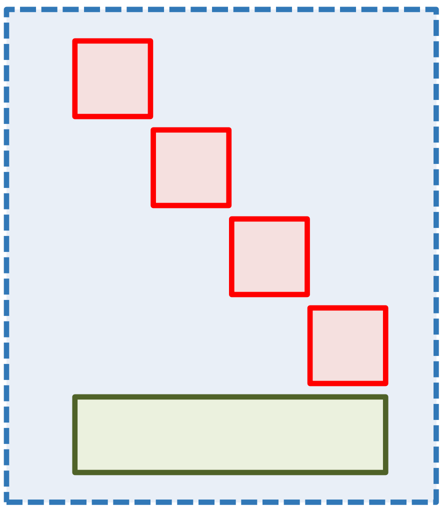
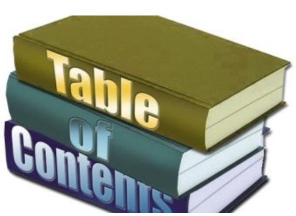
به نام خدا

درس ۲۸: الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف



فهرست مطالب



مقدمه

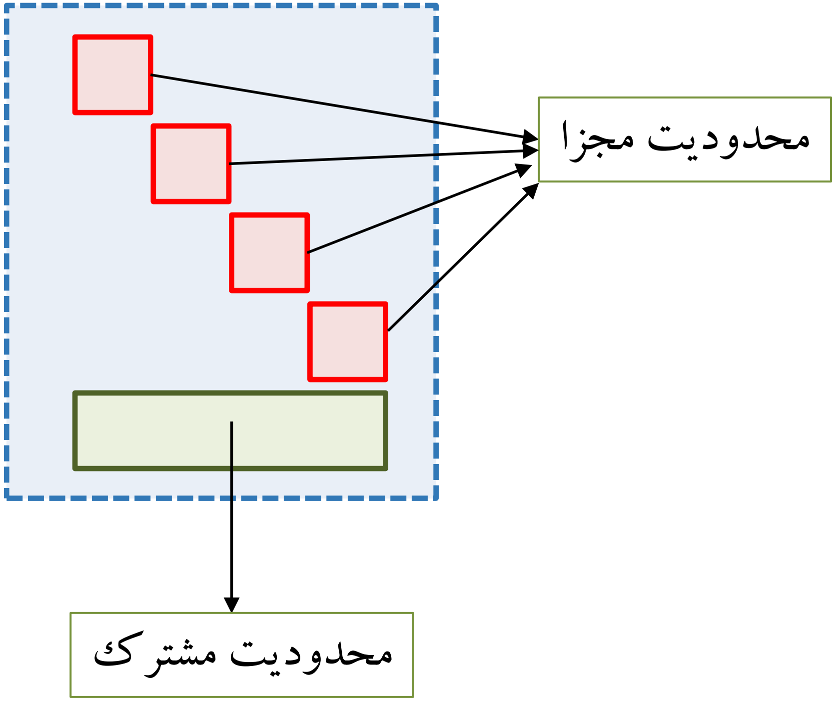
الگوریتم تجزیه دانتزیگ – ولف اغلب توانایی حل مسائل بسیار بزرگ را دارد. خوشبختانه برای مسائلی که ماتریس ضرایب آن ها دارای ساختار خاص زاویه ای، مانند مسائل چندبخشی، باشد کارایی این الگوریتم بسیار افزایش می یابد.

مسائل چندبخشی بخش های مستقلی دارند که با تعدادی محدودیت مشترک به هم مرتبط می شوند. در این گونه مسائل، محدودیت های مشترک، محدودیت های سخت تلقی می شوند که متغیرهای هر بخش در آن ها مشاهده می شود، به طوری که حذف این محدودیت ها مسئله را به مسائلی مجزا و مستقل تبدیل می کند.

مقدمه

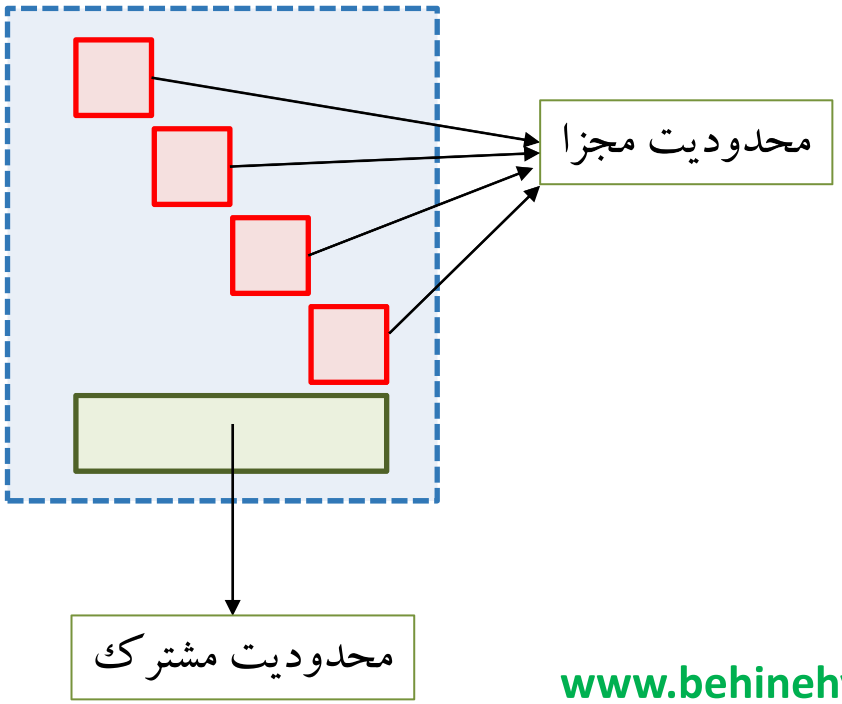
هر مسئله چندبخشی ساختاری خاص به شکل زیر دارد:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Max} z = C_1^T X_1 + C_2^T X_2 + \dots + C_n^T X_n \\
&\text{s.t.} \quad A_1 X_1 \le b_1 \\
&\qquad\qquad A_2 X_2 \le b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \ddots \\
&\qquad\qquad\qquad A_n X_n \le b_n \\
&\qquad B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_n X_n \le h \\
&\qquad X_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$



مقدمه

در مدل بالا n $(i=1,\ldots,n)$ بخش داریم که تعداد متغیرهای بخش i برابر با q_i است. h برداری ستونی با m مؤلفه (سطر) و X_i دارای q_i مؤلفه و b_i دارای m_j مؤلفه، هر B_i ماتریسی $m\times q_i$، هر A_i ماتریسی $m_j\times q_i$ است.



مقدمه

الگوریتم تجزیه دانتزیگ-ولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مسئله مدل سازی به مسئله جدیدی با عنوان مسئله اصلی الگوریتم تجزیه که فقط شامل محدودیت های سخت است، استفاده می کند. البته برای بررسی شرط بهینگی لازم است مسائل اضافی با محدودیت های آسان نیز حل شوند. این مسائل، مسائل فرعی الگوریتم دانتزیگ ولف نامیده می شوند.

$$\text{Max } z = C_i^T X_i$$

$$\text{s.t.} \qquad A_i X_i \le b_1$$

$$X_i \ge 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

مقدمه

قضیه ۱: منطقه موجه مسائل برنامه ریزی خطی به صورت چندضلعی محدب است، در این صورت منطقه موجه هر یک از مسائل فرعی نیز چند ضلعی محدب است.

قضیه ۲: برای سادگی، فرض بر آن است که هر یک از مسائل فرعی مدل بالا دارایی منطقه موجه محدود هستند و مسئله فرعی iام دارای K_i گوشه موجه به صورت $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{iK_i}$ است. اندیس j، jامین گوشه موجه هر یک از مسائل فرعی را نشان می دهد که از ۱ تا K_i است. در این صورت، منطقه موجه مسئله فرعی iام را می توان به صورت ترکیب خطی محدب از نقاط گوشه ای آن به صورت زیر نوشت:

$$X_i = \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} X_{ij} \quad \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} = 1 \quad \delta_{ij} \geq 0$$

برای مثال فرض کنید مسئله چند بخشی به صورت زیر باشد:

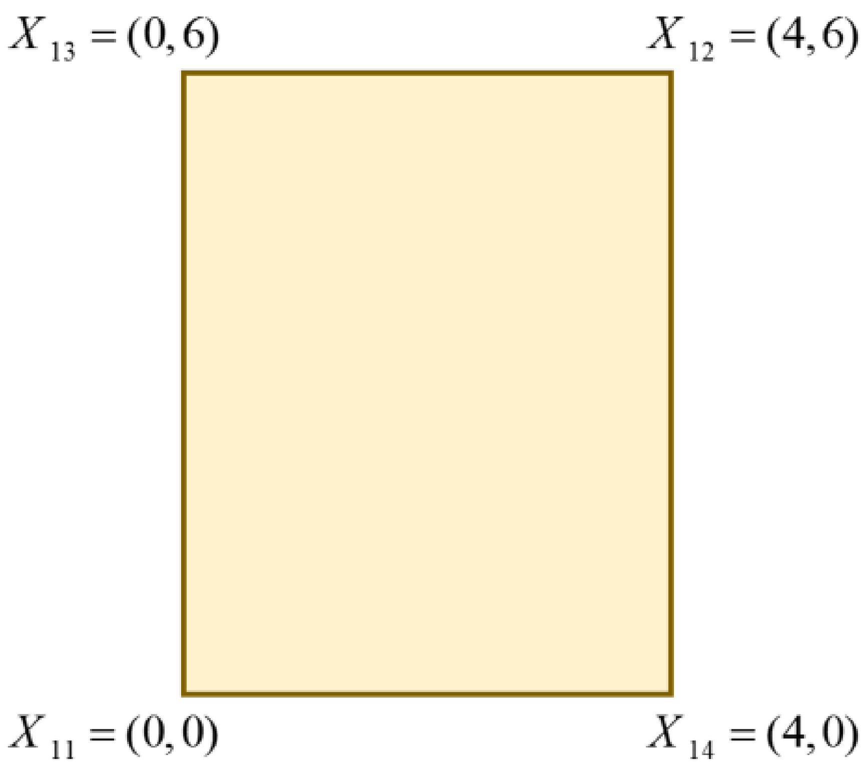
$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ & x_1 \le 4 \\ & 2x_2 \le 12 \end{aligned}$$

مقدمه

نمایش محدودیت های مسئله فرعی به صورت زیر می شود.

برای به دست آوردن نقاط گوشه ای مسئله فرعی آن، به روش ترسیمی عمل می کنیم:



نکته: هر نقطه داخل یا روی اضلاع این چهار ضلعی در شکل ۱، که منطقه موجه مدل فرعی بالا است، را می توان به صورت زیر که مجموع ترکیب محدب از نقاط گوشه موجه از آن ها، نوشت.

$$X_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\delta_{11}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\delta_{12}\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}+\delta_{13}\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}+\delta_{14}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

$$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{13}+\delta_{14}=1 \qquad \delta_{11},\delta_{12},\delta_{13},\delta_{14}\geq 0$$

$$X_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\delta_{12}+4\delta_{14}\\6\delta_{12}+6\delta_{13}\end{bmatrix}$$

$$\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{13}+\delta_{14}=1 \qquad \delta_{11},\delta_{12},\delta_{13},\delta_{14}\geq 0$$

مقدمه

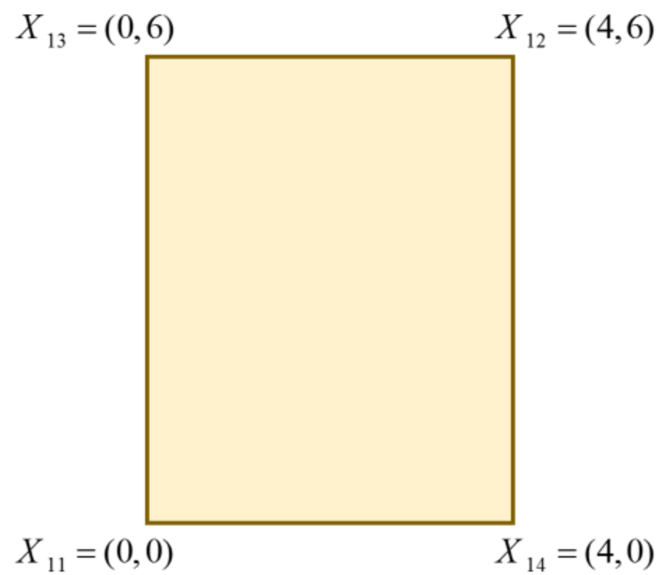
نقاط گوشه فضای امکان پذیر

$$X_{11}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \delta_{11}=1,\delta_{12}=0,\delta_{13}=0,\delta_{14}=0$$

$$X_{12}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\Rightarrow \delta_{11}=0,\delta_{12}=1,\delta_{13}=0,\delta_{14}=0$$

$$X_{13}=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}\Rightarrow \delta_{11}=0,\delta_{12}=0,\delta_{13}=1,\delta_{14}=0$$

$$X_{14}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \delta_{11}=0,\delta_{12}=0,\delta_{13}=0,\delta_{14}=1$$



مقدمه

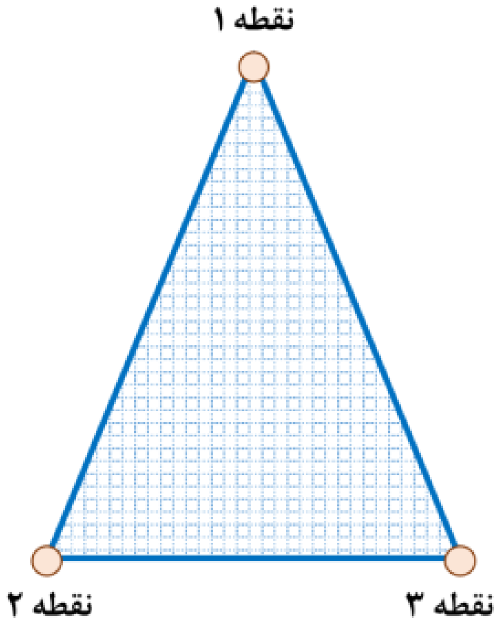
نقطه (2,3) چگونه به وسیله ترکیب خطی چهار نقطه گوشه فضای امکان پذیر می توان نوشت.

$$\begin{cases} 4\times\delta_{12}+4\times\delta_{14}=2 \\ 6\times\delta_{12}+6\times\delta_{13}=3 \\ \delta_{12}+\delta_{13}+\delta_{14}=1 \end{cases} \xrightarrow{SOLVE} \delta_{12}=0;\delta_{13}=\frac{1}{2};\delta_{14}=\frac{1}{2}$$

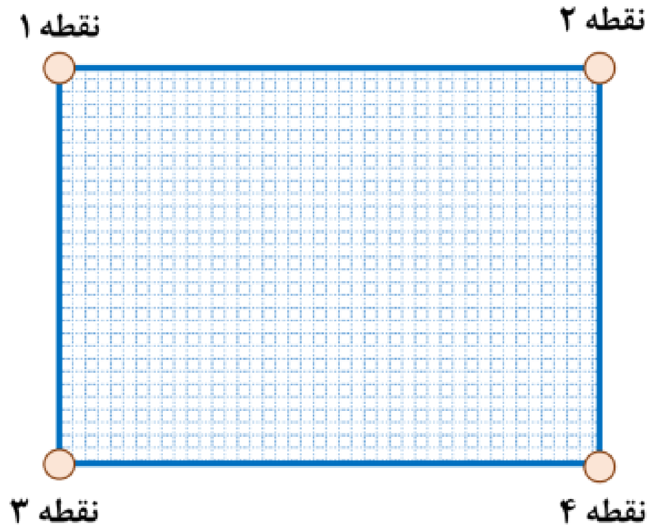
$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=0\times\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+0\times\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

مقدمه

مجموعه ترکیب محدب نقاط گوشه ای، پوسته محدب نامیده می شود. روشن است که مجموعه ترکیب پوسته محدب سه و چهار نقطه متمایز در صفحه که همه آن ها روی یک خط نیستند، به ترتیب تشکیل یک مثلث و مربع (مستطیل) را می دهند



پوسته محدب سه نقطه ای



پوسته محدب چهار نقطه ای

مقدمه

با جایگزین کردن $X_i = \sum_{j=1} \delta_{ij} X_{ij}$ از روی رابطه بالا به جای هر $X_i (i = 1, \ldots, n)$ و اضافه کردن محدودیت های $\sum_{i=1}^{K_i} \delta_{ij} = 1$ و $\delta_{ij} \geq 0$ به جای محدودیت $A_i X_i \leq b_1$، مسئله چند بخشی بالا با شیوه کاهش تعداد محدودیت ها، به مسئله جدیدی برحسب δ_{ij}، که مسئله اصلی دانتزیگ - ولف نام دارد، بازنویسی می شود:

مقدمه

$$\text{Max } z=\sum_{j=1}^{k_1}\left(C_1^T X_{1j}\right)\delta_{1j}+\sum_{j=1}^{k_2}\left(C_2^T X_{2j}\right)\delta_{2j}+\ldots+\sum_{j=1}^{k_n}\left(C_n^T X_{nj}\right)\delta_{nj}$$

$$\text{s.t.}\qquad \sum_{j=1}^{k_1}\delta_{1j}=1$$

$$\sum_{j=1}^{k_2}\delta_{2j}=1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{k_n}\delta_{nj}=1$$

$$\sum_{j=1}^{k_1}\left(B_1 X_{1j}\right)\delta_{1j}+\sum_{j=1}^{k_2}\left(B_2 X_{2j}\right)\delta_{2j}+\ldots+\sum_{j=1}^{k_n}\left(B_2 X_{nj}\right)\delta_{nj}\le h_0$$

$$\delta_{ij}\ge 0 \quad i=1,\ldots n \qquad j=1,\ldots,k_i$$

مقدمه

در مثال بالا، با جایگزین کردن مقدار x_1 بر حسب روابط بالا در تابع هدف و محدودیت های مشترک مسئله و در نظر گرفتن $\sum_{j=1}^{4}\delta_{1j}=1$ و $\delta_{1j}\geq 0$، تعداد محدودیت های مسئله به دو محدودیت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\text{Max } z = 42\delta_{12} + 30\delta_{13} + 12\delta_{14}$$

$$\text{s.t.} \qquad 24\delta_{12} + 12\delta_{13} + 12\delta_{14} \leq 18$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \geq 0$$

مقدمه

مدل جدید بالا، مسئله اصلی دانتزیگ – ولف نام دارد. هر مسـئله تبـدیل یافتـه، یـک مسـئله برنامـه ریزی خطی بوده که با استفاده از روش سیمپلکس حل شدنی اسـت. بـا حـل ایـن مـدل، $\delta_{12}=0.5$ و $\delta_{13}=0.5$ و سایر متغیرها برابر با صفر هستند؛ از این رو خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\delta_{12}+4\delta_{14} \\ 4\delta_{12}+6\delta_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب بهینه این مسئله عبارت است از:

$$x_1^0=2, \qquad x_2^0=6, \qquad z^0=36,$$

مقدمه

نکته: به ازای هر بخش با هر تعداد محدودیت فقط یک محدودیت جدید یعنی $\sum_{j=1}^{4}\delta_{1j}=1$ به نام قید تحدب و به ازای هر تعداد محدودیت مشترک به همان تعداد محدودیت جدید تولید می کنیم.

توجه: با توجه به بالا بودن تعداد نقاط گوشه ای به خصوص در مسائل بسیار بزرگ، معمولا به دلایل مختلفی امکان شناسایی این نقاط وجود ندارد. خوشبختانه در روش دانتزیگ- ولف نیازی به دانستن تمام نقاط گوشه ای هر یک از مسائل نیست و می توان با روش تولید ستون[۱]، ستون مورد نیاز (ستون ورودی) را به دست آورد.

مبانی الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

در مسئله اصلی دانتزیگ - ولف، ضریب متغیر δ_{ij} در تـابع هـدف و محـدودیت (محـدودیت هـای) مشترک به ترتیب برابر با $C_i^T X_{ij}$ و $B_i X_{ij}$ و در محدودیت (سطر) iام برابر با یک و سایر محدودیت ها صفر است، یعنی:

$$\begin{array}{l l}
 & \begin{bmatrix} C_i^T X_{ij} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i X_{ij} \end{bmatrix} \\
\text{سطر مربوط به قید تحدب iام} \rightarrow &
\end{array}$$

مبانی الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

به طور کلی ضرایب متغیرها در تابع هدف (به جز ضرایب متغیرهای اساسی شروع مسئله) با عبارت $Z_j - C_j$ نشان داده می شوند که در اینجا به صورت $RC(\delta_{ij})$ نشان داده می شود. مقدار آن برای متغیر تصمیم δ_{ij}، با استفاده از رابطه زیر عبارت است از:

$$RC(\delta_{ij}) = Y \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i X_{ij} \end{bmatrix} - C_i^T X_{ij}$$

مبانی الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

Y بردار قیمت های سایه یا Shadow price است. بردار Y را می توان به دو قسمت تقسیم کرد:

Y_i قیمت های سایه نظیر محدودیت تحدب مسئله فرعی iام $(i=1,\ldots,n)$ و Y_{n+k} قیمت های سایه نظیر محدودیت مرکزی kام $(k=1,\ldots,m)$ بر این اساس رابطه بالا به صورت زیر تعریف می شود:

$$RC(\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_n & Y_{n+1} \cdots & Y_{n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i X_{ij} \end{bmatrix} - C_i^T X_{ij}$$

مبانی الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

با توجه به اینکه هدف، یافتن متغیر δ_{ij} که با منفی ترین ضریب در تابع هدف به منظور تعیین متغیر ورودی است، باید $RC(\delta_{ij})$ حداقل شود:

$$\underset{i=1,\dots,n}{\mathrm{Min}}\left\{\underset{j=1,\dots,K_i}{\mathrm{Min}}\left(RC(\delta_{ij})\right)=\underset{i=1,\dots,n}{\mathrm{Min}}\left\{\underset{j=1,\dots,K_i}{\mathrm{Min}}\left\{Y_i+[Y_{n+1}\dots Y_{n+m}]B_iX_{ij}-C_i^TX_{ij}\right\}\right.\right.$$

به ازای هر مسئله فرعی $i=1,\dots,n$، مسئله $\underset{j=1,\dots,K_i}{\mathrm{Min}}\left\{Y_i+[Y_{n+1}\dots Y_{n+m}],B_iX_{ij}-C_i^TX_{ij}\right\}$ حل می شود.

اما با یادآوری این نکته که X_i نقاط گوشه ای مجموعه محدب مسئله فرعی iام است، این مجموعه محدودیت ها را باید با تابع هدف بالا در نظر گرفت. از این رو، iامین مسئله فرعی جهت یافتن ضرایب متغیر δ_{ij}، معادل با حل مسئله زیر است:

مبانی الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

$$\text{Min } z = \{[Y_{n+1} \quad \dots \quad Y_{n+m}]B_i - C_i^T\}x_i + Y_i$$

$$\text{s.t.} \qquad A_i x_i \le b_i,$$

$$x_i \ge 0$$

بر این اساس، برای محاسبه کوچکترین ضریب کاهش هزینه، کافی است به ازای هر i ،$i=1,\dots,n$ امین مسئله فرعی را حل کنیم. سپس مقدار تابع هدف مسئله فرعی با کمترین مقدار مشخص می شود.

مراحل الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

مرحله اول: شناسایی یک نقطه کوشه به ازای هر مسئله فرعی و تشکیل مسئله اصلی محدود

برای مسائل فرعی ۱ تا n، یک نقطه گوشه ای پیدا می کنیم و آن را با X_{i1} نشان می دهیم و ضریب آن را δ_{i1} قرار می دهیم. به ازای هر $i=1,\ldots,n$، $K_i=1$ را در نظر می گیریم. یعنی تعداد نقاط گوشه ای هر مسئله فرعی را یک می گیریم. مسئله اصلی محدود را با توجه به نقاط گوشه ای X_{i1}، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

مراحل الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

$$\text{Max } z = \left(C_1^T X_{11}\right)\delta_{11} + \left(C_2^T X_{21}\right)\delta_{21} + \ldots + \left(C_n^T X_{n1}\right)\delta_{n1}$$

$$\text{s.t.} \qquad \delta_{11} = 1$$

$$\delta_{21} = 1$$

$$\vdots$$

$$\delta_{n1} = 1$$

$$\left(B_1 X_{11}\right)\delta_{11} + \left(B_2 X_{21}\right)\delta_{21} + \ldots + \left(B_2 X_{n1}\right)\delta_{n1} \le h,$$

$$\delta_{i1} \ge 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

مراحل الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

مرحله دوم: حل مسائل فرعی و ارزیابی بهینگی

مسئله اصلی محدود بالا را حل می کنیم. تابع هدف مسائل فرعی را با توجه بـه جـواب مسـئله اصـلی محدود و مشخص شدن قیمت های سایه، تشکیل می دهـیم یـا اصـلاح مـی کنـیم. محـدودیت هـای مربوط به مسائل فرعی نیز مشخص است. با حل مسائل فرعی، با دو حالت ممکن رو به رو می شویم:

مراحل الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

حالت اول: در صورت نامنفی بودن تابع هدف همه مسائل فرعی، جواب فعلـی مسـئله اصـلی محدود، جواب بهینه مسئله اصلی است و در نتیجه توقف می کنیم.

حالت دوم: در صورت منفی بودن حداقل یکی از توابع هدف مسائل فرعی، مسئله فرعـی بـا منفی ترین تابع هدف را شناسايي می کنیم. از آنجا که مسئله اصلی در دسترس است، متغیر ورودی بعد از آن را با فرض اینکه مسئله فرعی iام دارای منفی تـرین مقـدار اسـت، δ_{i2} در نظر می گیریم و به مسئله اصلی محدود شده اضافه می کنیم. در واقع این متغیر به پایه فعلی اضافه می شود. سپس مجدد مرحله دوم را تکرار می کنیم.

مراحل الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف

توجه: در هر تکرار برای تشکیل مسائل فرعی، فقط ضرایب تابع هدف تغییر می کند. برای این منظور قیمت های سایه ای حاصل از حل مسئله اصلی محدود را می گیریم و در تابع هدف آن ها لحاظ می کنیم.

توجه: روشن است که محدودیت های هر مسئله فرعی، از یک تکرار به تکرار دیگر تغییر نمی کند.

مثال

مثال ۱: مسئله زیر را به روش دانتزیگ - ولف حل کنید.

$$\text{Mix}\ z = -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.} \qquad x_1 + x_2 \le 12$$

$$3x_1 - x_2 \le 15$$

$$x_3 + x_4 \le 5$$

$$-x_3 + x_4 \le 15$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 19$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \le 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

مثال

حل:

نقاط گوشه ای مسئله فرعی اول و ضریب آن در ترکیب محدب به ترتیب، $X_{1j}=(x_1,x_2)$ و δ_{1j}؛ نقاط گوشه مسئله فرعی دوم و ضریب آن در ترکیب محدب به ترتیب، $X_{2j}=(x_3,x_4)$ و δ_{2j} هستند. بر این اساس، هر کدام از δ_{1j} و δ_{2j} را در تابع هدف، قید تحدب و قید مرکزی ظاهر می شود.

ضریب δ_{1j} در تابع هدف مسئله اصلی برابر با

$$-3x_1+7x_2$$

مثال

همچنین ضریب δ_{1j} در محدودیت محدب مسئله فرعی اول برابر با یک، در محدودیت محدب سایر مسائل فرعی برابر با صفر و در محدودیت مرکزی اول و دوم به ترتیب برابر با $(2x_1 - x_2)$ و $(-2x_1 + 2x_2)$ است. ستون عمومی آن در مسئله اصلی به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

است.

مثال

به همین ترتیب، ضریب δ_{2j} در تابع هدف مسئله اصلی برابر است با:

$$5x_3 + 4x_4$$

ستون عمومی آن در مسئله اصلی به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_3 + 2x_4 \\ x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}$ است.

مسئله اصلی شامل ۴ محدودیت است. متناظر با هر محدودیت، یک متغیر دوگان یا همـزاد در نظـر می گیریم.

مثال

بیان متغیر	تعریف متغیر
λ_1	متغیر دوگان متناظر با محدودیت تحدب مسئله فرعی اول
λ_2	متغیر دوگان متناظر با محدودیت تحدب مسئله فرعی دوم
λ_3	متغیر دوگان متناظر با محدودیت مرکزی اول
λ_4	متغیر دوگان متناظر با محدودیت مرکزی دوم

مثال

با توجه به متغیرهای دوگان، کاهش هزینـه متغیـر δ_{1j} و δ_{2j} را بـه ترتیـب بـا $RC(\delta_{1j})$ و $RC(\delta_{2j})$ نشان می دهیم که برابر است با:

$$RC(\delta_{1j}) = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} - (-3x_1 + 7x_2) =$$

$$\lambda_1 + (2\lambda_3 - 2\lambda_4 + 3)x_1 + (-\lambda_3 + 2\lambda_4 - 7)x_2$$

$$RC(\delta_{2j}) = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_3 + 2x_3 \\ x_3 - 3x_4 \end{bmatrix} - (-5x_3 + 4x_4) =$$

$$\lambda_2 + (2\lambda_3 + \lambda_4 - 5)x_3 + (2\lambda_3 - 3\lambda_4 - 4)x_4$$

مثال

اولین مسئله فرعی متناظر با

$$\operatorname{Min} z = \lambda_1 + (2\lambda_3 - 2\lambda_4 + 3)x_1 + (-\lambda_3 + 2\lambda_4 - 7)x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 12$$

$$3x_1 - x_2 \le 15$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

مثال

دومین مسئله فرعی متناظر با

$$\text{Min}\, z = \lambda_2 + (2\lambda_3 + \lambda_4 - 5)x_3 + (2\lambda_3 - 3\lambda_4 - 4)x_4$$

$$x_3 + x_4 \le 5$$

$$-x_3 + x_4 \le 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \le 0$$

مثال

تکرار اول: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی اول را (۰،۰)، ضریب آن را δ_{11} و نقطه راسی متناظر با مسئله فرعی دوم را (۰،۰) و ضریب آن را δ_{21} اختیار می کنیم. مسئله اصلی محـدود متنـاظر بـا ایـن نقاط را حل می کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 0 \\
&\text{s.t.} \quad \delta_{11} = 1 \\
&\qquad\quad \delta_{21} = 1 \\
&\qquad\quad 0 \le 19 \\
&\qquad\quad 0 \le 21 \\
&\qquad\quad \delta_{11}, \delta_{21} \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال

که در آن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,0)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل مـی کنـیم. بـا حـل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1=-84$ با مقادیر $(x_1,x_2)=(0,12)$ می رسیم. با حل مدل فرعـی دوم به تابع هدف $z_2=-25$ با مقادیر $(x_3,x_4)=(5,0)$ می رسیم. مقدار تابع هدف هر دو مسـئله فرعـی منفی است، بنابراین جواب فعلی مدل بالا بهینه نیست.

مثال

تکرار دوم: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی اول (۰,۱۲) را به مجموعه نقاط رأسی اضافه می کنیم.

متغیر نظیر آن را δ_{12}، در نظر می گیریم و مدل زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } z = 84\delta_{12}$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} + \delta_{12} = 1$$

$$\delta_{21} = 1$$

$$-12\delta_{12} \le 19$$

$$24\delta_{12} \le 21$$

مثال

که در آن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0,0,0,3.5)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم. با حل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1=-27$ با مقادیر $(x_1,x_2)=(6.75,5.25)$ می رسیم. با حل مدل فرعی دوم به تابع هدف $z_2=-72.5$ با مقادیر $(x_3,x_4)=(0,5)$ می رسیم. مقدار تابع هدف هر دو مسئله فرعی منفی است، بنابراین جواب فعلی مدل بالا بهینه نیست.

مثال

تکرار سوم: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی دوم (۰,۵) را به مجموعه نقاط رأسی اضافه می کنیم.

متغیر نظیر آن را δ_{22}، در نظر می گیریم و مدل زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } z = 84\delta_{12} + 20\delta_{22}$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} + \delta_{12} = 1$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} = 1$$

$$-12\delta_{12} + 10\delta_{22} \le 19$$

$$24\delta_{12} - 15\delta_{22} \le 21$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22} \ge 0$$

مثال

که در آن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(84,20,0,0)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم. با حل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1=0$ با مقادیر $(x_1,x_2)=(0,12)$ می رسیم. با حل مدل فرعی دوم به تابع هدف $z_2=-5$ با مقادیر $(x_3,x_4)=(5,0)$ می رسیم. مقدار تابع هدف مسئله فرعی دوم منفی است، بنابراین جواب فعلی مدل بالا بهینه نیست.

مثال

تکرار چهارم: نقطه رأسی متناظر با مسئله فرعی دوم (۵,۰) را بـه مجموعـه نقـاط رأسـی اضـافه مـی کنیم. متغیر نظیر آن را δ_{23} در نظر می گیریم و مدل زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max } z = 84\delta_{12} + 20\delta_{22} + 25\delta_{23}$$

$$\text{s.t.} \quad \delta_{11} + \delta_{12} = 1$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} = 1$$

$$-12\delta_{12} + 10\delta_{22} + 10\delta_{23} \le 19$$

$$24\delta_{12} - 15\delta_{22} + 5\delta_{23} \le 21$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23} \ge 0$$

مثال

که در آن $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(78,23.75,0,0.25)$ است، بر این اساس، مسائل فرعی را حل می کنیم.

با حل مدل فرعی اول به تابع هدف $z_1=0$ با مقادیر $(x_1,x_2)=(0,12)$ می رسیم. با حل مـدل فرعـی دوم نیز به نابع $z_2=0$ هدف با مقادیر $(x_3,x_4)=(5,0)$ می رسیم. مقدار تابع هـدف مسـئله فرعـی اول و دوم غیر منفی است، بنابراین جواب فعلی مدل اصلی محدود بالا بهینه است و برابر است با:

$$\delta_{11}^0=0,\delta_{12}^0=1,\delta_{21}^0=0,\delta_{22}^0=0.4,\delta_{23}^0=0.6,z^0=107$$

مثال

$$X_{11}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},X_{12}=\begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix},X_{21}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},X_{22}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},X_{23}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0\times\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+1\times\begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=0\times\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+0.4\times\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}+0.6\times\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$x_1=0,x_2=12,x_3=3,x_4=2,z=107.$$

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com