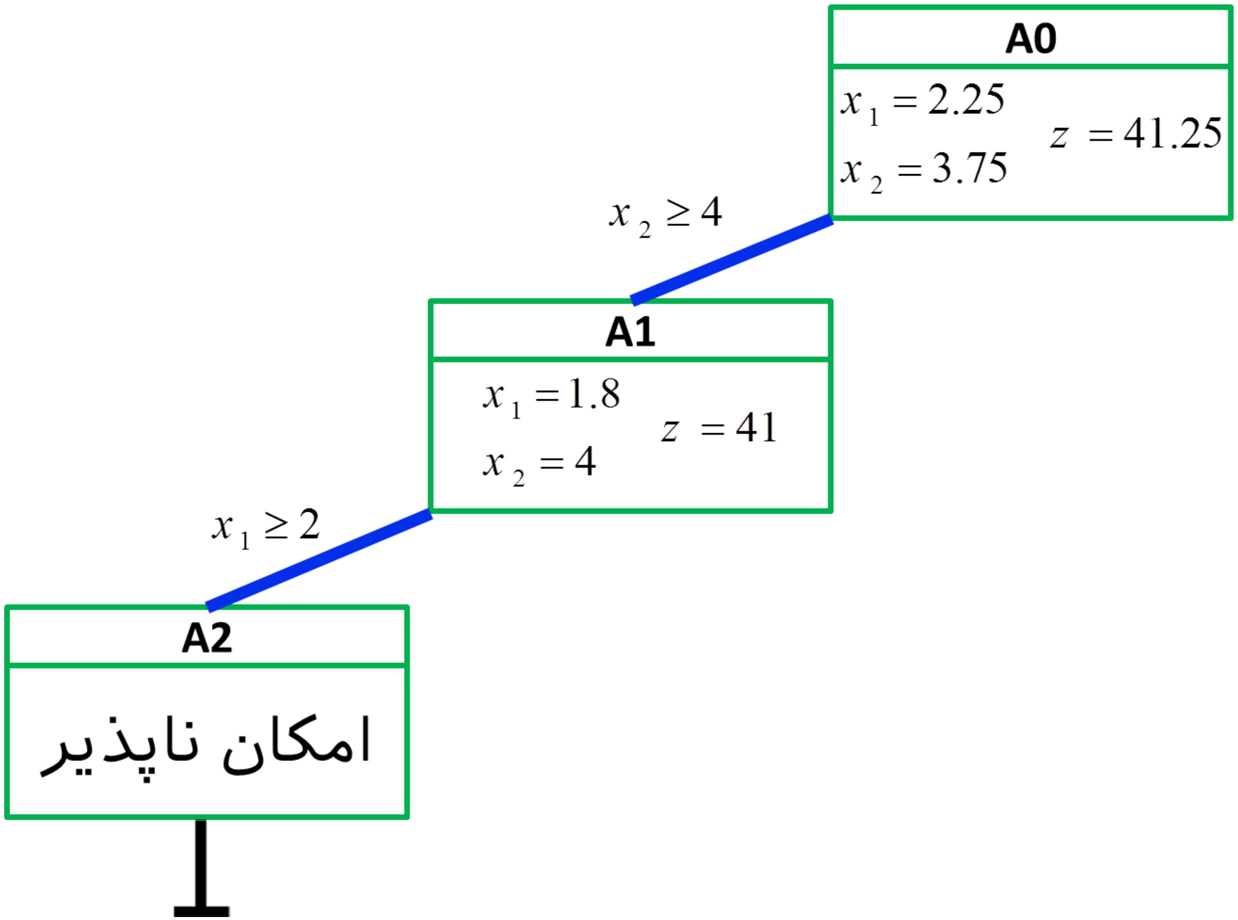
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	1/5	9/5	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	-1	0	0	0	0	1	-4
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	0.2	1.8	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	0	0	0	0.2	1.8	1	-2.2

جدول امکان ناپذیر

با توجه به این که ضرایب متغیرها در معادله شماره ۴ مثبت است و سمت راست منفی است. لذا این جواب امکان ناپذیر است.

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$z_L = -\infty$



روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$x_1 \leq 1 \rightarrow x_1 + s_2 = 1$

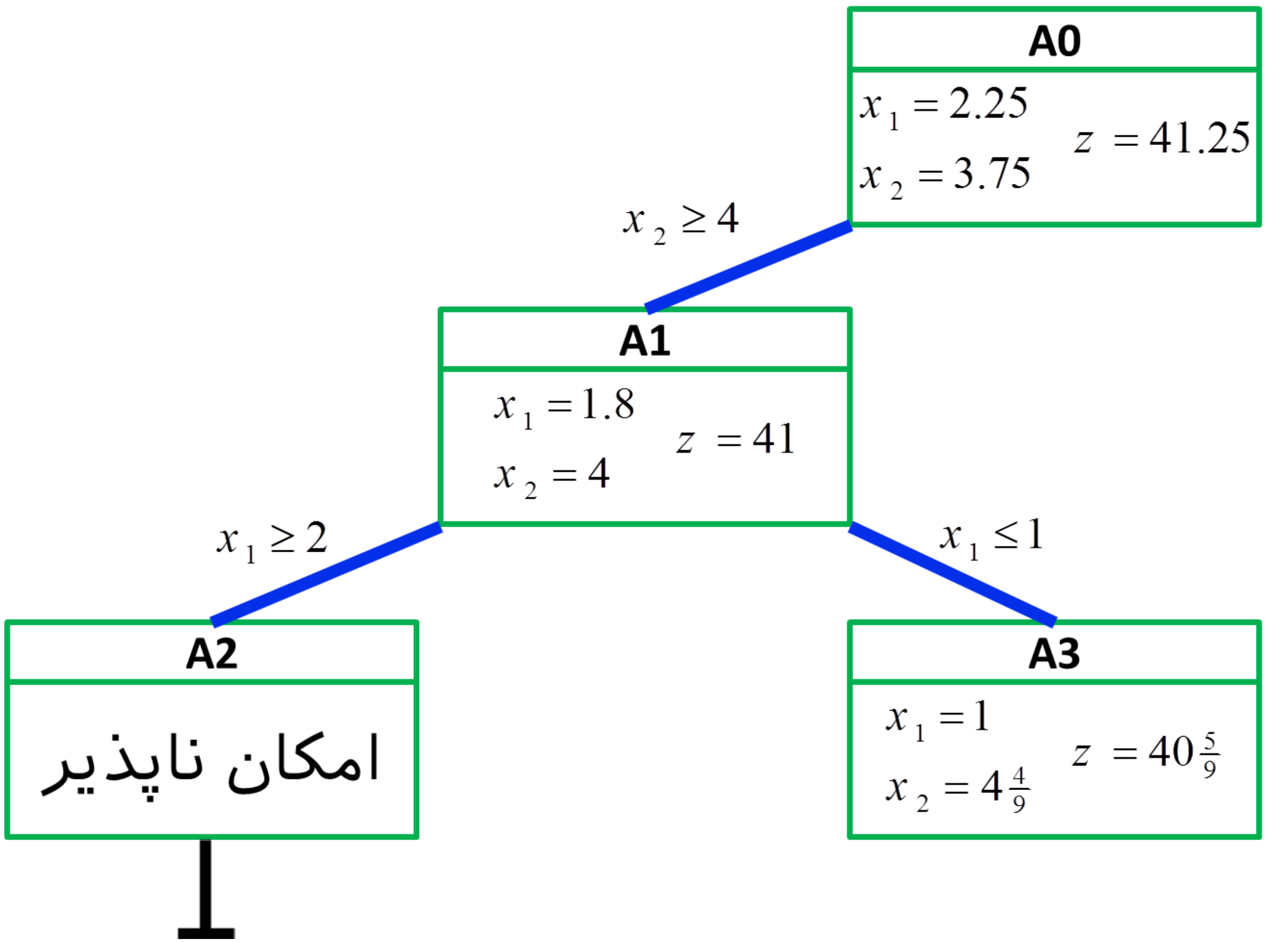
A3

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	1/5	9/5	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	1	0	0	0	1	1	0	41
X_1	1	0	1	0	0	0.2	1.8	0	1.8
X_2	2	0	0	1	0	0	-1	0	4
X_3	3	0	0	0	1	-0.2	-0.8	0	0.2
S_2	4	0	0	0	0	-0.2	-1.8	1	-0.8
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	4/9

جدول بهینه

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$z_L = -\infty$



بهینه‌یاب
نخستین مرجع تحقیق در عملیات
LP IP NP NET DP

$x_2 \le 4 \rightarrow x_2 + s_3 = 4$

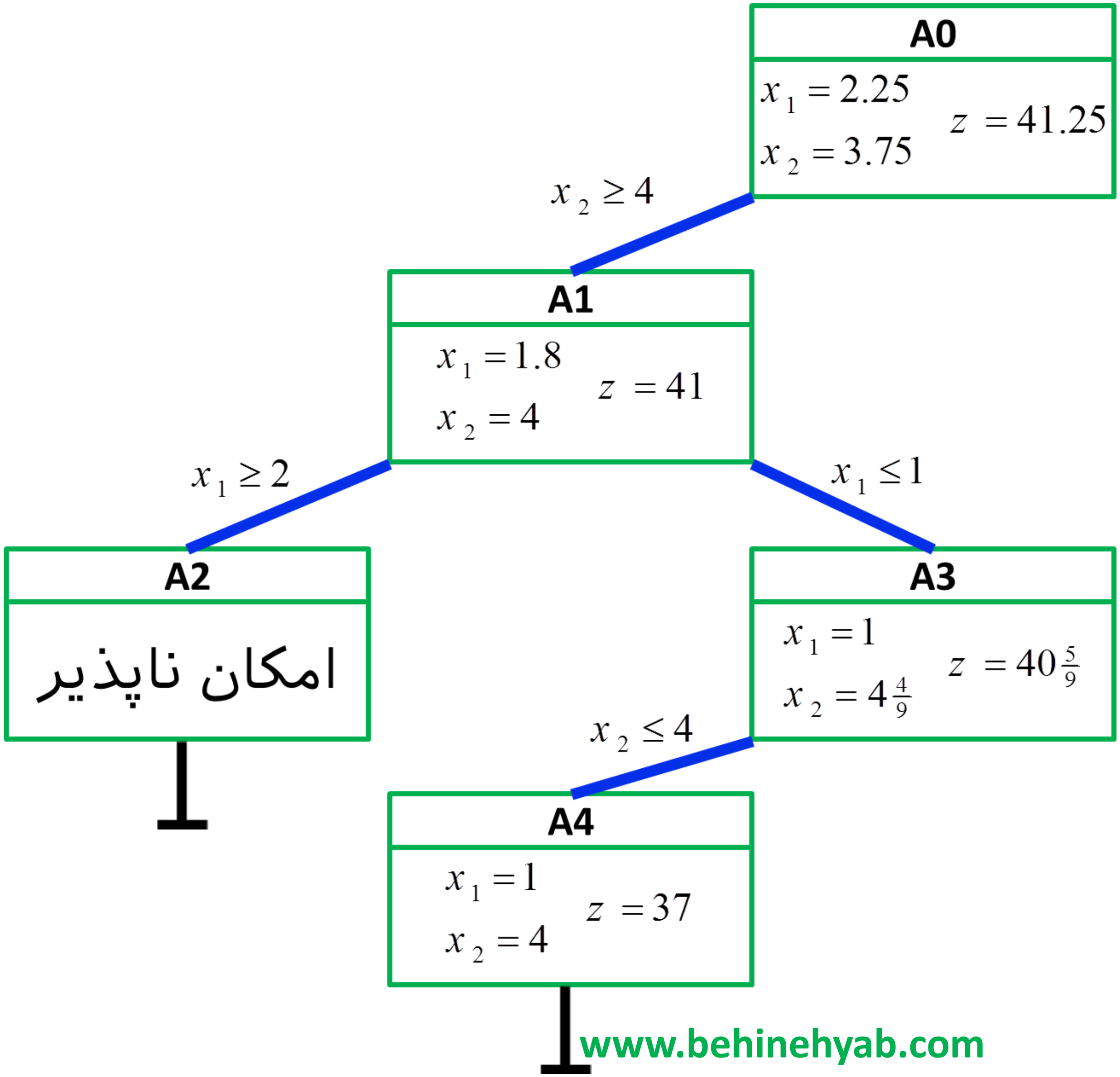
A4

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	1	0	0	0	0	1	4
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	0	0	-1/9	0	5/9	1	-4/9
Z	0	1	0	0	0	0	0	5	8	37
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	0	0	14/9	1	4
X_3	3	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
S_1	4	0	0	0	0	0	1	0	1	0
X_4	5	0	0	0	0	1	0	-5	-9	4

جدول بهینه

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$z_L = \cancel{-\infty}\ 37$



روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

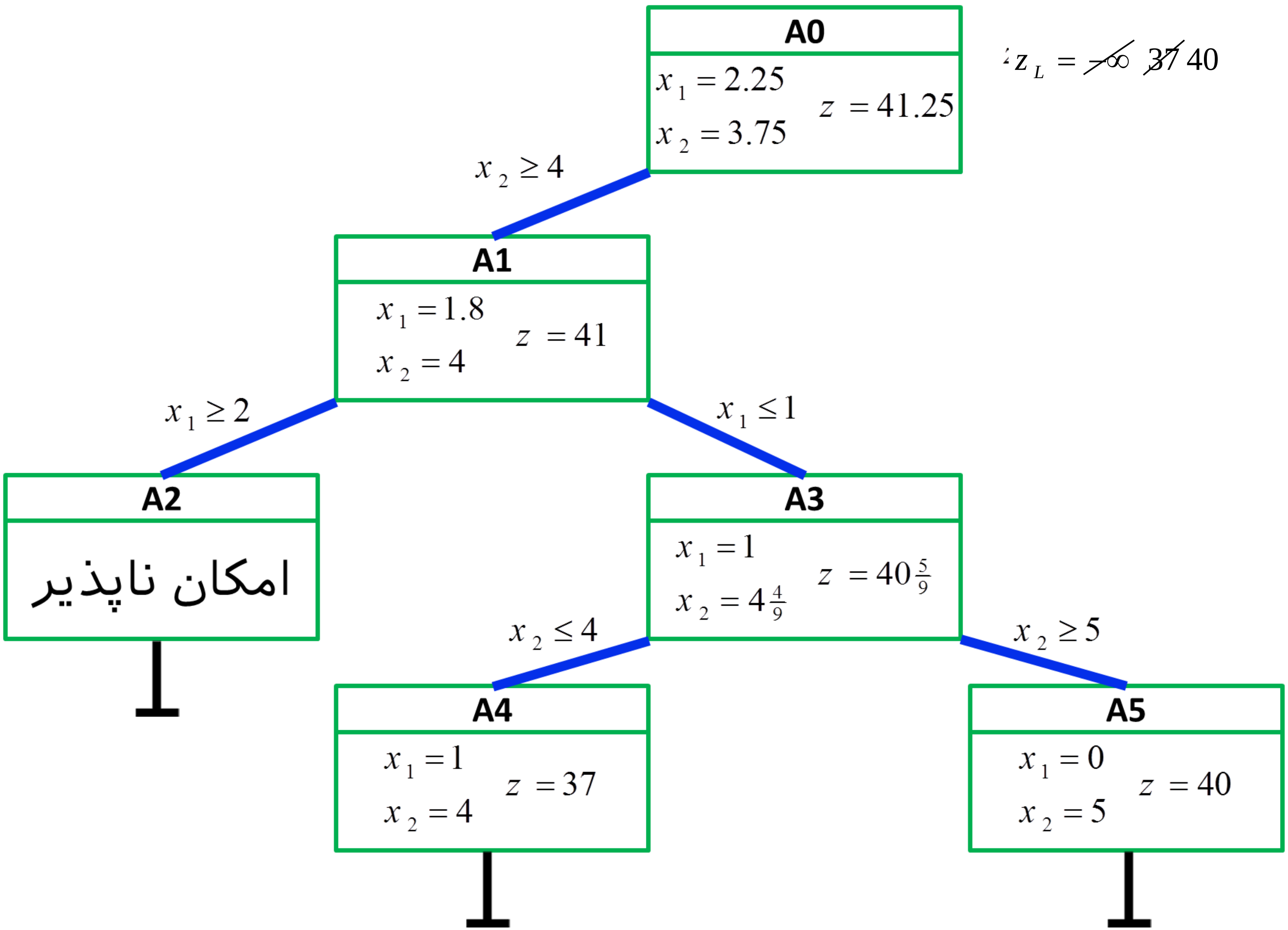
$$x_2 \geq 5 \rightarrow -x_2 \leq -5 \rightarrow -x_2 + s_3 = -5$$

A5										
متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	-1	0	0	0	0	1	-5
Z	0	1	0	0	0	8/9	0	5/9	0	40.555
X_1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
X_2	2	0	0	1	0	1/9	0	-5/9	0	4.444
X_3	3	0	0	0	1	-1/9	0	-4/9	0	5/9
S_1	4	0	0	0	0	1/9	1	-5/9	0	4/9
S_3	5	0	0	0	0	1/9	0	-5/9	1	-5/9
Z	0	1	0	0	0	1	0	0	1	40
X_1	1	0	1	0	0	0.2	0	0	1.8	0
X_2	2	0	0	1	0	0	0	0	-1	5
X_3	3	0	0	0	1	-0.25	0	0	-0.8	1/9
S_1	4	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
S_2	5	0	0	0	0	-0.2	0	1	-1.8	1

جدول بهینه

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

$z_L = \cancel{-\infty}\ \cancel{37}\ 40$



روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط

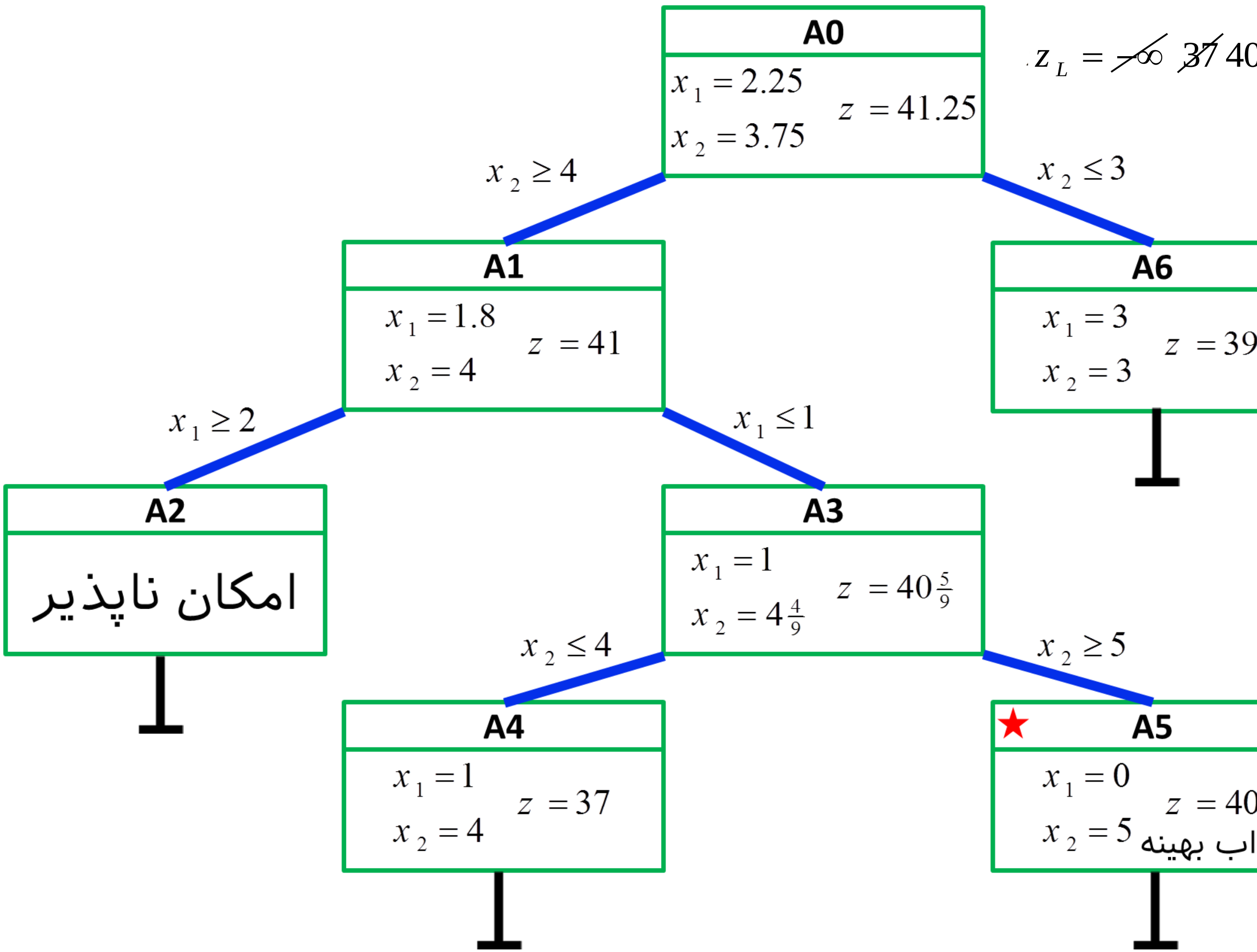
$$x_2 \le 3 \rightarrow x_2 + s_1 = 3$$

A6

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	1	0	0	1	3
Z	0	1	0	0	5/4	¾	0	41.25
X_1	1	0	1	0	9/4	-0.25	0	2.25
X_2	2	0	0	1	-5/4	0.25	0	3.75
S_1	3	0	0	0	5/4	-0.25	1	-0.75
Z	0	1	0	0	5	0	3	39
X_1	1	0	1	0	1	0	-1	3
X_2	2	0	0	1	0	0	1	3
X_4	3	0	0	0	-5	1	-4	3

جدول بهینه

روش شاخه و کرانه برنامه ریزی مختلط



با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com