درس ۲۸:

روش تجزیه دانتزیگ – ولف

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مسائل چند بخشی (بلوکی)

الگوریتم **تجزیه دانتزیگ - ولف** اغلب توانایی حل مسائل بسیار بزرگ را دارد. خوشبختانه برای مسائلی که ماتریس ضرایب آن ها دارای ساختار خاص **زاویه ای**، مانند مسائل چندبخشی، باشد کارایی این الگوریتم بسیار افزایش می یابد. مسائل چندبخشی بخش های مستقلی دارند که با **تعدادی** محدودیت مشترک به هم مرتبط می شوند. در این گونه مسائل، محدودیت های مشترک، محدودیت های **سخت** تلقی می شوند که متغیرهای هر بخش در آن ها مشاهده می شود، به طوری که حذف این محدودیت ها مسئله را به مسائلی **مجزا** و **مستقل** تبدیل می کند. هر مسئله چندبخشی ساختاری خاص به شکل زیر دارد:

$$\begin{aligned}
\text{Max } z &= C_1^T X_1 + C_2^T X_2 + \ldots + C_n^T X_n \\
\text{s.t.} \quad & A_1 X_1 \le b_1 \\
& A_2 X_2 \le b_2 \\
& \ddots \\
& A_n X_n \le b_n \\
& B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_n X_n \le h \\
& X_i \ge 0 \quad i = 1,\ldots,n
\end{aligned}$$

در مدل بالا (i=۱,...,n) n بخش داریم که تعداد متغیرهای هر بخش برابر با q_i است. h برداری ستونی با m مؤلفه (سطر) و X_i دارای q_i مؤلفه و b_i دارای m_j مؤلفه، هر B_i ماتریسی $m \times q_i$، هر A_i ماتریسی $m_j \times q_i$ است. توجه کنید که معادله آخر بیانگر محدودیت های **مشترک** بین بخش ها (بلوک ها) است و سایر معادلات، محدودیت های مختص هر بخش را نشان می دهد. از روش **دانتریگ- ولف** می توان برای حل این گونه مسائل استفاده کرد.

الگوریتم تجزیه دانتزیگ-ولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مسئله مدل سازی به مسئله جدیدی با عنوان **مسئله اصلی** الگوریتم تجزیه که فقط شامل محدودیت های سخت است، استفاده می کند. از این رو، با کاهش تعداد محدودیت ها، مسئله با تعداد تکرارهای کمتری نسبت به مسئله اولیه حل شدنی است. البته برای بررسی شرط بهینگی لازم است مسائل اضافی با محدودیت های آسان نیز حل شوند. این مسائل، **مسائل فرعی** الگوریتم دانتزیگ - ولف نامیده می شوند.

مسئله فرعی iام مسئله چندبخشی بالا به صورت زیر است:

$$\text{Max}\ z = C_i^T X_i$$

$$\text{s.t.} \qquad A_i X_i \le b_i$$

$$X_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n$$

قضیه ۱: منطقه موجه مسائل برنامه ریزی خطی به صورت چندضلعی محدب است. در این صورت منطقه موجه هر یک از مسائل فرعی نیز چند ضلعی محدب است.

قضیه ۲: برای سادگی، فرض بر آن است که هر یک از مسائل فرعی مدل بالا دارایی منطقه موجه **محدود** هستند و مسئله فرعی iام دارای K_i **گوشه موجه** به صورت $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iK_i}$ است. اندیس j، jامین گوشه موجه هر یک از مسائل فرعی را نشان می دهد که از ۱ تا K_i است. در این صورت، منطقه موجه مسئله فرعی iام را می توان به صورت **ترکیب خطی محدب** از نقاط گوشه ای آن به صورت زیر نوشت:

$$X_i = \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} X_{ij} \qquad \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} = 1 \quad \delta_{ij} \ge 0$$

برای مثال فرض کنید مسئله چند بخشی به صورت زیر باشد:

$$\text{Max}\ z = 3x_1 + 5x_2$$

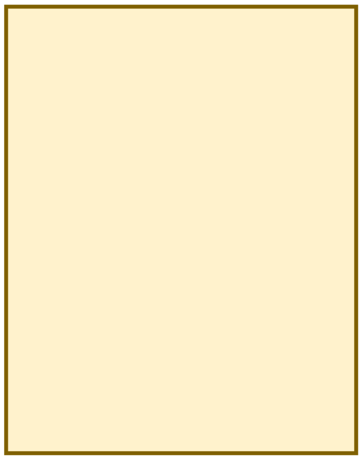
$$\text{s.t.} \qquad 3x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_1 \qquad \le 4$$

$$2x_2 \le 12$$

مدل بالا، دارای یک محدودیت **مشترک** (محدودیت اول) و یک مسئله **فرعی** (محدودیت دوم و سوم) است. برای به دست آوردن نقاط گوشه ای مسئله فرعی آن، به روش ترسیمی عمل می کنیم:

$X_{13} = (0,6)$ $X_{12} = (4,6)$



$X_{11} = (0,0)$ $X_{14} = (4,0)$

شکل ۱- پوسته محدب یا منطقه موجه مسئله فرعی اول

هر نقطه داخل یا روی اضلاع این چهار ضلعی در شکل ۱را، که منطقه موجه مدل فرعی بالا است، می توان به صورت زیر که مجموع ترکیب محدب از نقاط گوشه موجه از آن ها، نوشت.

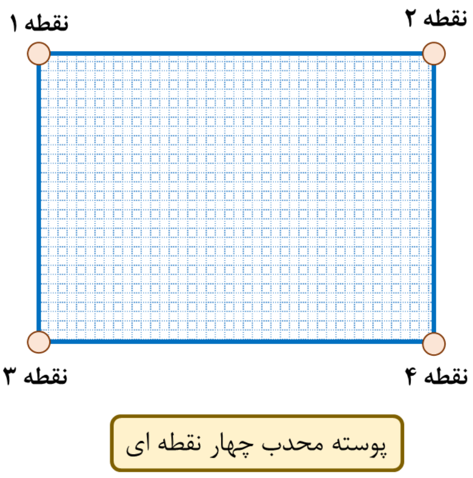
$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \delta_{11}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta_{12}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \delta_{13}\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \delta_{14}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

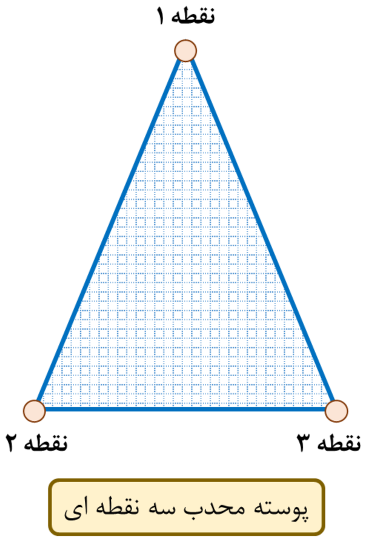
$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1 \qquad \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \ge 0$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\delta_{12} + 4\delta_{14} \\ 6\delta_{12} + 6\delta_{13} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1 \qquad \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \ge 0$$

مجموعه ترکیب محدب نقاط گوشه ای، **پوسته محدب** نامیده می شود. روشن است که مجموعه ترکیب پوسته محدب سه و چهار نقطه متمایز در صفحه که همه آن ها روی یک خط نیستند، به ترتیب تشکیل یک مثلث و مربع (مستطیل) را می دهند (شکل ۲).





شکل ۲- پوسته محدب سه نقطه ای و چهار نقطه ای

با جایگزین کردن $X_i = \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{ij} X_{ij}$ از روی رابطه بالا به جای هر $X_i (i=1,\dots,n)$ و اضافه کردن محدودیت های $\sum_{i=1}^{K_i} \delta_{ij} = 1$ و $\delta_{ij} \geq 0$ به جای محدودیت $A_i X_i \leq b_i$، مسئله چند بخشی بالا با شیوه کاهش تعداد محدودیت ها، به مسئله جدیدی برحسب δ_{ij}، که **مسئله اصلی** دانتزیگ - ولف نام دارد، بازنویسی می شود:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{k_1} \left(C_1^T X_{1j}\right) \delta_{1j} + \sum_{j=1}^{k_2} \left(C_2^T X_{2j}\right) \delta_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_n} \left(C_n^T X_{nj}\right) \delta_{nj}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{k_1} \delta_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k_2} \delta_{2j} = 1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \delta_{nj} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{k_1} \left(B_1 X_{1j}\right) \delta_{1j} + \sum_{j=1}^{k_2} \left(B_2 X_{2j}\right) \delta_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{k_n} \left(B_2 X_{nj}\right) \delta_{nj} \leq h_0$$

$$\delta_{ij} \geq 0 \quad i=1,\dots n \quad j=1,\dots,k_i$$

مسئله اصلی بالا دارای m + n محدودیت یعنی برابر با تعداد محدودیت های سخت و تعداد مسائل فرعی است. به ازای هر گوشه موجه از هر مسئله فرعی، X_{ij}، یک متغیر به صورت δ_{ij} در مسئله اصلی در نظر می گیریم.

در مثال بالا، با جایگزین کردن مقدار x_1 بر حسب روابط بالا در تابع هدف و محدودیت های مشترک مسئله و در نظر گرفتن $\sum_{j=1}^{4}\delta_{1j}=1$ و $\delta_{1j} \geq 0$، تعداد محدودیت های مسئله به دو محدودیت زیر کاهش خواهد یافت:

$$\text{Max } z = 42\delta_{12} + 30\delta_{13} + 12\delta_{14}$$

$$\text{s.t.} \quad 24\delta_{12} + 12\delta_{13} + 12\delta_{14} \leq 18$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} = 1$$

$$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14} \geq 0$$

مدل جدید بالا، **مسئله اصلی** دانتزیگ - ولف نام دارد. هر مسئله تبدیل یافته، یک مسئله برنامه ریزی خطی بوده که با استفاده از **روش سیمپلکس** حل شدنی است. با حل این مدل، $\delta_{12}=0.5$ و $\delta_{13}=0.5$ و سایر متغیرها برابر با صفر هستند؛ از این رو خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\delta_{12} + 4\delta_{14} \\ 4\delta_{12} + 6\delta_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب بهینه این مسئله عبارت است از:

$$x_1^0 = 2, \quad x_2^0 = 6, \quad z^0 = 36,$$

نکته: دقت کنید که در این روش، به ازای هر بخش با هر تعداد محدودیت فقط یک محدودیت جدید یعنی $\sum_{j=1}^{4}\delta_{1j}=1$ به نام **قید تحدب** اضافه می شود. همچنین به ازای هر تعداد محدودیت مشترک به **همان** تعداد

محدودیت جدید تولید می کنیم.

نکته: با توجه به بالا بودن تعداد نقاط گوشه ای به خصوص در مسائل بسیار بزرگ، معمولا به دلایل مختلفی امکان شناسایی این نقاط وجود ندارد. خوشبختانه در روش دانتزیگ- ولف نیازی به **دانستن تمام** نقاط گوشه ای هر یک از مسائل نیست و می توان با روش **تولید ستون**[1]، ستون مورد نیاز (ستون ورودی) را به دست آورد.

توجه: برای مطالعه ادامه این درس شامل بیان ریاضی مراحل الگوریتم تجزیه دانتزیگ ولف و حل یک مثال عددی با توضیح کامل، جزوه آموزشی این درس را از وب سایت گروه بهینه یاب به نشانی *www.behinehyab.com* تهیه نمایید.

[1] Column generation

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**