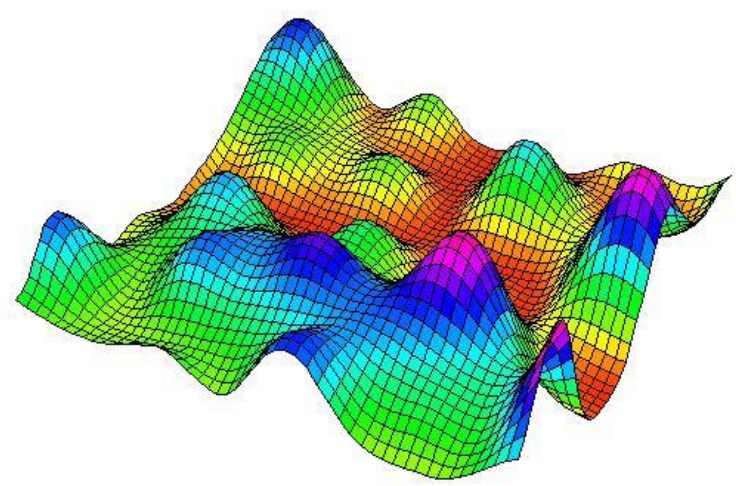
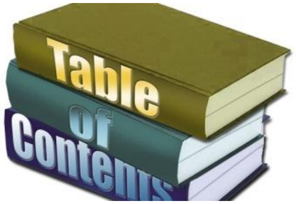
به نام خدا

درس ۲۱: برنامه ریزی غیرخطی



www.behinehyab.com

فهرست مطالب



مقدمه

برنامه‌ریزی خطی را می‌توان شالوده تحقیق در عملیات دانست، بسیاری از مباحث تحقیق در عملیات با آن سروکار دارد. فرض اصلی برنامه‌ریزی خطی این است که همه توابع (اعم از تابع هدف یا محدودیت ها) خطی باشند. اگر چه این فرض در بسیاری از مسائل واقعی برقرار است لیکن در مواردی هم صادق نیست.

هدف مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی در شکل کلی آن، پیدا کردن مقادیر $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ است به

$$\begin{aligned} &Max \quad f(\mathbf{x}) \\ &\qquad g_i(\mathbf{x}) \le b_i \qquad i=1,2,\ldots,m \\ &\qquad \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

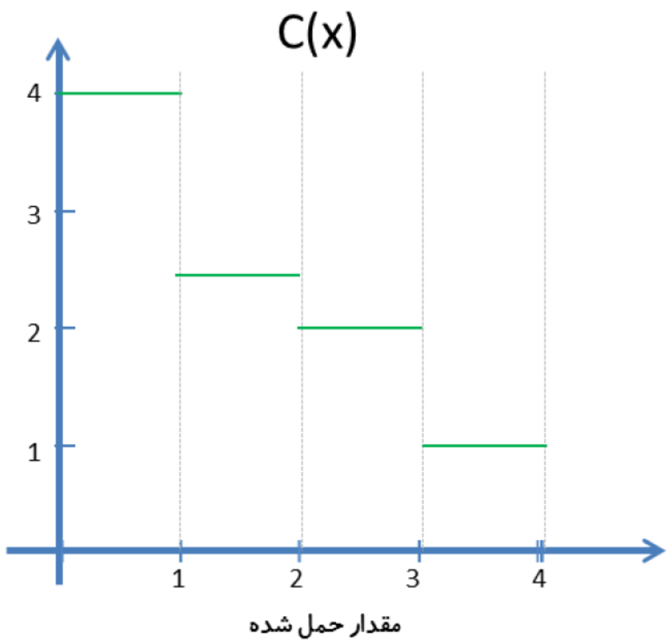
که $f(x)$ و $g_i(x)$ توابعی معلوم از n متغیر تصمیم هستند.

مقدمه

مسئله حمل و نقل با تخفیف هزینه حمل نسبت به میزان بار

هدف مسئله حمل و نقل تعیین برنامه بهینه حمل کالا از مبادی گوناگون بـه مقصـدهای مختلـف است، به طوری که کل هزینه‌ها کمینه شود. در آن جا فرض بر این بود که هزینه حمل هر واحد کالا بین هر مبدا و مقصد مشخص، صرفنظر از میزانی که حمل مـی‌شـود مقـداری ثابـت باشـد. در عمـل، ممکن است، این طور نباشد.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_{ij}) \times x_{ij}$$



مقدمه

انتخاب ترکیب سرمایه گذاری با بازده قطعی

از آن جایی که سرمایه گذاران به دو عامل، یعنی میزان بازدهی سرمایه گذاری‌ها و همچنین خطرهایی که در بطن آن‌ها وجود دارد اهمیت می دهند، لذا ترکیب سرمایه گذاری باید طوری انتخاب شود که تحت شرایط موجود، بین بازده سرمایه و خطری که متوجه آن است رابطه بهینه ای برقرار باشد.

فرض کنید که خرید n نوع سهام مختلف تحت بررسی است و متغیر تصمیم x_j معرف تعداد سهام نوع j است که انتخاب می‌شود (به ازای j=۱,۲,...,n). چنانچه μ_j و δ_{jj} به ترتیب بیانگر میانگین و انحراف معیار بازده یک عدد از نوع سهام نوع j.

مقدمه

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \qquad\qquad V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

تبادل بهینه بین دو عامل فوق، از طریق ترکیب نمودن آن‌ها در تابع هدف به صورت زیر انجـام می‌گیرد.

$$f(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) - \beta V(\mathbf{x})$$

در تابع هدف فوق که باید حداکثر شود، عدد غیرمنفی β بیانگر میزان مطلوب تبادل بین بـازده و خطر سرمایه از دید سرمایه گذار است.

$$Max\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_i x_j \le B$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

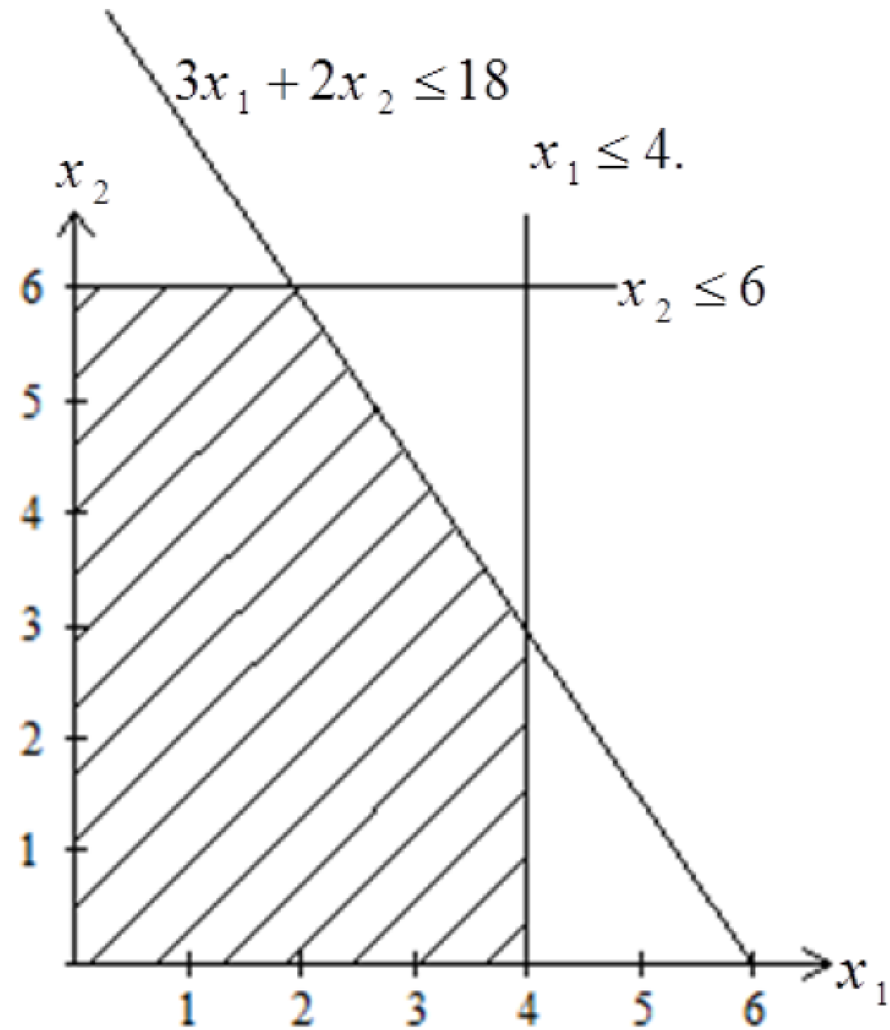
بیان ترسیمی برنامه ریزی غیرخطی

مثال: یک شرکت تولیدی درب و پنجره، داراه سه کارگاه است. در کارگاه ۱ قاب‌های آلومینیومی و قسمت‌های فلزی تولید می‌شود. در کارگاه ۲، قاب‌های چوبی تولید می شود و در کارگاه ۳، برش شیشه و سوار کردن آن به قاب‌ها انجام می‌شود. مدیریت این کارگاه‌ها به دنبال تولید دو محصول جدید هستند و از مرکز تحقیق در عملیات خواسته اند که میزان تولید از هر محصول را با توجه به ظرفیت کارگاه چند واحد است. محصول ۱، دری با قابی آلومینومی و محصول ۲ پنجره‌ای شیشه با قاب چوبی است. با توجه به این که هر دو محصول برای جوشکاری نیاز به کارگاه ۳ دارد، ظرفیت این گارگاه باعث می‌شود که رقابتی بین این دو محصول ایجاد شود. در جدول زیر سود هر محصول، میزان استفاده از منابع و ظرفیت هر کارگاه آورده شده است.

کارگاه \ محصول	1	2	ظرفیت موجود (در هر دقیقه)
	ظرفیت لازم برای تولید هر واحد (در هر دقیقه)		
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
سود هر واحد	3	5	

x_1 و x_2 به ترتیب تعداد محصولات ۱ و ۲ در هر دقیقه است و z نشان دهنده سود حاصل از فروش در هر دقیقه است. در ادبیات تحقیق در عملیات به x_1 و x_2 **متغیرهای تصمیم‌گیری** (*decision variables*) و z را **تابع هدف** (*objective function*) گفته می‌شود.

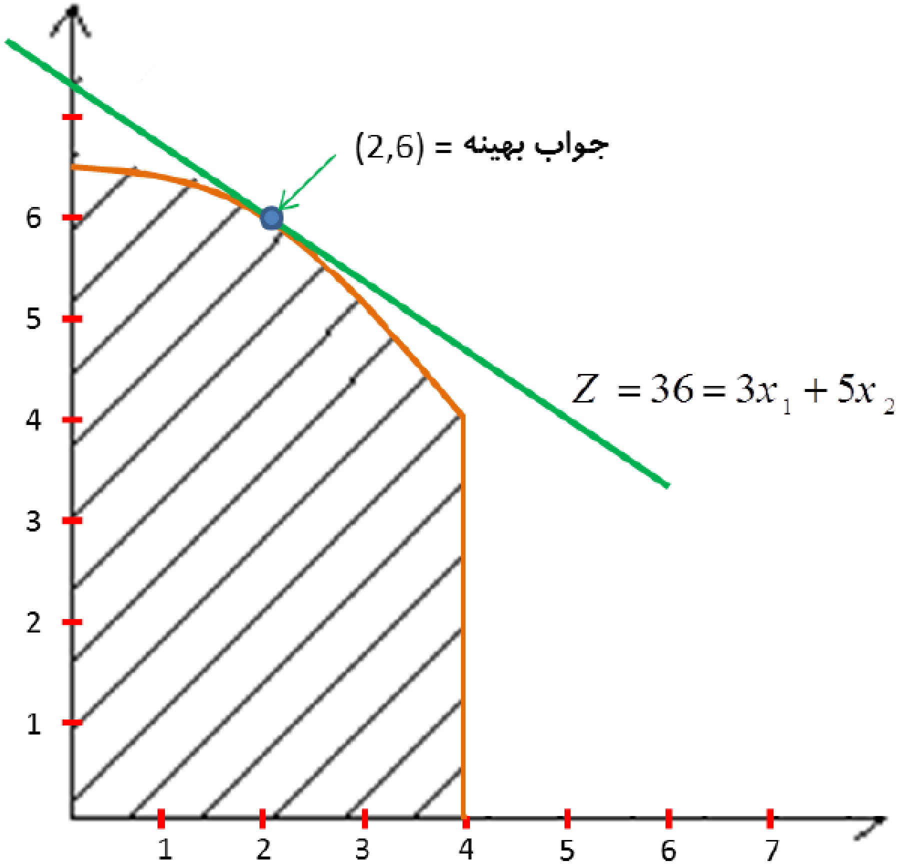
$$\begin{aligned}
&Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&1) \quad x_1 \le 4 \\
&2) \quad 2x_2 \le 12 \\
&3) \quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&4) \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$



بیان ترسیمی برنامه ریزی غیرخطی

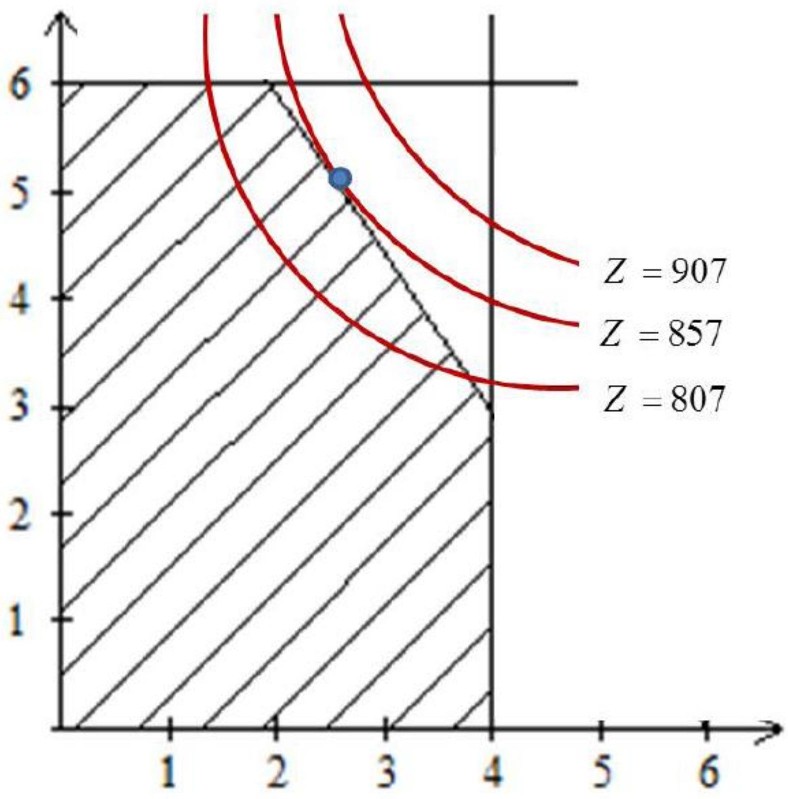
محدودیت های ۲ و ۳

$$9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216$$



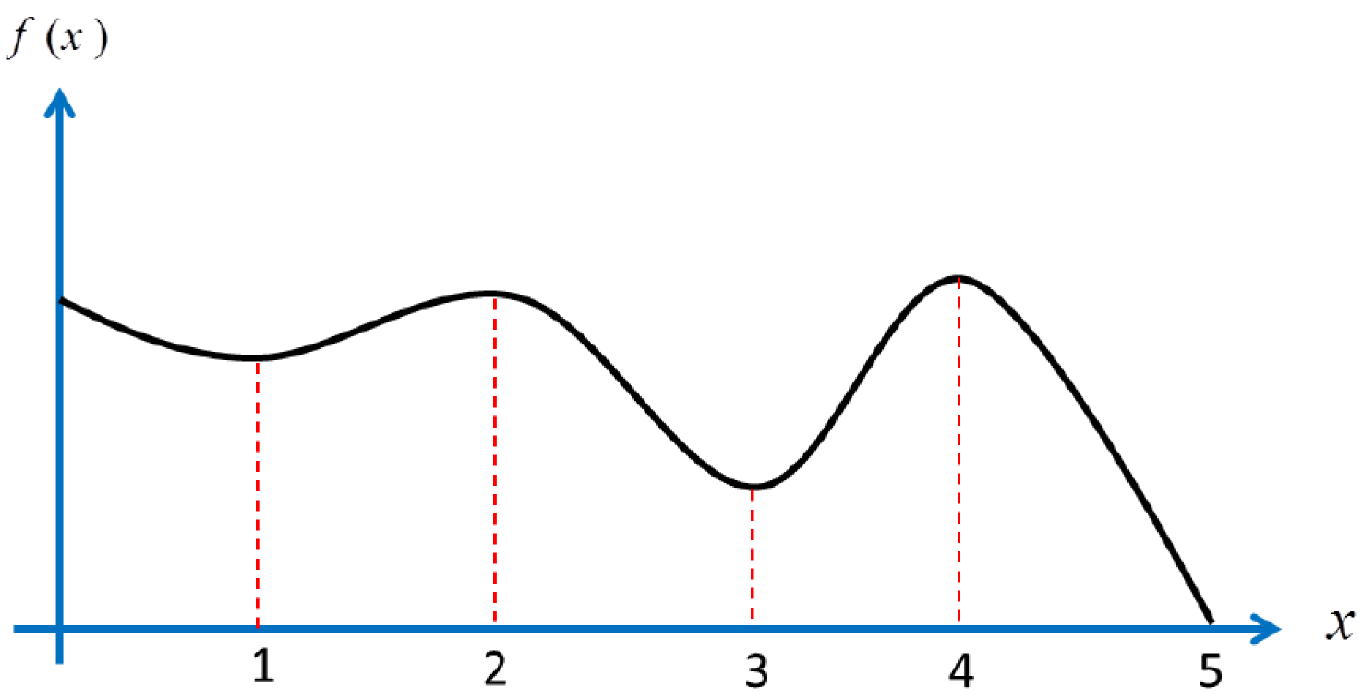
فقط جستجوی جواب‌های گوشه موجه، دیگر در مورد برنامه‌ریزی غیرخطی کارسازی نیست.

حال فرض کنید که محدودیت خطی مثال فوق همچنان در مسئله باقی باشند، اما تابع هدف غیرخطی گردد. برای نمونه، اگر $Z=126x_1-9x_1^2+182x_2-13x_2^2$ باشد، در این صورت بیان ترسیمی مسئله به صورت شکل زیر و جواب بهینه آن $x_2=5$ و $x_1=2.666$ خواهد بود. این جواب هم روی مرز منطقه موجه قرار می‌گیرد.



بیان ترسیمی برنامه ریزی غیرخطی

پیچیدگی دیگری که در مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ظاهر می‌شود این است که یک جواب حداکثر نسبی لزوما یک جواب حداکثر مطلق نیست.

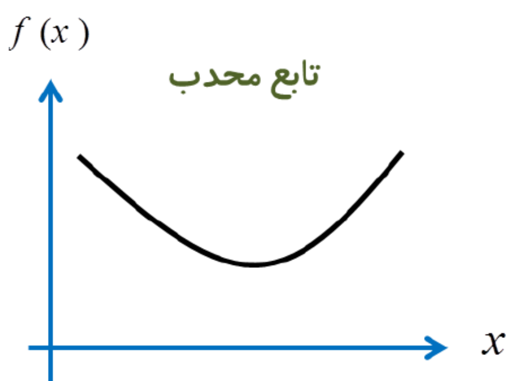


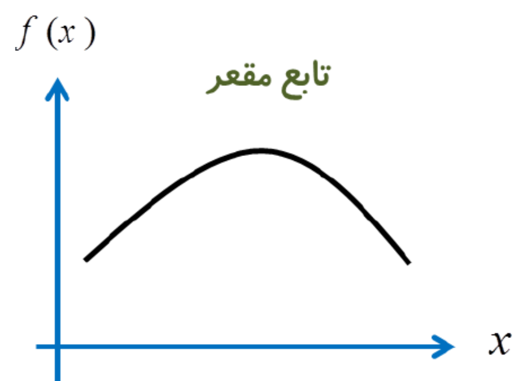
بیان ترسیمی برنامه ریزی غیرخطی

در مورد تابع یک متغیری و بدون محدودیت $f(x)$ (با فرض داشتن مشتق‌های اول و دوم)، برای اثبات این که جواب حداکثر نسبی همان حداکثر مطلق است، کافی است که رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0 \qquad \forall x$$

چنین تابعی که خمیدگی آن همیشه به سمت پایین است تابع مقعر یا ***Concave function*** نامیده می‌شود. به همین ترتیب، اگر علامت $\leq$ را با $\geq$ جایگزین کنیم، به تابع حاصل که خمیدگی آن همیشه به طرف بالا است تابع محدب یا ***Convex function*** می‌گویند.





بیان ترسیمی برنامه ریزی غیرخطی

وقتی یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی محدودیتی ندارد، مقعر بودن تابع هدف تضمین می‌کند که هر جواب حداکثر نسبی یک جواب حداکثر مطلق باشد. به طور مشابه محدب بودن تابع برای حداقل مطلق بودن هر جواب حداقل نسبی کفایت می‌کند.

چنانچه مسئله دارای محدودیت باشد، آنگاه برای اطمینان از مطلق بودن جواب نسبی باید شرط دیگری را نیز در نظر گرفت که آن منطقه موجه یک مجموعه محدب باشد.

نکته: مجموعه $S=\{\mathrm{x} \mid g(\mathbf{x}) \leq b\}$ را در نظر بگیرید. اگر تابع $g(\mathbf{x})$ یک تابع محدب باشد، آنگاه مجموعه S یک مجموعه محدب است.

بهینه سازی بدون محدودیت

- ✓ بهینه سازی توابع یک متغیره و بدون محدودیت
  - ❖ روش نقطه وسط
- ✓ بهینه سازی توابع یک متغیره با محدودیت نا منفی بودن
- ✓ بهینه سازی توابع چند متغیره و بدون محدودیت
  - ❖ روش گرادیان

بهینه سازی بدون محدودیت

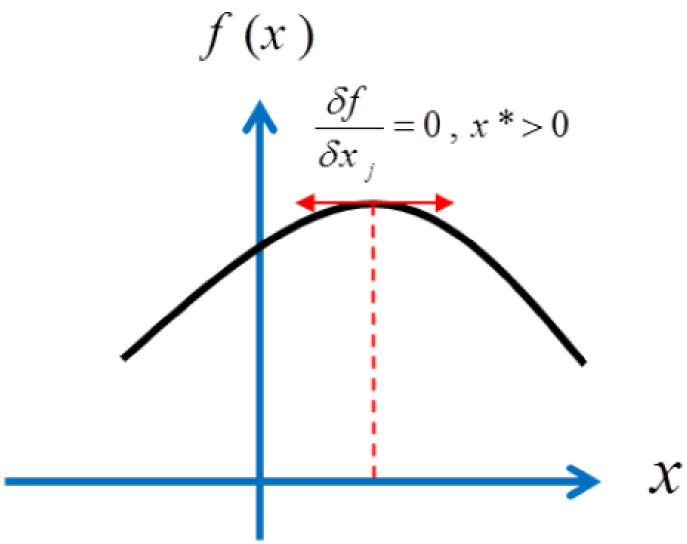
مسائل بهینه سازی بدون محدودیت یا *Unconstrained optimization* همان طور که از نامشان بر می‌آید هیچ محدودیتی ندارند، لذا هدف آن‌ها حداکثر کردن تابع *f(x)* بازای $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ است. شرط این که جواب مشخصی مانند $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ در تابع $f(\mathbf{x})$ بیشینه است (به شرط مقعر بودن) که در نقطه $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ رابطه زیر برقرار باشد.

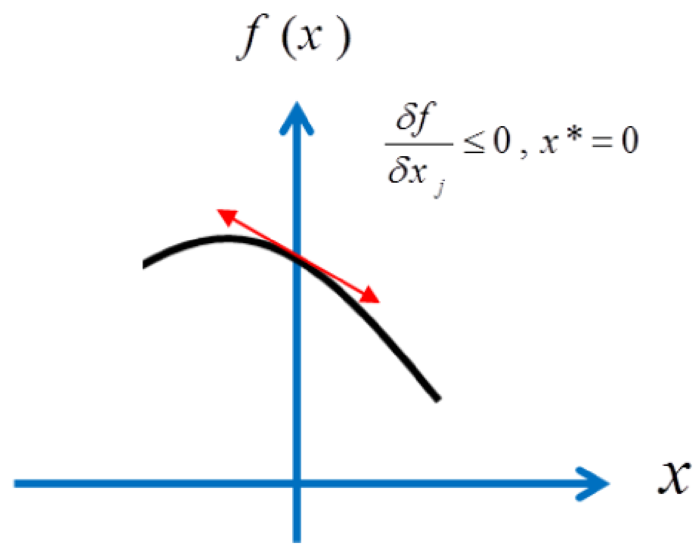
$$\frac{\delta f}{\delta x_i}=0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=\mathbf{x}^* \quad j=1,2,\ldots,n$$

بهینه سازی بدون محدودیت

چنانچه متغیر x_j دارای محدودیت غیرمنفی $x_j \geq 0$ باشد، در این صورت تغییـر مختصـری در یافتن نقطه بهینه به صورت زیر صورت می‌گیرد.

$$\frac{\delta f}{\delta x_j}\begin{cases} \leq 0 & \mathbf{x}=\mathbf{x}^* \quad if \; x_j^*=0 \\ =0 & \mathbf{x}=\mathbf{x}^* \quad if \; x_j^*>0 \end{cases}$$





بهینه سازی بدون محدودیت

بهینه سازی توابع یک متغیری و بدون محدودیت

فرایند جستجوی یک بعدی نظیر سایر فراینده های جستجو، سلسله ای از جواب‌های آزمایش را دنبال می‌کند که به جواب بهینه منتهی می‌شود. در هر تکرار، از جواب آزمایشی فعلی شروع کرده و با یک جستجوی منظم، یک جواب آزمایشی بهتر را می یابد.

برای بیان این فرآیند با اختصار، از تعاریف زیر استفاده می‌کنیم.

x' جواب آزمایشی فعلی

$\underline{x}$ حد پایینی برای x^*

$\bar{x}$ حد بالایی برای x^*

ε فاصله خطای قابل گذشت برای x^*

بهینه سازی بدون محدودیت

قواعد منطقی گوناگونی برای انتخاب یک جواب آزمایشی جدید وجود دارد، اما در روش ساده زیر که **قاعده نقطه وسط** یا ***Midpoint rule*** نامیده می‌شود. هر بار نقطه وسط دو حد انتخاب می‌شود.

قدم ابتدایی: مقدار ε را مشخص نمایید. یک حد پایینی و بالایی را با روش جستجو (با پیدا کردن دو مقدار x که مشتق آن‌ها به ترتیب مثبت و منفی باشد) پیدا کنید. جواب آزمایشی ابتدایی عبارت است از:

$$x' = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$

بهینه سازی بدون محدودیت

قدم تکراری:

۱- در نقطه $x = x'$ مقدار $\frac{df(x)}{dx}$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ باشد، مقدار حد پایینی را برابر با x' قرار دهید یعنی $\underline{x} = x'$

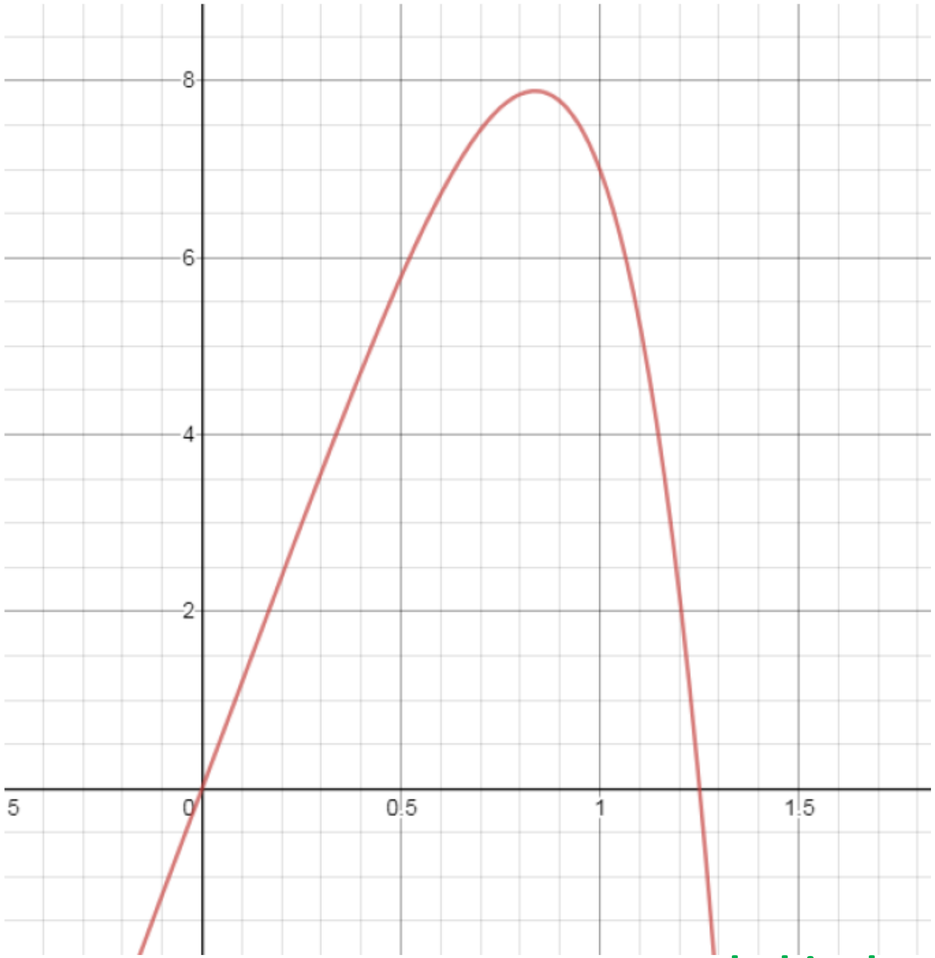
۳- اگر $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ باشد، مقدار حد بالایی را برابر با x' قرار دهید یعنی $\overline{x} = x'$

۴- جواب آزمایشی جدید برابر با $x' = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$ است.

دستور توقف: اگر $(\overline{x} - \underline{x}) \leq 2\varepsilon$ باشد، یعنی جواب x' جدید در فاصله ε از x^* قـرار دارد. در این صورت، توقف کنید. در غیر این صورت به قدم تکراری بازگردید.

مثال: تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$$



$$\frac{df(x)}{dx} = 12(1 - x^3 - x^5)$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -12(3x^2 + 5x^4)$$

بهینه سازی بدون محدودیت

تکرار	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x' جدید	$f(x')$
0		0	2	1	7
1	-12	0	1	0.5	5.7812
2	10.12	0.5	1	0.75	7.6948
3	4.09	0.75	1	0.875	7.8439
4	-2.19	0.75	0.875	0.8125	7.8672
5	1.31	0.8125	0.875	0.84375	7.8828
6	-0.34	0.8125	0.84375	0.828125	7.8815
7	0.51	0.828125	0.84375	0.835937	7.8839
توقف					

$$x^* = \frac{0.82812 + 0.84375}{2} \approx 0.836$$

بهینه سازی مسائل چند متغیره بدون محدودیت

اکنون حداکثر کردن تابع $f(x)$ که تابعی مقعر از چند متغیر $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ است و هیچ محدودیتی هم در مورد مقادیر موجه آن وجود ندارد را در نظر بگیرید. از مساوی صفر قراردادن مشتق‌های جزیی این تابع، یک دستگاه معادلات حاصل می‌گردد که حل آن شرط لازم و کافی بهینگی است. چنانچه این دستگاه با روش تحلیلی میسر نباشد، لاجرم باید یک فرایند جستجوی عددی برای حل آن به کار گرفته شود.

بهینه سازی بدون محدودیت

در مسئله تابع چند متغیری، حرکت نقطه تنها به دو جهت محدود نمی‌شود بلکه می‌توان در جهت‌های بیشماری حرکت نماید .

هدف از این کار نیز در نهایت، رسیدن به نقطه ای است که تمام مقادیر مشتق‌های جزیی آن برابر با صفر باشد. از این رو، برای تعمیم روش جستجوی یک متغیری ابتدا باید جهت حرکت را با استفاده از مقادیر مشتق‌های جزیی مشخص ساخت. برای انتخاب جهت حرکت، با مفهوم گرادیان سروکار خواهیم داشت.

بهینه سازی بدون محدودیت

از آن جایی که فرض می‌شود تابع $f(x)$ مشتق پـذیر اسـت، لـذا هـر نقطـه ماننـد x دارای بـردار گرادیان خواهد بود که به صورت $\nabla f\,(x')$ نشان داده می‌شود.

$$\nabla f\,(x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \quad x = x'$$

برای تضمین یافتن جواب بهینه جهانی در حالت بیشینه سازی، باید در ابتدا ثابت کرد کـه تـابع هدف مقعر است. در صورتی که به دنبال کمینه سازی تابع هدف باشیم باید نشان داده که تابع هدف محدب است. برای نشان دادن مقعر بودن تابع $f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱- تشکیل ماتریس هسیان: در ابتدا ماتریس هسیان بـه صـورت زیـر محاسـبه مـی‌شـود. ایـن ماتریس مربعی است و تعداد سطر یا ستون‌های آن به تعداد متغیرهای تابع *f(x)* است.

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

۲- تعیین منفی معین بودن یا نیمه منفی معین بودن: اگر $x^T H x < 0$ باشد آنگـاه مـاتریس *H* منفی معین است و اگر $x^T H x \le 0$ نیمه منفی معین است.

بهینه سازی بدون محدودیت

روش جستجوی گرادیان

حرکت از جواب فعلی در جهت بدست آمده از جواب فعلی شروع گردد و تا هنگامی که مقدار $f(x)$ افزایش می یابد توقفی صورت نگیرد. در اینجا گرادیان مجدد محاسبه می‌شود تا جهت حرکت بعدی مشخص گردد. با این رویکرد، هر تکرار شامل تغییر جواب فعلی x' به شرح زیر است.

$$x' = x' + t^* \nabla f(x)$$

که مقدار t^* مقدار مثبت t که رابطه زیر را حداکثر می‌کند یعنی

$$f(x' + t^* \nabla f(x')) = \max_{t \geq 0} f(x' + t \nabla f(x'))$$

بهینه سازی بدون محدودیت

تکرارهای این روش تا آنجا ادامه می یابد که مقدار گرادیان با یک تقریب قابل قبولی برابـر بـا صفر گردد، یعنی اگر فاصله قابل قبول برابر با ε در نظر گرفته شود، در این صورت موقعي توقـف می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] \le \varepsilon \qquad j = 1,2,\dots,n$$

بهینه سازی بدون محدودیت

خلاصه روش گرادیان

قدم ابتدایی: مقدار ε و یک جواب ابتدایی x' را تعیین کنید. به دستور توقف بروید.

دستور توقف: در نقطه $x = x'$ ، مقدار گرادیان را محاسبه کنید. اگر رابطه زیر برقرار بود توقف کنید.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \le \varepsilon \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

مقدار فعلی x' با تقریب ε جواب بهینه است. در غیر این صورت، به قدم تکرار بازگردید.

بهینه سازی بدون محدودیت

قدم تکراری:

۱ - تابع $f(x'+t\nabla f(x'))$ را به صورت تابعی از t بیان کنید. این کار را با قرار دادن x' به صورت زیر انجام می‌گیرد.

$$x_j = x'_j + t\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x=x'} \qquad \forall j = 1,2,\dots,n$$

۲- با بهره گیری از روش جستجوی یک متغیری یا مشتق گیری، مقدار t^* که تابع $f(x'+t\nabla f(x'))$ را به ازای تمامی مقادیر غیرمنفی t حداکثر می‌کند تعیین نمایید.

۳- x' را برابر با $x'+t^*\nabla f(x')$ قرار دهید. به دستور توقف بروید.

بهینه سازی بدون محدودیت

مثال: مسئله دو متغیری زیر را در نظر بگیرید

$$Max\ f(x) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

مشتقات جزیی بر حسب x_1 و x_2 به صورت زیر می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_2 - 2x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 + 2 - 4x_2$$

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع $f(x)$ یک تابع مقعر است. ماتریس هسیان تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌شود.

$$H=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$x^T H x=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=(-2x_1+2x_2,2x_1-4x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$
$$=-2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_2-4x_2^2=-2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_2^2=-2(x_1+x_2)^2-2x_2^2\le 0$$

با توجه به این که ماتریس H شرط نیمه معین منفی را برآورده کرده است لذا تابع $f(x)$ مقعر است.

روش جستجوی گرادیان را از $x=(0,0)$ شروع می‌کنیم. چون در این نقطه مشتق‌های جزیی به ترتیب برابر با صفر و دو است، لذا گرادیان برابر با

$$\nabla f(0,0)=(0,2)$$

خواهد بود. حال، اولین تکرار را به ترتیب زیر شروع می‌کنیم.

$$x_1=0+t(0)=0$$
$$x_2=0+t(2)=2t$$

آنگاه مقادیر فوق را در تابع $f(x)$ قرار می‌دهیم.

$$f(x'+t\nabla f(x'))=f(0,2t)=2(0)(2t)+2(2t)-(0)^2-2(2t)^2$$
$$=4t-8t^2$$

با توجه به اینکه

$$f(0,2t^*) = \max_{t\ge 0} f(0,2t) = \max_{t\ge 0}\left\{4t - 8t^2\right\}$$

و همچنین

$$\frac{d}{dt}\left\{4t - 8t^2\right\} = 4 - 16t = 0 \rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

بنابراین، جواب جدید را بدست می‌آوریم.

$$x' = (0,0) + \frac{1}{4}(0,2) = (0,\frac{1}{2})$$

در این جواب جدید، گرادیان برای این جواب به صورت زیر می‌شود.

$$\nabla f\,(0,\frac{1}{2}) = (1,0)$$

بنابراین در تکرار دوم:

$$x = (0,\frac{1}{2}) + t\,(1,0) = (t\,,\frac{1}{2})$$

پس داریم:

$$f\,(x' + t\nabla f\,(x')) = f\,(0+t\,,\frac{1}{2}+0t\,) = f\,(t\,,\frac{1}{2}) = (2t\,)(\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2}) - t^2 - 2(\frac{1}{2})^2$$
$$= t - t^2 + \frac{1}{2}$$

$$f(t^*,\frac{1}{2}) = \max_{t\geq 0} f(t,\frac{1}{2}) = \max_{t\geq 0}\left\{t - t^2 + \frac{1}{2}\right\}$$

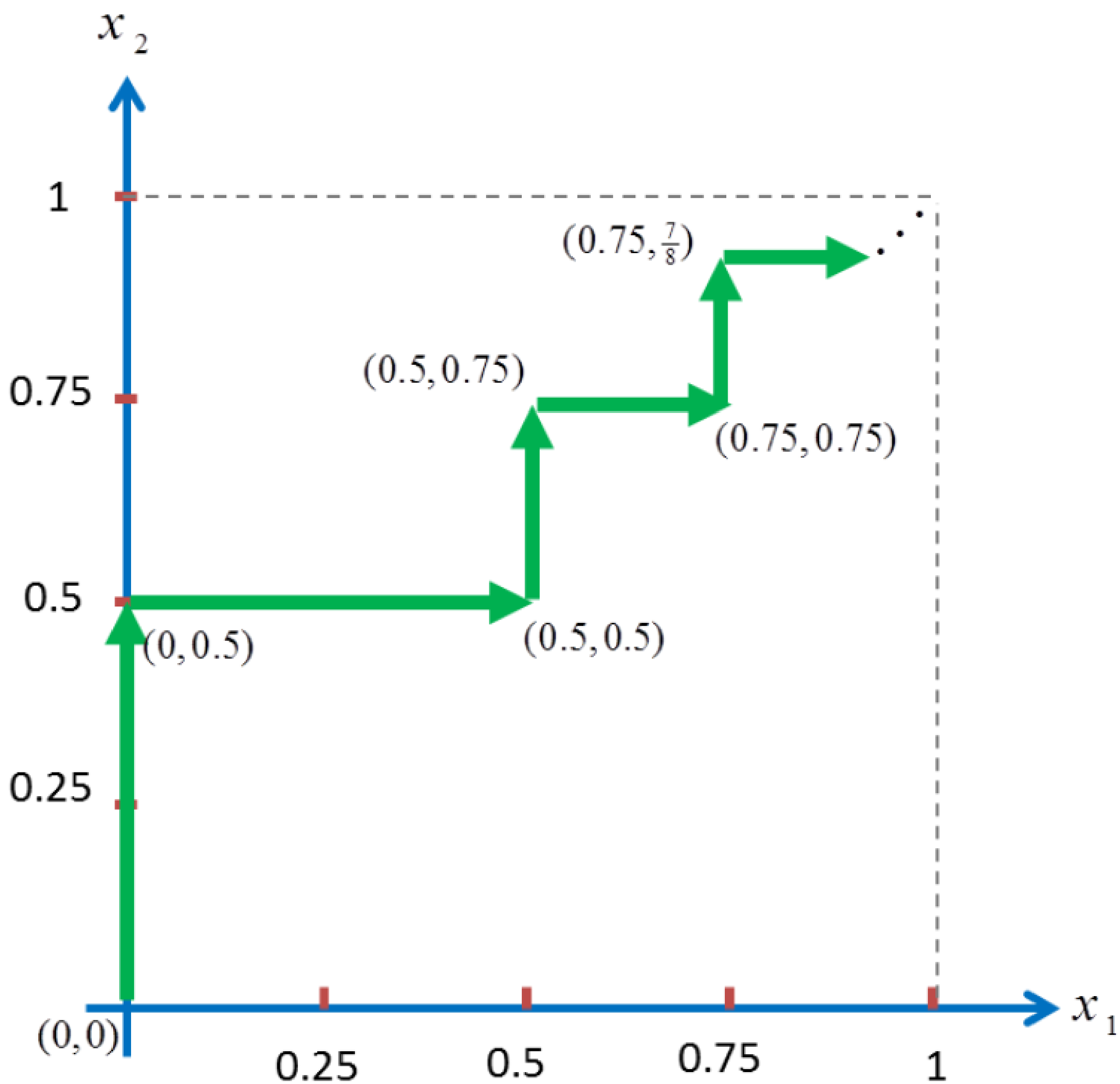
$$\frac{d}{dt}\left\{t - t^2 + \frac{1}{2}\right\} = 1 - 2t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

لذا جواب جدید را به صورت زیر داریم.

$$x' = \left(0,\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1,0) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

چنانچه این فرآیند رو ادامه دهیم، جواب‌های بعدی به صورت $(0.5,0.75)$، $(0.75,0.75)$، $(0.75,0.875)$، و $(0.875,0.875)$ بدست می‌آیند. این جواب‌ها به جواب $(1,1)$ میل می‌کنند که در شکل زیر این روند نشان داده شده است.

بهینه سازی بدون محدودیت



بهینه سازی با محدودیت

- ✓ بهینه سازی توابع چند متغیر با محدودیت
  - ❖ شرایط کان تاکر
- ✓ بهینه سازی با تابع هدف غیرخطی و محدودیت خطی
  - ❖ برنامه ریزی کوادراتیک
- ✓ برنامه ریزی محدب
  - ❖ الگوریتم فرانک-ولف

بهینه سازی با محدودیت

قضیه: فرض کنید که توابع مشتق پذیر $f(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ در اختیار است. در ایـن صورت جواب زیر می‌تواند بهینه باشد:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

به شرط آن که بتوان m عدد $u_1, u_2, \ldots, u_m$ یافت که در شرایط زیر صدق نمایند.

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \le 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

$$2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) x_j^* = 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

$$3) \quad g_i(x^*) - b_i \le 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

$$4) \quad u_i \left(g_i(x^*) - b_i \right) = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

$$5) \quad x_j^* \ge 0 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

$$6) \quad u_i \ge 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

بهینه سازی با محدودیت

نکته: شرایط فوق، شرط لازم برای بهینه بودن است و بـرای کـافی بـودن شـرایط فـوق، فضـای امکان پذیر باید محدب و تابع هدف مقعر باشد.

مثال: مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی دو متغیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &Max \quad f(x) = \ln(x_1+1) + x_2 \\ &s.t. \quad 2x_1 + x_2 \le 3 \end{aligned}$$

در این مسئله $m=1$ ، $g_1(x) = 2x_1 + x_2$ و در نتیجه $g_1(x)$ محدب است.

$$f(x) = \ln(x_1+1) + x_2 \rightarrow H(f(x)) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(x_1+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^T H x < 0 \rightarrow (x_1, x_2) \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(x_1+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_1}{(x_1+1)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{-x_1^2}{(x_1+1)^2} \le 0$$

با توجه به شرایط کان-تاکر داریم.

$$\begin{array}{ll}
1(a) & \dfrac{1}{x_1+1}-2u_1\le 0 \\
2(a) & x_1\left(\dfrac{1}{x_1+1}-2u_1\right)=0 \\
1(b) & 1-u_1\le 0 \\
2(b) & x_2\left(1-u_1\right)=0 \\
3 & 2x_1+x_2\le 3 \\
4 & u_1\left(2x_1+x_2-3\right)=0 \\
5 & x_1\ge 0, x_2\ge 0 \\
6 & u_1\ge 0.
\end{array}$$

از شرط $1(b)$ نتیجه می‌شود که $u_1\ge 1$. از $x_1\ge 0$ رابطه $\dfrac{1}{x_1+1}\le 1$ نتیجه می‌شود. $u_1\ge 1$ به معنای آن است که $\dfrac{1}{x_1+1}-2u_1<0$ و در نتیجه از شرط $2(a)$ رابطه $x_1=0$ بدست می‌آید. با روش مشابه از شرط ۴ و با توجه به این که $u_1\ge 1$ است، نتیجه می‌شود که $2x_1+x_2-3=0$ و لذا داریم $x_2=3$.

برنامه‌ریزی کوادراتیک

در برنامه‌ریزی کوادراتیک همه محدودیت‌ها خطی هستند، اما تابع هدف $f(x)$ باید کوادراتیک باشد. بعضی از عبارات تابع هدف یا به صورت مجذور یک متغیر و یا حاصلضرب دو متغیر هستند.

در مسئله برنامه‌ریزی کوادراتیک هدف پیدا کردن مقدار بردار x است به نحوییکه:

$$Max \quad f(x) = cx - \frac{1}{2}x^T Q x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

روش سیمپلکس تغییر یافته

در روش سیمپلکس تغییر یافته یا *The modified simplex method* ، اولین قدم فرمولـه کـردن شرایط کان-تاکر است. یک راه آسان برای بیان این شرایط عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
Qx + A^T u - y &= c^T \\
Ax + v &= b \\
x \geq 0 \quad u \geq 0 \quad y &\geq 0 \quad v \geq 0 \\
x^T y + u^T v &= 0.
\end{aligned}
$$

بهینه سازی با محدودیت

در صورتیکه $c^T \le 0$ و $b \ge 0$ باشد، متغیرهـای اساسـی همـان عناصـر y و v هسـتند کـه بـه صورت زیر می‌شود:

$$x = 0, u = 0, y = -c^T, v = b$$

در صورتیکه شرط فوق برقرار نباشد، باید با افزودن یک متغیر مصنوعی به هر معادله ای که در آن $c_j > 0$ یا $b_i < 0$ باشد مسئله را تغییر داد. در حالتی که $c_j > 0$ باشد، با افزودن متغیر مصـنوعی z_1 به سمت چپ و در حالتی که $b_i < 0$ با تفریق متغیر مصنوعی z_2 از سمت چـپ و سـپس ضـرب کردن آن در عدد ۱- بدست می‌آید. در این حالت می‌توان متغیرهای مصنوعی z_1 و z_2 را به عنوان متغیر اساسـی معرفـی کـرد.

بهینه سازی با محدودیت

برای حذف متغیرهای مصنوعی می توان از سیمپلکس دو فاز استفاده کرد و یک جواب اساسی موجه ابتدایی برای مسئله پیدا کرد. تابع هدف فاز یک به صورت زیر می‌شود:

$$Min \quad Z = \sum_{j} z_{j}$$

قاعده: متغیرهای غیراساسی که متغیر مکمل آن‌ها در حال حاضر اساسی است را به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب نکنید. از بین سایر متغیرهای غیراساسی، طبق ضابطه متداول روش سیمپلکس، متغیر اساسی ورودی را مشخص کنید.

مثال: جواب بهینه مدل زیر را بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & f(x_1,x_2)=15x_1+30x_2+4x_1x_2-2x_1^2-4x_2^2\\
s.t. \quad & x_1+2x_2\le 30\\
& x_1\ge 0, x_2\ge 0.
\end{aligned}
$$

برای حل این مدل، ابتدا باید مدل فوق را به فرمت استاندارد تبدیل کرد. نمایش گسترده فرم عمومی به صورت زیر می‌شود.

$$
\begin{aligned}
& f(x)=cx-\frac{1}{2}x^TQx\\
& f(x)=c_1x_1+c_2x_2-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\\
& =c_1x_1+c_2x_2-\frac{1}{2}\left(q_{11}x_1^2+q_{21}x_1x_2+q_{12}x_1x_2+q_{22}x_2^2\right)
\end{aligned}
$$

با قرار دادن تابع هدف با فرم عمومی بالا خواهیم داشت:

$$c=(15 \quad 30), Q=\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&Min \quad Z = z_1 + z_2 \\
&s.t. \quad 4x_1 - 4x_2 + u_1 - y_1 + z_1 = 15 \\
&\quad -4x_1 + 8x_2 + 2u_1 - y_2 + z_2 = 30 \\
&\quad x_1 + 2x_2 + v_1 = 30 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

بهینه سازی با محدودیت

محدودیت مکمل اضافی که به طور صریح در نظر گرفته نشده عبارت است از:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_1 v_1 = 0$$

قاعده ورود محدود باعث می‌شود که محدودیت فوق همواره برقرار باشد. به طور مشـخص، در مورد سه زوج مکمل یعنی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (u_1, v_1) هر گاه یکی از متغیرهای هر کدام از زوج ها، متغیری اساسی باشد، متغیر دیگر آن نمی‌تواند اساسی باشد.

بهینه سازی با محدودیت

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	u_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	طرف سمت راست
Z	0	-1	0	-4	-3	1	1	0	0	0	-45
z_1	1	0	4	-4	1	-1	0	0	1	0	15
z_2	2	0	-4	8	2	0	-1	0	0	1	30
v_1	3	0	1	2	0	0	0	1	0	0	30
Z	0	-1	-2	0	-2	1	0.5	0	0	0.5	-30
z_1	1	0	2	0	2	-1	-0.5	0	1	0.5	30
x_2	2	0	-0.5	1	0.25	0	-0.125	0	0	0.125	3.75
v_1	3	0	2	0	-0.5	0	0.25	1	0	-0.25	22.5
Z	0	-1	0	0	-2.5	1	0.75	1	0	0.25	-7.5
z_1	1	0	0	0	2.5	-1	-0.75	-1	1	0.75	7.5
x_2	2	0	0	1	0.125	0	--0.062	0.25	0	0.0625	9.375
x_1	3	0	1	0	-0.25	0	0.125	0.5	0	-0.125	11.25
Z	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
u_1	1	0	0	0	1	-0.4	-0.3	-0.4	0.4	0.3	3
x_2	2	0	0	1	0	0.05	-0.025	0.3	-0.05	0.025	9
x_1	3	0	1	0	0	-0.1	0.05	0.4	0.1	-0.05	12

برنامه ریزی محدب

در بخش‌های قبلی، روش‌های مربوط به چند حالت خاص برنامه‌ریزی محدب مورد بحث قرار گرفت. در این بخش الگوریتم فرانک – ولف یا *Frank-wolfe*، برای حل مسائل برنامه‌ریزی محدب با محدودیت‌های خطی ارایه می‌شود.

تقریب خطی تابع هدف $f(x)$ در نقطه آزمایشی x' با استفاده از بسط تیلور عبارت است:

$$f(x) \approx f(x') + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x')}{\partial x_j}(x - x') = f(x') + \nabla f(x')(x - x')$$

خلاصه الگوریتم فرانک-ولف

قدم ابتدایی:

با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی، یک جواب اساسی ابتدایی $x^{(0)}$ را مشخص کنید. K را مساوی یک قرار دهید.

قدم تکراری:

قسمت ۱ – بازای $j = 1, 2, \dots, n$، مشتق‌های جزیی تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x^{(k-1)}$ محاسبه و c_j را برابر با $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ قرار دهید.

قسمت ۲ – جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی زیر ، یعنی $x_{LP}^{(k)}$ را بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad g(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \quad Ax \le b \quad , \quad x \ge 0
\end{aligned}
$$

برنامه ریزی محدب

قسمت ۳ – مقدار پارامتر t را حساب کنید. برای این منظور $x = x^{(k-1)} + t(x_{LP}^{(k)} - x^{(k-1)})$ را در تابع $f(x)$ قرار دهید و آن را بر حسب t ، یعنی $f(x) = h(t)$ بدست آورید. با استفاده از یکی از روش‌های جستجوی یک بعدی، تابع $h(t)$ را در فاصله $0 \le t \le 1$ حداکثر و $x^{(k)}$ را به ازای t حاصل تعیین نمایید. به دستور توقف بروید.

دستور توقف:

چنانچه $x^{(k-1)}$ و $x^{(k)}$ به اندازه کافی به هم نزدیک باشند توقف کنید، و $x^{(k)}$ را جواب بهینه تلقی نمایید. در غیر این صورت، با قرار دادن $k = k + 1$ به قدم تکراری برگردید.

برنامه ریزی محدب

مثال: مسئله برنامه‌ریزی محدب زیر را که دارای محدودیت‌های خطی است در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Max \quad & f(x) = 5x_1 - x_1^2 + 8x_2 - 2x_2^2 \\ s.t. \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که داریم:

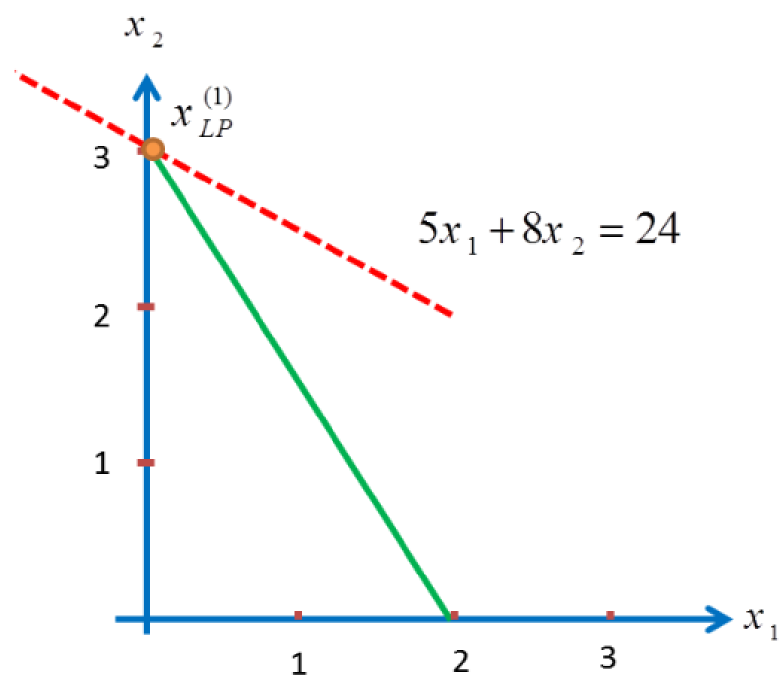
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 5 - 2x_1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8 - 4x_2$$

لذا حداکثر این تابع به ازای $x = (2.5, 2)$ حاصل می‌شود، که محدودیت کارکردی را مشخصا نقض می‌کند. از این رو، پیدا کردن جواب حداکثر که حتما در محدودیت‌ها صدق کند به بررسی بیشتری نیاز دارد.

برنامه ریزی محدب

از آن جا که $x=(0,0)$ یک جواب موجه (و همچنین یک جواب گوشه برای فضای امکان پذیر) است، لذا آن را به عنوان جواب موجه اساسی ابتدایی الگوریتم فرانک-ولف در نظر می‌گیریم. با قرار دادن این جواب در عبارات مربوط به مشتقهای جزیی، $c_1=5, c_2=8$ و تابع $5x_1+8x_2$ که تقریب خطی تابع هدف است بدست می‌آید که لذا مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} Max \quad & f(x)=5x_1+8x_2 \\ s.t. \quad & 3x_1+2x_2\le 6 \\ & x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{aligned}$$



با توجه به قسمت ۳ قدم تکراری، تمام نقاط پاره خط رابط بین $(0,3)$ و $(0,0)$ برای یافتن پارامتر t که منجر به بیشترین مقدار تابع هدف می‌شود.

$$(x_1, x_2) = (0,0) + t\left[(0,3) - (0,0)\right] = (0,3t) \quad for \quad 0 \le t \le 1$$
$$h(t) = f(0,3t) = 8(3t) - 2(3t)^2 = 24t - 18t^2$$

مقدار t^* که تابع $h(t)$ را در فاصله $0 \le t \le 1$ حداکثر می‌کند برابر با $t^* = \frac{2}{3}$ است و از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{dh}{dt} = 24 - 36t = 0$$

برنامه ریزی محدب

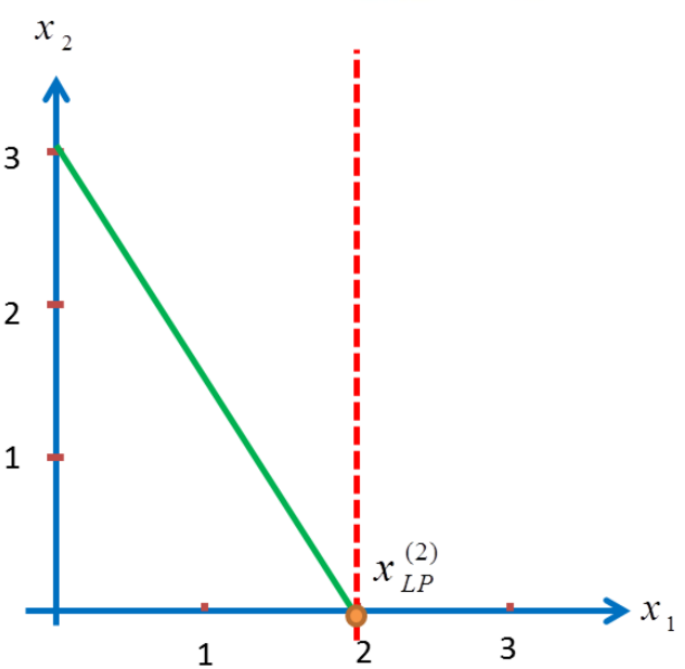
بدین ترتیب تکرار اول با تعیین جواب آزمایشی بعدی، به شرح زیر پایان می پذیرد.

$$x^{(1)}=(0,0)+\frac{2}{3}\big[(0,3)-(0,0)\big]=(0,2)$$

در تکرار دوم، $x^{(1)}=(0,2)$ است لذا ضرایب تابع هدف به صورت زیر می‌شود.

$$c_1=5-2(0)=5$$
$$c_2=8-2(2^2)=0$$

$$\begin{array}{ll} Max & f(x)=5x_1 \\ s.t. & 3x_1+2x_2\le 6 \\ & x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{array}$$



جواب بهینه مدل بهینه سازی خطی برابر با $x_{LP}^{(2)}=(2,0)$ بدست می‌آید. از این رو، پاره خط رابط بین $x^{(1)}$ و $x_{LP}^{(2)}$ به صورت زیر می‌شود.

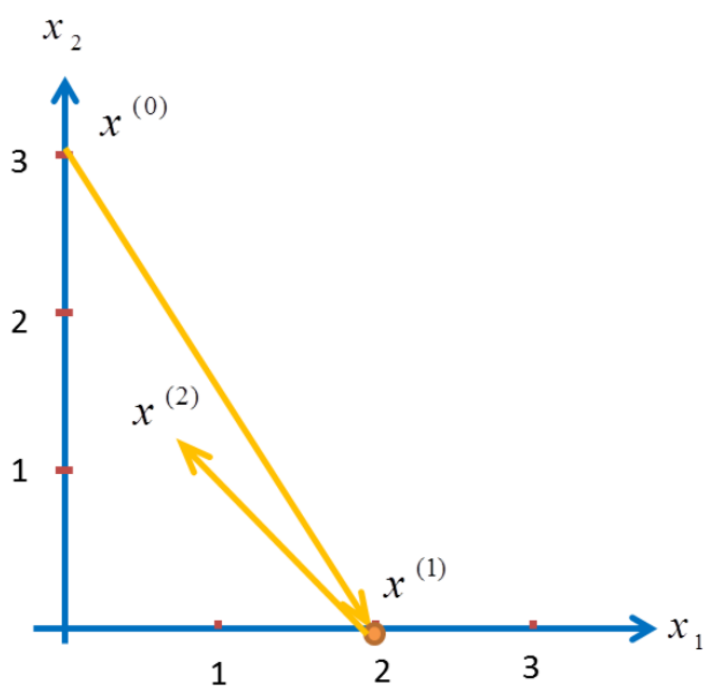
$$x=(0,2)+t\left[(2,0)-(0,2)\right]=(2t,2-2t)$$

$$h(t)=f(2t,2-2t)=5(2t)-(2t)^2+8(2-2t)-2(2-2t)^2$$

$$h(t)=8+10t-12t^2$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=10-24t=0\rightarrow t^*=\frac{5}{12}$$

$$x^{(2)}=(0,2)+\frac{5}{12}\left[(2,0)-(0,2)\right]=\left(\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right)$$



ادامه روند . . .

مشابه روند فوق را برای تکرارهای بعدی انجام می‌دهیم تا شرط توقف برآورده شود.

برنامه ریزی غیر محدب

روش SUMT یا روش تسلسلی حداقل کردن بدون محدودیت

$$Max \quad P(x;r) = f(x) - rB(x)$$

$B(x)$ یک تابع مانع است که به ازای هر جواب موجه x (برای مسئله اصلی) خواص زیر را دارد:

۱) چنانچه x از مرز منطقه موجه دور باشد مقدار $B(x)$ کم است.

۲) چنانچه x نزدیک مرز منطقه موجه باشد مقدار $B(x)$ زیاد است.

۳) هنگامی که فاصله نقطه با یکی از مرزهای منقطه موجه به طرف صفر میل کند، مقدار $B(x)$ به طرف بی نهایت میل می‌کند.

برنامه ریزی غیر محدب

به این ترتیب از یک جواب آزمایشی شروع می‌کنیم و حداکثر تابع $P(x;r)$ را با فرایند جستجو تعیین می نماییم. تابع $B(x)$ مانع عبور از مرز منطقه موجه مسئله اصلی و جستجو در خارج از آن می‌شود.

متداول ترین روش انتخاب $B(x)$ عبارت است از:

$$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$

خلاصه روش SUMT

قدم ابتدایی:

یک جواب موجه آزمایشی $x^{(0)}$ که روی مرز منطقه موجه نباشد را انتخاب نمایید. مقدار k را برابر با یک قرار دهید و مقادیر مثبت r و θ را تعیین نمایید. برای مثال: $\theta=0.01, r=1$

قدم تکراری:

از $x^{(k-1)}$ شروع کرده و با استفاده از روش جستجوی گرادیان، $x^{(k)}$ جواب حداکثر نسبی تابع زیر را تعیین نمایید.

$$P(x;r)=f(x)-r\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b_i-g_i(x)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right]$$

برنامه ریزی غیر محدب

دستور توقف:

اگر مقدار تغییر از $x^{(k-1)}$ به $x^{(k)}$ ناچیز باشد توقف نمایید و $x^{(k)}$ را به عنوان جـواب حـداکثر نسبی مسئله اصلی منظور نمایید.

در غیر این صورت، k را برابر با $k+1$ و $r=\theta r$ قرار دهید و به قدم تکراری برگردید.

برنامه ریزی غیر محدب

مثال: برای تشریح روش *SUMT*، مسئله دو متغیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max\ f(x) = x_1 x_2 \\ &s.t.\quad x_1^2 + x_2 \le 3 \\ &\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

هر چند $g_1(x) = x_1^2 + x_2$ به علت محدب بودن هر جمله آن محدب است، ولی چون $f(x) = x_1 x_2$ مقعر نیست لذا این مسئله نیز یک برنامه‌ریزی محدب نخواهد بود.

برنامه ریزی غیر محدب

در قدم ابتدایی، جواب $(x_1, x_2) = (1,1)$ آشکارا موجه است و روی مرز منطقه موجه هم قرار ندارد را به عنوان جواب ابتدایی برمی‌گزینیم. بنابراین، $x^{(0)} = (1,1)$ است و مقادیر $r = 1, \theta = 0.01$ انتخاب می‌کنیم. در قدم تکراری داریم:

$$P(x;r) = x_1 x_2 - r\left(\frac{1}{3 - x_1^2 - x_2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right)$$

برنامه ریزی غیر محدب

برای حداکثر کردن تابع فوق، با شروع از نقطه $(1,1)$ و با پارامتر $r=1$ و با به کارگیری فرآیند جستجوی گرادیان به جواب $x^{(1)}=(0.9,1.36)$ می رسیم. با انتخاب مقدار $r=1\times 0.01=0.01$ و شروع از نقطه $(0.9,1.36)$ ، فرایند جستجوی گرادیان به جواب $x^{(2)}=(0.983,1.933)$ می رسد. یک تکرار دیگر با $r=0.01\times 0.01=0.0001$ و شروع از $x^{(2)}$ به $x^{(3)}=(0.998,1.994)$ منتهی می‌شود.

k	r	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0		1	1
1	1	0.90	1.36
2	0.01	0.983	1.933
3	0.0001	0.998	1.994
$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 2

تمرین

برای حل تمرین های تکمیلی در خصوص مباحث مطروحه، به جزوه این درس مراجعه کنید.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com

بهینه سازی با محدودیت

- ✓ بهینه سازی توابع چند متغیر با محدودیت
  - ❖ شرایط کایروش کان تاکر یا KKT
  - ❖ برنامه ریزی کوادراتیک
  - ❖ روش فرانک ولف
- ✓ برنامه ریزی غیرمحدب
  - ❖ روش SUMT