درس ۲۷:

برنامه ریزی احتمالی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

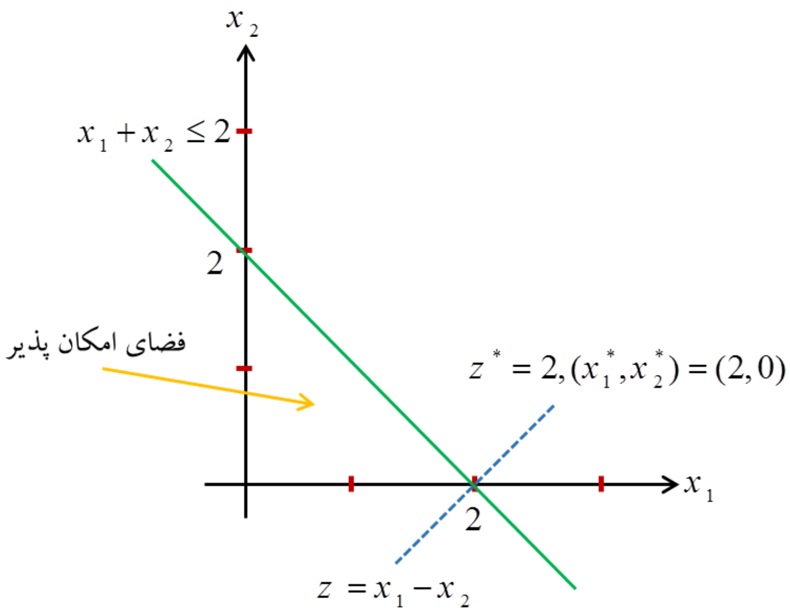
مقدمه

برنامه ریزی احتمالی متعلق به شاخه عمومی تر برنامه ریزی عدم اطمینان است که شامل مباحثی همچون برنامه ریزی پویا، درخت تصمیم گیری، شبیه سازی، فرایندهای تصادفی و قیود احتمالی است. در تمام مسائل برنامه ریزی خطی، غیر خطی، عدد صحیح و صفر و یک؛ قطعیت داده ها یک فرض اصلی است و لذا آن را برنامه ریزی قطعی می نامیم. دشواری این مدل ها بیشتر به خاطر یافتن جواب بهینه است که با عنوان بهینه سازی برنامه ریزی احتمالی یا برنامه ریزی تصادفی نامیده می شود و به خصوص در مسائل برنامه ریزی غیر خطی و عدد صحیح این دشواری بیشتر و بیشتر می شود. هر گاه در یک مسئله برنامه ریزی، عدم اطمینان به شکل توزیع های پیوسته یا گسسته احتمالی در پارامترهای مدل وجود داشته باشد، آن را یک مسئله **برنامه ریزی احتمالی** می نامیم. معمولا در نظر گرفتن پارامترهای عدم اطمینان باعث بزرگی و پیچیدگی بهینه سازی آن می شود. برخی مواقع برای ساده سازی مسئله، پارامترهای عدم اطمینان را با مقدار متوسط آن و یا برآوردی از آن جایگزین می کنند که می تواند به خطای فاحش در نتایج منجر شود، چون این جواب برای همین مقادیر معتبر است و ممکن است برای مقادیر دیگر غیر موجه یا غیر بهینه باشد.

مثال: مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad x_1 - x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 2, \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

از طریق ترسیمی به راحتی می توان جواب این مسئله را بدست آورد که به صورت زیر می شود.



حال فرض کند که پارامتر سمت راست محدودیت، غیرقطعی باشد که در این صورت به جای ۲، ۳ باشد. در این صورت جواب جدید برابر $z^*=3,(x_1^*,x_2^*)=(3,0)$ می شود که جواب قبلی یعنی $(2,0)$ دیگر بهینه نیست. حالا اگر پارامتر سمت راست به جای ۲، ۱ باشد، جواب بهینه $z^*=1,(x_1^*,x_2^*)=(1,0)$ می شود که در این صورت جواب $(2,0)$ امکان ناپذیر است. میانگین ۱ و۳ برابر ۲ است ولی جوابی که از سمت راست برابر ۲ بدست می آید می تواند با تغییر مقدار سمت راست، غیر بهینه یا حتی امکان ناپذیر شود.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با بازگشت

در برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای، متغیرهای تصمیم گیری مسئله بهینه سازی در شرایط عدم اطمینان، به دو مجموعه تقسیم می شوند. متغیرهای مرحله اول (x) متغیرهایی هستند که باید قبل از وقوع و محقق شدن پارامترهای احتمالی، در مورد آن ها تصمیم گیری شود. هنگام تصمیم گیری و حل مدل، این تصمیمات در حضور عدم اطمینان در مورد رخدادهای آتی (ξ) گرفته می شود. در مرحله دوم که در مورد متغیرهای مرحله دوم تصمیم گیری می شود، مقدار واقعی پارامترهای عدم اطمینان (ξ)، مشخص و واقع می شوند و تصمیمات بازگشتی یا اقدامات اصلاحی (y) صورت می گیرد. به دلیل این عدم اطمینان، هزینه مرحله دوم، خود یک متغیر تصادفی خواهد بود.

از این رو، هدف بهینه سازی، انتخاب متغیرهای مرحله اول خواهد بود، به طریقی که جمع هزینه های مرحله اول و متوسط هزینه های احتمالی مرحله دوم حداقل شود.

در واقع، تصمیمات مرحله اول با در نظر گرفتن تأثیرات آتی آن ها بر روی تصمیمات مرحله دوم گرفته می شود. این تأثیرات با تابع بازگشت اندازه گیری می شود که متوسط مقدار هزینه تصمیمات مرحله دوم را اندازه گیری می کند.

فرموله بندی برنامه ریزی احتمالی

مسئله برنامه ریزی خطی احتمالی با بازگشت ثابت به صورت زیر فرموله می شود:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Min} z = c^T x + E_{\xi}\left[\min q(\omega)^T y(\omega)\right],\\
&\text{s.t.} \quad Ax = b,\\
&T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega)\\
&x \geq 0, y(\omega) \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

در رابطه بالا، c برداری مشخص و قطعی با n_1 مؤلفه (عنصر)، b برداری قطعی با m_1 مولفه، A و W ماتریس های مشخص و معین به ترتیب با ابعاد $m_1 \times n_1$ و $m_2 \times n_2$ هستند.

نکته: عبارت W، ماتریس بازگشت نامیده می شود که فرض می کنیم در اینجا ثابت است. در صورت مشخص و ثابت بودن ماتریس باز گشت، این نوع برنامه ریزی را برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با بازگشت ثابت می نامیم.

تعریف متغیرها و پارامترهای ای مدل در جدول زیر آمده است.

تعریف	ابعاد	نمایش ریاضی
متغیر تصمیم مرحله اول	$n_1 \times 1$	x
متغیر تصمیم مرحله دوم	$n_2 \times 1$	$y(\omega)$
ضریب تکنولوژی متغیر مرحله دوم با ماهیت غیرقطعی	$m_2 \times n_2$	W
ضریبت تکنولوژی متغیر مرحله اول با ماهیت قطعی	$m_1 \times n_1$	A
مقدار سمت راست با ماهیت قطعی	$m_1 \times 1$	b
مقدار سمت راست با ماهیت غیرقطعی	$m_2 \times 1$	$h(\omega)$
ضریب تابع هدف متغیر مرحله دوم با ماهیت غیرقطعی	$n_2 \times 1$	$q(\omega)$
ضریب تکنولوژی متغیر مرحله اول با ماهیت غیرقطعی	$m_2 \times n_1$	$T(\omega)$

نکته: با کنار هم قرار دادن اجزاء تصادفی مسئله بالا، به بردار پارامترهای تصادفی $\xi^T(\omega)=(q(\omega)^T,h(\omega)^T T_i(\omega),\dots T_{m2}(\omega))$ با $N=n_2+m_2+(m_2\times n_1)$ عنصر می رسیم؛ در این بردار، $T_i(\omega)$، i امین سطر ماتریس ضرایب تکنولوژی $T(\omega)$ است.

توجه: در حالت کلی محدودیت ها می توانند از نوع $\geq$ و $=$ و $\leq$ و مسئله از نوع حداکثر سازی و حداقل سازی باشد.

مدل (۱) معادل برنامه ریزی زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{Min} z = c^T x + \Phi(x) \\ &\text{s.t.} \quad Ax = b, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

که داریم:

$$\Phi(x) = E_{\xi} \mathcal{Q}(x, \xi(\omega)) \tag{۳}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}(x, \xi(\omega)) = \underset{y}{\text{Min}}\, q(\omega)^T y(\omega) \\ &\text{s.t.} \qquad Wy = h(\omega) - T(\omega)x \\ &\qquad\quad x, y \geq 0 \end{aligned} \tag{۴}$$

متوسط هزینه تصمیمات مرحله دوم با $\Phi(x)$ نشان داده می شود و آن را تابع بازگشت می نامیم که برای یک x معین و بر حسب ω به دست می آید. در این رابطه، E_ω میانگین ریاضی است که بر روی فضای $\xi(\omega)$ به دست می آید. همچنین تابع $\mathcal{Q}(x,\xi(\omega))$ به ازای یک x و $\xi(\omega)$ معین و ثابت به دست می آید؛ به عبارت دیگر، با توجه به اینکه مقدار x از تصمیمات مرحله اول به دست آمده، مقدار آن در محاسبه این تابع ثابت است؛ از این رو، برای هر $\xi(\omega)$ معین، یک $\mathcal{Q}(x,\xi(\omega))$ قابل محاسبه است. به ازای هر $\mathcal{Q}(x,\xi(\omega))$ که محاسبه می شود، یک مقدار برای تصمیمات مرحله دوم به صورت بهینه که با (y) نشان می دهیم، داریم و سپس امید ریاضی با توجه به ω محاسبه می شود. در مسائل برنامه ریزی دو مرحله ای محاسبه تابع بازگشت بسیار مشکل است. چون در تابع $\mathcal{Q}(x,\xi(\omega))$، به ازای هر ω مقدار $y(\omega)$ از حل رابطه بالا به دست می آید.

توجه: روابط (۱) تا (۴) قابلیت استفاده برای متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته را دارند.

در صورت قطعی بودن ماتریس T، رابطه بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\, z = c^T x + \Psi(\chi) \\ &\text{s.t.}\quad Ax = b, \\ &\qquad Tx - \chi = 0 \\ &\qquad x \ge 0 \end{aligned} \tag{۵}$$

در این رابطه، $\Psi(\chi) = E_\xi \psi(\chi,\xi(\omega))$ و $\psi(\chi,\xi(\omega)) = \mathrm{Min}\{q(\omega)^T y \mid Wy = h(\omega) - \chi, y \ge 0\}$ هستند.

روشن است که ماهیت مشکل برنامه ریزی احتمالی به دلیل بار محاسباتی محاسبه $\Phi(x)$ برای همه xها در روابط (۲) تا (۴) یا $\Psi(\chi)$ برای همه χ در رابطه (۵) است. از این رو، ویژگی های برنامه معادل قطعی آن ها و توابع $\Phi(x)$ و $\psi(x)$ به طور گسترده ای مورد تحقیق قرار گرفته است. البته هنگامی که ساختار

بازگشت همانند مسائل با بازگشت ثابت باشد، با این مشکلات کمتر مواجهیم. در بخش های بعدی برخی از این ویژگی ها را بررسی می کنیم.

مسئله با بازگشت ثابت

به معنی این است که ماتریس بازگشت (W) مستقل از ω باشد، یعنی داشته باشیم $W(\omega)=W$. در صورت ثابت نبودن این ماتریس، ممکن است با مشکلاتی روبه رو شویم که در ادامه به آن ها می پردازیم.

نکته: وضعیتی که در آن $W=[I,-I]$ باشد، مسئله با باز گشت ساده نامیده می شود. I ماتریس همانی است.

مسئله با بازگشت کامل

یک مسئله با بازگشت کامل است، اگر ماتریس بازگشت ثابت باشد و به ازای هر مقدار برای تصمیمات مرحله اول (x) محدودیت مسئله مرحله دوم، $T(\omega)x+Wy(\omega)=h(\omega)$، موجه باقی بماند. روشن است که در این گونه مسائل به ازای هر مقدار برای x و متغیر تصادفی ω، مسئله مرحله دوم همواره موجه باقی می ماند.

مثال ۱: مسئله برنامه ریزی احتمالی دو مرحله زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{Min}\, z=-\frac{3}{4}x-y_{1k}+3y_{2k}+y_{3k}+y_{4k},$$

$$\text{s.t.}\quad x\le 5,$$

$$-y_{1k}+y_{2k}-y_{3k}+y_{4k}=\xi_k+\frac{1}{2}x,$$

$$-y_{1k}+y_{2k}+y_{3k}-y_{4k}=1+\xi_k+\frac{1}{4}x,$$

$$x,y_{1k},y_{2k},y_{3k},y_{4k}\ge 0$$

ξ_k یک توزیع گسسته یکنواخت است و برای آن، k=۱۱ پیشامد بین صفر و ۱- داریم: $\{۰،-۰/۱،-۰/۲،-۰/۳،-۰/۴،-۰/۵،-۰/۶،-۰/۷،-۰/۸،-۰/۹،-۱/۰\}$ وجود و احتمال وقوع هر پیشامد

$P_k = 1/11$ است $(k = 1, 2, ..., 11)$. توجه کنید در این مسئله عبارت (ω) با اندیس k آورده شده است.

امکان پذیری این مدل را برای $x = 5$ بررسی کنید.

حل: در مرحله اول مسئله برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای بالا، در مورد متغیر تصمیم x تصمیم گیری می کنیم. از این رو، این متغیر، متغیر تصمیم مرحله اول است؛ در مرحله دوم پس از مشخص شدن مقدار ξ_k، در مورد متغیرهای تصمیم مرحله دوم تصمیم گیری می شود. توجه کنید به ازای هر k=۱,۲,...,۱۱، $y_{1k}, y_{2k}, y_{3k}, y_{4k}$ متغیرهای تصمیم مرحله دوم هستند. در زیر این مسئله را به صورت ماتریسی بیان کرده ایم:

$$x = [x], \qquad y_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \\ y_{4k} \end{bmatrix} \; k = 1, 2, ..., 11, \qquad c^T = \left[-\frac{3}{4}\right],$$

$$q_k^T = [-1\ 3\ 1\ 1] \qquad k = 1, 2, ..., 11$$

$$A = [1], \qquad b = [5], \qquad T_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \; k = 1, 2, ..., 11,$$

$$W_k = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; k = 1, 2, ..., 11$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}, ..., h_{11} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

با توجه به ثابت بودن ماتریس بازگشت به ازای همه k، این مسئله یک مسئله با بازگشت ثابت است.

علاوه بر این ماتریس فنی نیز به ازای همه k ثابت است.

در این مسئله برای $\mathcal{Q}(x, \xi)$ داریم:

$$\mathcal{Q}(x, \xi) = \text{Min}\, z = -y_{1k} + 3y_{2k} + y_{3k} + y_{4k}$$

$$\text{s.t.} \quad -y_{1k} + y_{2k} - y_{3k} + y_{4k} = \xi_k + \frac{1}{2}x$$

$$-y_{1k}+y_{2k}+y_{3k}-y_{4k}=1+\xi_k+\frac{1}{4}x$$

$$y_{1k},y_{2k},y_{3k},y_{4k}\ge 0$$

برای نمونه، به ازای $\xi_1=0$ (اولین مقدار گسسته) و x=۵، داریم:

$$\mathcal{Q}(5,0)=\text{Min}\,z=-y_{11}+3y_{21}+y_{31}+y_{41}$$

$$\text{s.t.}\qquad -y_{11}+y_{21}-y_{31}+y_{41}=2.5$$

$$-y_{11}+y_{21}+y_{31}-y_{41}=2.25$$

$$y_{11},y_{21},y_{31},y_{41}\ge 0$$

مقدار هدف آن، z=۰ است، که به ازای x=۵ و $\xi_1=0$ به دست آمده است. نتایج همه مسائل به ازای x = ۵ و ξ_k مختلف در جدول ۱ خلاصه شده است. در این جدول، متغیرهای y_{k1} و y_{k3} برابر با صفر و آورده نشده اند.

جدول (۱) تعیین موجه بودن مرحله دوم

k	ξ_1	z_k	y_{2k}	y_{4k}
۱	۰	۰	۲/۳۷۵	**۰/۱۲۵**
۲	-۰/۱	۰	۲/۲۷۵	**۰/۱۲۵**
۳	-۰/۲	۰	۲/۱۷۵	**۰/۱۲۵**
۴	-۰/۳	۰	۲/۰۷۵	**۰/۱۲۵**
۵	-۰/۴	۰	۱/۹۷۵	**۰/۱۲۵**
۶	-۰/۵	۰	۱/۸۷۵	**۰/۱۲۵**
۷	-۰/۶	۰	۱/۷۷۵	**۰/۱۲۵**
۸	۰/۷	۰	۱/۶۷۵	**۰/۱۲۵**
۹	-۰/۸	۰	۱/۵۷۵	**۰/۱۲۵**
۱۰	-۰/۹	۰	۱/۴۷۵	**۰/۱۲۵**
۱۱	-۱	۰	۱/۳۷۵	**۰/۱۲۵**

به ازای مقدار $x = 5$، مدل مرحله دوم همیشه امکان پذیر است. به راحتی می توان نشان داد که برای سایر مقادیر x، مسئله مرحله دوم امکان پذیر است و لذا این مدل، مدل برنامه ریزی احتمالی دو مرحله با **بازگشت کامل** است.

برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای با پارامترهای احتمالی گسسته

در نظر گرفتن ξ به صورت یک متغیر تصادفی گسسته، از مهم ترین کلاس های برنامه ریزی احتمالی است که در عمل مستقیم یا از طریق نمونه گیری از یک توزیع پوسته مکرر استفاده می شود. ویژگی هایی که در این قسمت در قالب قضیه گفته می شود، در قسمت های دیگر استفاده می شوند.

مجموعه $X_1 = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$، مجموعهٔ موجه مرحله اول است که با محدودیت های ثابت مرحله اول مشخص می شوند؛ این مجموعه به بردار متغیرهای تصادفی وابسته نبوده و برای همه آن ها ثابت است. به ازای هر ξ معین، مجموعه موجه اولیه را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_2(\xi) = \{x \mid y \geq 0, \text{s.t. } W(\omega) = h(\omega)x - T(\omega)x\}$$

حال با فرض گسسته بودن ξ، مجموعه موجه مرحله دوم را تعریف می کنیم:

$$X_2 = \bigcap_{\xi \in \Xi} X_2(\xi)$$

در واقع X_2 متغیرهای تصمیمی (x) را در بر می گیرد که در مرحله دوم موجه هستند. در مثال قبلی، $X_1 = \{x \mid x \leq 5, x \geq 0\}$ مجموعهٔ موجه مرحله اول بود. مجموعه موجه مرحله دوم نیز با توجه به اینکه به ازای کلیه مقادیر برای α محدودیت ها همچنان موجه باقی می ماند، از این رو $X_2 = \{R\}$ در واقع، مسئله مذکور یک مسئله با باز گشت کامل است.

در این صورت، قضایای زیر را داریم:

قضیه ۱: به ازای یک ξ معین، مجموعه موجه اولیه، $X_2 = \{\xi\}$، یک چند وجهی محدب است.

قضیه ۱-۲: وقتی ξ، یک متغیر تصادفی گسسته محدود باشد، X_2 یک چند وجهی محدب است.

قضیه ۱-۳: اشتراکی چند وجهی های متناهی، یک چند وجهی متناهی است.

همان طور که گفته شد به ازای مقدار ثابت x و ξ ، مقدار برنامه مرحله دوم، $\mathcal{Q}(x,\xi)$، به صورت زیر مشخص می شود:

$$\mathcal{Q}(x,\xi) = \operatorname*{Min}_{y} q(\omega)^{T} y$$

$$\text{s.t.} \qquad W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x,$$

$$y \geq 0$$

در محاسبه مقدار $\mathcal{Q}(x,\xi)$، وقتی با مشکل روبه رو می شویم که رابطه بالا نامتناهی (بی کران) یا ناموجه باشد. نامتناهی شدن این مقدار، معمولا از تعریف بد مدل ناشی می شود که می توانیم به راحتی با افزودن یک کران بالا بر روی آن را برطرف کنیم. در صورت ناموجه شدن این تابع، اگر فقط $x \in X_2$ را در نظر بگیریم، مشکل نا موجه بودن نیز حل می شود. بنابراین، به ازای $x \in X_2$ مقدار $\mathcal{Q}(x,\xi)$ برای هر ξ موجه است.

در مسئله برنامه ریزی دو مرحله ای، مجموعه متغیرهای موجه، اشتراک بین X_1 و X_2 است، که شامل متغیرهای موجه مرحله اول است که در مرحله دوم نیز صدق می کند. مقدار تابع هدف نیز از جمع هزینه تصمیمات مرحله اول $(c^T x)$ و هزینه تصمیمات مرحله دوم $(\Phi(x))$ به دست می آید. در مسئله برنامه ریزی احتمالی با بازگشت کامل و غیر کامل برای اشتراک بین این دو مجموعه داریم:

۱- اشتراک دو مجموعه X_1 و X_2 در $X_1 \cap X_2 = X_1$، **مسائل با بازگشت کامل** است.

۲- اشتراک دو مجموعه X_1 و X_2 در $X_1 \cap X_2 \subset X_1$، **مسائل با بازگشت غیر کامل** است.

بنابراین، برنامه معادل قطعی رابطه (۱) با فرض گسسته بودن متغیر تصادفی، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\operatorname{Min} z(x) = c^T x + \sum_{s=1}^{S} p_s \mathcal{Q}(x, \xi_s)$$

$$\text{s.t.} \qquad Ax = b$$

$$T_s x + w_s y_s = h_s$$

$$x \ge 0, y_s \ge 0$$

در این رابطه فرض می کنیم، ξ گسسته و تابعی از s در نظر گرفته می شود؛ $s=۱,۲,\ldots,S$ مجموعه متناهی از سناریوهای ممکن است، به طوری که هر سناریو بیانگر حالتی از پارامترهای تصادفی است؛ احتمال وقوع s امین ξ برابر با p_s در نظر گرفته می شود $\left(\sum_{s=1}^{S} p_s = 1\right)$.

قضیه ۲: برای یک ξ معین، تابع مقدار $\mathcal{Q}(x,\xi)$:

۱- یک تابع محدب خطی تکه ای برحسب (h,T) است.

۲- یک تابع محدب خطی تکه ای برحسب (q) است.

۳- یک تابع محدب خطی تکه ای در x برای همه $x \in X_2$ است.

۴- وقتی ξ یک متغیر تصادفی گسسته متناهی باشد، $\Phi(x)$ بر روی X_2، محدود و خطی تکه ای خواهد بود.

مثال ۲: مسئله کشاورز

کشاورزی می خواهد برای کشت زمین خود با هدف حداکثرسازی سود حاصل از فروش محصولات، برنامه ریزی کند. این کشاورز می تواند سه نوع محصول گندم، ذرت و چغندر قند را کشت کند. مساحت زمین کشاورزی ۵۰۰ هکتار است و کشاورز برای مصرف سالانه خود حداقل به ۲۰۰ تن گندم و ۲۴۰ تن ذرت نیاز دارد که می تواند آن را کشت **یا** از عمده فروش خریداری کند. قیمت خرید و فروش هر تن گندم به ترتیب ۲۳۸ و ۱۷۰ دلار در هر تن و قیمت خرید و فروش ذرت نیز به ترتیب ۲۱۰ و ۱۵۰ دلار در هر تن است. قیمت فروش هر تن چغندرقند تا ۶ هزار تن ۳۶ دلار و به ازای هر تن مازاد ۱۰ دلار است. میانگین برداشت مورد انتظار از هر هکتار برای گندم، ذرت و چغندر قند به ترتیب ۲/۵، ۳ و ۲۰ تن است. همچنین هزینه کشت محصولات برای هر هکتار گندم، ذرت و چغندرقند به ترتیب ۱۵۰، ۲۳۰ و ۲۶۰ دلار است. این اطلاعات در جدول (۲) نیز آورده شده است.

جدول (۲) اطلاعات مسئله تخصیص زمین کشاورزی

	گندم	ذرت	چغندرقند
برداشت مورد انتظار (هکتار/تن)	۲/۵	۳	۲۰
هزینه کشت (هکتار/دلار)	۱۵۰	۲۳۰	۲۶۰
قیمت فروش (تن/دلار)	۱۷۰	۱۵۰	۳۶ دلار برای زیر ۶ هزار تن و ۱۰ دلار برای بالای ۶ هزار تن
قیمت خرید (تن/دلار)	۲۳۸	۲۱۰	-
حداقل مورد نیاز (تن)	۲۰۰	۲۴۰	-
کل زمین کشاورزی موجود: ۵۰۰ هکتار			

متغیرهای تصمیم این مسئله به صورت زیر هستند:

X_1: مساحت زمینی که به کشت **گندم** (برحسب هکتار) اختصاص داده شده است.

X_2: مساحت زمینی که به کشت **ذرت** (برحسب هکتار) اختصاص داده شده است.

X_3: مساحت زمینی که به کشت **چغندرقند** (برحسب هکتار) اختصاص داده شده است.

w_1: میزان گندم فروخته شده (بر حسب تن).

y_1: میزان گندم خریداری شده (بر حسب تن).

w_2: میزان ذرت فروخته شده (بر حسب تن).

y_2: میزان ذرت خریداری شده (بر حسب تن).

w_3: میزان چغندر قند فروخته شده با قیمت ۳۶ دلار در هر تن.

w_4: میزان چغندرقند فروخته شده با قیمت ۱۰ دلار در هر تن.

برنامه ریزی دو مرحله ای قطعی این مسئله را به صورت زیر فرموله می کنیم و آن را **مدل اول** می نامیم.

$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\
& 2.5x_1 + y_1 - w_1 \ge 200, \\
& 3.0x_2 + y_2 - w_2 \ge 240, \\
& w_3 + w_4 \le 20x_3, \\
& w_3 \le 6000, \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

جواب بهینه این مدل در جدول (۳) آورده شده است.

جدول (۳) جواب بهینه مسئله کشاورز

	گندم	ذرت	چغندرقند
سطح زیر کشت (هکتار)	۱۲۰	۸۰	۳۰۰
برداشت محصول (تن)	۳۰۰	۲۴۰	۶۰۰۰
مقدار فروش (تن)	۱۰۰	–	۶۰۰۰
مقدار خرید (تن)	–	–	–
سود کل: ۱۱۸۶۰۰ دلار			

تعریف سناریوها

کشاورز بر اساس تجربه می داند که هر ساله با یکی از شرایط **خوب**، **متوسط** و **بد** رو به رو خواهد بود. در سال خوب، تولید هر محصول ۲۰ درصد نسبت به حالت متوسط افزایش می یابد و در سال بد کشاورزی نیز ۲۰ درصد نسبت به حالت متوسط با کاهش بازدهی در تولید روبه رو است. از این رو، برای مدل سازی مسئله **سه سناریو** خواهیم داشت:

سناریو ۱ (سال خوب): بازدهی ۲۰ درصد بیشتر از حالت متوسط. در این سناریو، مقدار بازدهی گندم، ذرت و چغندر قند که تنها پارامترهای نامشخص مسئله بودند، به ترتیب از ۲/۵، ۳ و ۲۰ به ۳، ۳/۶ و ۲۴ تغییر می یابد. بنابراین، برای مسئله سناریو ۱، **مدل دوم** به صورت زیر می شود:

$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 +$$
$$210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 500,$$
$$3x_1 + y_1 - w_1 \ge 200,$$
$$3.6x_2 + y_2 - w_2 \ge 240,$$
$$w_3 - w_4 \le 24x_3,$$
$$w_3 \le 6000,$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0$$

سناریو۲ (سال متوسط): بازدهی به اندازه حالت متوسط. مدل مسئله این سناریو، همان **مدل اول** خواهد بود.

سناریو ۳ (سال بد): بازدهی ۲۰ درصد کمتر از حالت متوسط. در این سناریو، مقدار بازدهی گندم، ذرت و چغندر قند از ۲/۵، ۳ و ۲۰ به ۲، ۲/۴ و ۱۶ تغییر می یابد. در این حالت، **مدل سوم** را خواهیم داشت:

$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 +$$
$$210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 500,$$
$$2x_1 + y_1 - w_1 \ge 200,$$
$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \ge 240,$$
$$w_3 - w_4 \le 16x_3,$$
$$w_3 \le 6000,$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0$$

جواب بهینه مسئله در سناریوی متوسط قبلا محاسبه شد و اطلاعات آن در جدول ۳ موجود است. جواب بهینه مسئله در صورت وقوع سناریوی خوب و بد نیز محاسبه و در جدول های ۴ و ۵ آورده شده است.

توجه: دقت کنید که تفاوت در سناریوهای خوب و بد با مدل سناریوی متوسط، در مقدار بازدهی هر یک از محصولات سه گانه است.

جدول ۴ - جواب بهینه مسئله کشاورز در **سناریوی خوب**

	گندم	ذرت	چغندرقند
سطح زیر کشت (هکتار)	۱۸۳/۳۳	۶۶/۶۷	۲۵۰
برداشت محصول (تن)	۵۵۰	۲۴۰	۶۰۰۰
مقدار فروش (تن)	۳۵۰	-	۶۰۰۰
مقدار خرید (تن)	-	-	-
سود کل: ۱۶۷۴۴۷ دلار			

جدول ۵ - جواب بهینه مسئله کشاورز در **سناریوی بد**

	گندم	ذرت	چغندرقند
سطح زیر کشت (هکتار)	۱۰۰	۲۵	۳۷۵
برداشت محصول (تن)	۲۰۰	۶۰	۶۰۰۰
مقدار فروش (تن)	-	-	۶۰۰۰
مقدار خرید (تن)	-	۱۸۰	-
سود کل: ۵۹۹۵۰ دلار			

برنامه ریزی احتمالی مبتنی بر سناریو

برای مدل برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای مبتنی بر سناریو، مقادیر مربوط سطح زیر کشت به عنوان متغیرهای تصمیم مرحله اول و مقادیر مربوط به خرید و فروش هر محصول را به عنوان متغیرهای تصمیم مرحله دوم تعریف می کنیم. متغیرهای تصمیم مرحله دوم به صورت زیر تعریف می شوند:

- ✓ مقادیر مربوط به فروش محصول i در $W_{is} \quad i=1,2,3,4, \quad s=1,2,3$
- ✓ مقادیر مربوط به خرید محصول j در $y_{js} \quad j=1,2, \quad s=1,2,3$

با توضیحات بالا، برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای مسئله کشاورز را فرموله می کنیم و آن را **مدل چهارم** می نامیم و به صورت زیر بیان می کنیم.

$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3$$
$$-\frac{1}{3}(170w_{11} - 238_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 26w_{31} + 10w_{41})$$
$$-\frac{1}{3}(170w_{12} - 238_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 26w_{32} + 10w_{42})$$
$$-\frac{1}{3}(170w_{13} - 238_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 26w_{33} + 10w_{43}),$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 500,$$
$$3x_1 + y_{11} - w_{11} \ge 200,$$
$$3.6x_2 + y_{21} - w_{21} \ge 240,$$
$$w_{31} + w_{41} \le 24x_3,$$
$$w_{31} \le 6000,$$

مدل چهارم

$$2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \ge 200,$$
$$3x_2 + y_{22} - w_{22} \ge 240,$$
$$w_{32} + w_{42} \le 20x_3,$$
$$w_{32} \le 6000,$$
$$2x_1 + y_{13} - w_{13} \ge 200,$$
$$2.4x_2 + y_{23} - w_{23} \ge 240,$$
$$w_{33} + w_{43} \le 16x_3,$$
$$w_{33} \le 6000,$$
$$x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} \ge 0, s = 1, 2, 3,$$

جواب بهینه برنامه احتمالی بالا در جدول ۶ آورده شده است.

جدول ۶ - جواب بهینه برنامه احتمالی مسئله کشاورز

		گندم	ذرت	چغندرقند
متغیر مرحله اول	سطح زیر کشت (هکتار)	۱۷۰	۸۰	۲۵۰
سناریوی اول (خوب)	برداشت محصول (تن)	۵۱۰	۲۸۸	۶۰۰۰
	مقدار فروش (تن)	۳۱۰	۴۸	۶۰۰۰
	مقدار خرید (تن)	-	-	-
سناریوی دوم (متوسط)	برداشت محصول (تن)	۴۲۵	۲۴۰	۵۰۰۰
	مقدار فروش (تن)	۲۲۵	-	۵۰۰۰
	مقدار خرید (تن)	-	-	-
سناریوی سوم (بد)	برداشت محصول (تن)	۳۴۰	۱۹۲	۴۰۰۰
	مقدار فروش (تن)	۱۴۰	-	۴۰۰۰
	مقدار خرید (تن)	-	۴۸	-
سود کل: ۱۰۸۳۹۰ دلار				

ارزیابی جواب های برنامه ریزی احتمالی

ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل

همان طور که گفته شد در روش احتمالی، تصمیمات مرحله اول (یا متغیر تصمیم x)، قبل از مشخص شدن مقدار هر یک از پارامترهای عدم اطمینان گرفته می شوند. سپس در هر یک از سناریوها، تصمیمات مرحله دوم گرفته می شود. بنابراین، مجموعه ای از جواب ها را خواهیم داشت که تصمیمات مرحله اول آن ها مشترک و تصمیمات مرحله دوم متفاوت اند. مهم ترین مشکل این روش، افزایش اندازه مسئله به دلیل تصمیمات متفاوت مرحله دوم است که باعث بالا رفتن تعداد متغیرها می شود. برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای به روش **اینجا و اکنون** یا **Here and Now** معروف است. مقدار بهینه روش اینجا و اکنون (جدول ۶) برای مسئله کشاورز را به صورت زیر می نویسیم:

$$z_{HN} = 108390$$

در مسئله برنامه ریزی کشاورز، فرض کنید کشاورز بداند در سال آینده با چه سناریویی رو به رو خواهد بود؛ در این صورت، کشاورز در سناریوی اول، دوم و سوم به ترتیب بر اساس جواب بهینه مدل های قطعی دوم، اول و سوم کشت خواهد کرد؛ در نتیجه، با این فرض، کشاورز به تعداد سناریوها، طرح کشت خواهد داشت؛ در این صورت، مقدار سود بهینه در این سه سناریو به ترتیب، ۱۱۸۶۰۰، ۱۶۷۶۶۷ و ۵۹۹۵۰ دلار خواهد بود و میانگین سود مدل های برنامه ریزی قطعی متناظر با این سه سناریو، $118600\times\frac{1}{3}+167667\times\frac{1}{3}+59950\times\frac{1}{3} =$ ۱۱۵۴۰۶ دلار است.

در این روش، که به روش **صبر و مشاهده** یا **Here and Now** معروف است، فرض می کنیم که آینده قطعی است و اطلاعات کاملی در مورد آن داریم. مقدار بهینه این روش را به صورت زیر می نویسیم:

$$z_{ws} = 115406$$

این مقدار از مقدار حاصل از مدل برنامه ریزی احتمالی (۱۰۸۳۹۰ دلار) به میزان ۷۰۱۶ دلار بیشتر است. بنابراین، در صورت اینکه کشاورز بداند طی سال آینده با چه وضعیت آب و هوایی روبه رو خواهد بود، در

مقایسه با حالتی که نداند، سود حاصله ۷۰۱۶ دلار بیشتر خواهد شد. این مقدار، **ارزش مورد انتظار اطلاعات کامل** (**EVPI**) نامیده می شود، بزرگ بودن این مقدار نشان می دهد که تا چه میزان کمبود اطلاعات بر روی نتایج مدل تأثیرگذار است، در نتیجه استفاده از برنامه ریزی احتمالی را با اهمیت می کند.

ارزش برنامه ریزی احتمالی

در سه مدل قطعی اول، دوم و سوم که هر یک متناظر با یک سناریو بود، در هر سناریو سطح زیر کشت متفاوتی به کشاورز ارائه می شد. چنانچه در مسئله کشاورز، مقدار متوسط بازدهی هر سه محصول را محاسبه کنیم و در مدل قطعی از مقدار متوسط بازدهی استفاده کنیم، **مدل قطعی پنجم** را برای محاسبه سطح زیر کشت محصولات خواهیم داشت:

مدل پنجم

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - \\
&\qquad 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4, \\
&\text{s.t.} \qquad x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\
&\frac{1}{3}(3+2.5+2)x_1 + y_1 - w_1 \ge 200, \\
&\qquad \frac{1}{3}(3.6+3+2.4)x_2 + y_2 - w_2 \ge 240, \\
&\qquad\qquad w_3 + w_4 \le \frac{1}{3}(24+20+16)x_3, \\
&\qquad\qquad w_3 \le 6000, \\
&x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

با حل مدل بالا، سطح زیر کشت بهینه گندم، ذرت و چغندرقند به ترتیب ۱۲۰، ۸۰ و ۳۰۰ می شود. دقت کنید که در این مدل که از مقدار متوسط برای پارامترهای مسئله استفاده شده بود، مقدار پارامترها (بازدهی هر محصول) دقیقا برابر با مقدار پارامترها در سناریوی متوسط یعنی ۲/۵، ۳ و ۲۰ شد، از این رو، جواب حاصل از مدل پنجم با مدل اول یکسان است؛ حال، یک بار دیگر مدل های دوم، اول و سوم را

حل می کنیم، با این تفاوت که در هر مدل، مقدار سطح زیر کشت گندم، ذرت و چغندر قند را برابر با جواب بهینه حاصل از مدل پنجم، یعنی به ترتیب ۱۲۰، ۸۰ و ۳۰۰ قرار می دهیم. در این صورت، در سناریوی خوب، متوسط و بد، به ترتیب **مدل های ششم، هفتم و هشتم** را خواهیم داشت:

مدل ششم

$$\begin{aligned}
\text{Min } z = {} & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 \\
& -170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4, \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\
& 3x_1 + y_1 - w_1 \ge 200, \\
& 3.6x_2 + y_2 - w_2 \ge 240, \\
& w_3 + w_4 \le 24x_3, \\
& w_3 \le 6000, \\
& x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300, \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

مدل هفتم

$$\begin{aligned}
\text{Min } z = {} & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 \\
& -170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4, \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\
& 2.5x_1 + y_1 - w_1 \ge 200, \\
& 3x_2 + y_2 - w_2 \ge 240, \\
& w_3 + w_4 \le 20x_3, \\
& w_3 \le 6000, \\
& x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300,
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

$$\text{Min } z = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1$$
$$-170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4,$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,$$
$$2x_1 + y_1 - w_1 \geq 200,$$
$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,$$
$$w_3 + w_4 \leq 16x_3,$$
$$w_3 \leq 6000,$$
$$x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300,$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

مدل هشتم

سود کسب شده در سناریوی خوب (مدل ششم)، ۱۴۸ هزار دلار، در سناریوی متوسط (مدل هفتم) ۱۱۸۶۰۰ و در سناریوی بد (مدل هشتم)، ۵۵۱۲۰ دلار خواهد بود. میانگین سود حاصل از این سه مدل برنامه ریزی قطعی، برابر با $\frac{1}{3}\times148000+\frac{1}{3}\times118600+\frac{1}{3}\times55120=$ ۱۰۷۲۴۰ دلار می شود؛ در این روش، که به روش **مقدار متوسط** یا **(EV)** معروف است، مدل ساز به دلایلی همچون هزینه بر بودن مدل سازی با اطلاعات تصادفی یا عدم دسترسی به اطلاعات کامل، ترجیح می دهد از مقدار میانگین این اطلاعات استفاده کند. مقدار بهینه این روش را به صورت زیر می نویسیم:

$$z_{EV} = 107240$$

که از میزان به دست آمده با مدل احتمالی ($z_{HN} = 108390$)، ۱۱۵۰ دلار کمتر است. مقدار اختلاف بین این دو روش، **ارزش جواب تصادفی** **(VSS)** خوانده می شود. این مقدار نشان می دهد که با استفاده از جواب مرحله یک حاصل از مدل احتمالی به جای استفاده از جواب مرحله یک مدل قطعی، تا چه میزان می

توان مقدار جواب بهینه را بهبود بخشید.

نکته: در یک مسئله حداکثرسازی، همواره رابطه زیر بین مقدار جواب بهینه حاصل از این سه روش وجود دارد:

$$z_{EV} \leq z_{HN} \leq z_{ws}$$

مثال ۳: مسئله کشاورز با تصمیمات مرحله دوم گسسته

در مسئله کشاورز، فرض کنید به دلیل بالا بودن هزینه های حمل و نقل، بعد از خرید و فروش، این محصولات فقط با کامیون هایی با ظرفیت ۱۰ تن حمل می شود؛ از این رو، امکان خرید و فروش و حمل فقط به میزان مضاربی از ۱۰ امکان پذیر است. بنابراین، این مسئله باید به صورت یک برنامه احتمالی دو مرحله ای که متغیرهای مرحله دوم آن **عدد صحیح** هستند، مدل سازی شود.

حل:

برای مدل سازی مسئله کشاورز در این شرایط، متغیرهای تصمیم مرحله اول، یعنی سطح زیر کشت هر یک از محصولات گندم (x_1)، ذرت (x_2) و چغندرقند (x_3)، به همان صورت در نظر گرفته می شوند. متغیرهای مرحله دوم نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

تعریف متغیر	نمایش متغیر
تعداد خرید کامیون های گندم در سناریو **s**	$y_{1s}, \quad s = 1,2,3$
تعداد فروش کامیون های گندم در سناریو **s**	$w_{1s}, \quad s = 1,2,3$
تعداد خرید کامیون های ذرت در سناریو **s**	$y_{2s}, \quad s = 1,2,3$
تعداد فروش کامیون های ذرت در سناریو **s**	$w_{2s}, \quad s = 1,2,3$

تعداد فروش کامیون های چغندر قند به قیمت ۳۶ دلار /تن در سناریو **s**	$w_{3s}, \quad s=1,2,3$
تعداد فروش کامیون های چغندرقند به قیمت ۱۰ دلار/ تن در سناریو **s**	$w_{4s}, \quad s=1,2,3$

روشن است که فقط متغیرهای خرید و فروش چغندرقند تغییر پیدا کرده اند. در این صورت، متغیرهای x_1، x_2 و x_3 پیوسته و نامنفی و متغیرهای y_{1s}، y_{2s}، w_{1s}، w_{2s}، w_{3s} و w_{4s} عدد صحیح خواهند بود.

حال، برنامه ریزی احتمالی دو مرحله ای مسئله کشاورز را فرموله می کنیم:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Min} z = {} & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\
& -\frac{1}{3}\times 10\left(170w_{11} - 238_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 36w_{31} + 10w_{41}\right) \\
& -\frac{1}{3}\times 10\left(170w_{12} - 238_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 36w_{32} + 10w_{42}\right) \\
& -\frac{1}{3}\times 10\left(170w_{13} - 238_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 36w_{33} + 10w_{43}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\
& 3x_1 + 10y_{11} - 10w_{11} \ge 200, \\
& 3.6x_2 + 10y_{21} - 10w_{21} \ge 240, \\
& 10w_{31} + 10w_{41} \le 24x_3, \\
& 10w_{31} \le 6000, \\
& 2.5x_1 + 10y_{12} - 10w_{12} \ge 200, \\
& 3x_2 + 10y_{22} - 10w_{22} \ge 240, \\
& 10w_{32} + 10w_{42} \le 20x_3, \\
& 10w_{32} \le 6000, \\
& 2x_1 + 10y_{13} - 10w_{13} \ge 200, \\
& 2.4x_2 + 10y_{23} - 10w_{23} \ge 240, \\
& 10w_{33} + 10w_{43} \le 16x_3, \\
& 10w_{33} \le 6000, \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} \ge 0, \text{integer } s=1,2,3,
\end{aligned}
$$

مدل نهم

جواب بهینه برنامه احتمالی بالا در جدول ۸ آورده شده است.

جدول ۸ - جواب بهینه برنامه ریزی احتمالی عدد صحیح مسئله کشاورز برای مدل نهم

		گندم	ذرت	چغندرقند
متغیر مرحله اول	سطح زیر کشت (هکتار)	۳۹۰	۸۳/۳۳	۲۶/۵
سناریوی اول (خوب)	برداشت محصول (۱۰ تن)	۱۱۷۰	۳۰۰	۶۳۶
	مقدار فروش (۱۰ تن)	۹۷	۶	۶۰
	مقدار خرید (۱۰ تن)	-	-	۳
سناریوی دوم (متوسط)	برداشت محصول (تن)	۹۷۵	۲۵۰	۵۳۰
	مقدار فروش (تن)	۷۷	۱	۵۳
	مقدار خرید (تن)	-	-	-
سناریوی سوم (بد)	برداشت محصول (تن)	۷۸۰	۲۰۰	۴۲۴
	مقدار فروش (تن)	۵۸	-	۴۲
	مقدار خرید (تن)	-	۴	-
سود کل: ۶۶۳۱۰ دلار				

برنامه ریزی احتمالی چند مرحله ای با بازگشت

مدل دو مرحله ای که در قسمت های قبل به آن پرداختیم، یک مورد خاص از یک ساختار عمومی تر به نام مدل برنامه ریزی احتمالی چند مرحله ای است که در آن متغیرهای تصمیم و محدودیت ها به گـروه هـایی متناظر با مراحل $t=۱,۲,\dots,H$ تقسیم می شوند. در واقع، اکثر مسائل تصمیم گیری یک توالی از تصمیمات دارند که طی زمان ظاهر می شوند؛ این تصمیمات باید طی **چندین مرحله متوالی** گرفته شوند. در اولـین مرحله تصمیمات گرفته می شود و تصمیمات مراحل بعدی روی تصمیمات مراحل **قبلی** تأثیر مـی گذارنـد. در این قسمت، رویکرد برنامه ریزی احتمالی مسائل چند مرحله ای را بررسی خـواهیم کـرد. برنامـه خطـی احتمالی چندمرحله ای با بازگشت ثابت به فرم زیر است:

$$\operatorname{Min} z = c^1x^1 + E_{\xi^2}\left[\operatorname{Min} c^2(\omega)x^2(\omega^2) + \dots + E_{\xi^H}\left[\operatorname{Min} c^H(\omega)x^H(\omega^H)\right]\dots\right]$$

$$\text{s.t.} \qquad w^1x^1 = h^1,$$

$$T^1(\omega^2)x^1 + w^2x^2(\omega^2) = h^2(\omega)$$

$$T^2(\omega^3)x^2(\omega^2) + w^3x^3(\omega^3) = h^3(\omega)$$

$$\dots\vdots$$

$$T^{H-1}(\omega^H)x^{H-1}(\omega^{H-1}) + w^Hx^H(\omega^H) = h^H(\omega)$$

$$x^1 \ge 0, x^t(\omega^t) \ge 0 \quad t = 2,\dots,H$$

بردار c^1 و h^1 مشخص و به ترتیب دارای n_1 و m_1 مؤلفه انـد. هـر w^1 یـک مـاتریس $m_1 \times n_1$ مؤلفـه ای مشخص و شناخته شده یا داده شده است. برای هر ω در هـر دوره، $T^{t-1}(\omega)$ ماتریسـی $m_t \times n_{t-1}$ بعـدی، $c^t(\omega)$ برداری با n_1 مؤلفه و $h^t(\omega)$ برداری با m_t مولفه است. با کنار هم قرار دادن اجزاء احتمالی مسئله برای هر مرحله، به یک بـردار از پارامترهـای تصـادفی $\xi^t(\omega)^T = \left(c^t(\omega), h^t(\omega)^T, T_1^{t-1}(\omega), \dots, T_{m_t}^{t-1}\right)$ بـا $N_t = n_t +_t + (m_t \times n_{t-1})$ مؤلفه می رسیم.

همانند مدل دومرحله ای، تصمیمات (x) به تاریخچه فرایند تا زمان t وابسته اسـت. هـر بـردار تصـمیم x^t

ممکن است به اطلاعاتی که تا زمان t در دسترس هستند وابسته باشد، ولی به مشاهداتی که در مراحل بعد انجام می شود، بستگی ندارد.

برنامه ریزی با قیود احتمالی

در رویکرد بازگشتی در برنامه ریزی احتمالی باید تصمیم گیرنده به گونه ای هزینه فعالیت های بازگشت را تعیین کند که از موجه بودن مسئله مرحله دوم اطمینان حاصل شود. در اصل، فلسفه این رویکرد این است که **همه** قیود باید در همه پارامترهای عدم اطمینان **موجه باقی بمانند**. این رویکرد روی حداقل سازی متوسط هزینه های بازگشت تمرکز می یابد.

برنامه ریزی با قیود شانسی، که کارناس و کوپر در سال ۱۹۵۹ توسعه داده اند، بر روی قابلیت اطمینان سیستم تمرکز دارد، یعنی توانایی سیستم برای موجه بودن در یک محیط عدم اطمینان. این قابلیت اطمینان به صورت یک حداقل الزام در مورد احتمال ارضای محدودیت ها خواهد بود. از این رو، در این نوع برنامه ریزی، **هر محدودیت باید با یک درصد مشخصی موجه** باشد. در نسخه معمول این نوع برنامه ریزی، متغیرهای تصادفی مستقل از هم و فقط سمت راست محدودیت ها، احتمالی در نظر گرفته می شوند.

نکته: در برنامه ریزی با محدودیت های احتمالی، تصادفی بودن سمت چپ محدودیت ها را به دلیل مشکل حل فرم غیر خطی به سختی می توان بررسی کرد. محدودیت های شانسی که سمت چپ و راست آن ها به صورت هم زمان تصادفی هستند، نیز به همین صورت است.

برنامه ریزی با قیود شانس بر حسب ارتباط بین محدودیت های شانس مدل به دو صورت مدل های با محدودیت های مشترک یا محدودیت های جدا از هم، می توانند باشند:

۱. **محدودیت های شانس مشترک** به صورت $\Pr\left(g_i\left(x,\xi\right)\geq 0\left(i=1,\dots,n\right)\right)\geq p$ است.

۲. **محدودیت های شانس مجزا**. این محدودیت ها به صورت $\Pr\left(g_i\left(x,\xi\right)\geq 0\right)\geq p_i\left(i=1,\dots,n\right)$ هستند.

در یک برنامه ریزی خطی، وقتی پارامترهای تکنولوژی سمت چپ محدودیت ها (ξ_{ij}) به صورت تصادفی با توزیع نرمال باشد، محدودیت های متناظر با احتمال $(1-p_i)$ برقرار خواهند بود. مدل برنامه ریزی احتمالی با محدودیت های تصادفی سمت چپ با محدودیت های مجزا به صورت زیر فرموله می شود:

$$\operatorname{Min} z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t. } \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} x_j \geq b_i\right) \geq 1-p_i,\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\xi \approx N\left(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2\right) \forall ij$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

در این رابطه، z تابع هدف خطی، x_j متغیر تصمیم، b_i و c_j پارامترهای مشخص و ξ_{ij} پارامتر نامشخص و غیرقطعی هستند.

همچنین با فرض محدودیت های مشترک، برنامه ریزی با محدودیت های احتمالی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\operatorname{Min} z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t. } \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} x_j \geq b_i\right) \geq 1-p_i,\ i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \leq p$$

$$\xi \approx N\left(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2\right) \forall ij$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

۱-p، سطح احتمال مشترکی است که کل مجموعه محدودیت های عدم اطمینان باید در آن سطح ارضا شوند. این مدل یک برنامه ریزی غیر خطی بوده که حل آن با الگوریتم های ریاضی سخت است.

برای هر i، با فرض استقلال متغیر تصادفی ξ_{ij}، عبارت $Z_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} x_j$ را تعریف می کنیم به طوری که $\mu_i = E(Z_i)$ و $\sigma_i = \sqrt{Var(Z_i)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma^2(\xi_{ij}) x_j^2}$ به ترتیب میانگین و انحراف معیار آن برای هر i هستند. با توجه به اینکه برای هر i، متغیرهای تصادفی ξ_{ij} دارای توزیع نرمال و مستقل هستند و سپس داریم:

$$\Pr(Z_i \ge b_i) = 1 - \Pr(Z_i < b_i) = 1 - \Pr\left(\frac{Z_i - \mu_i}{\sigma_i} < \frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_i - b_i}{\sigma_i}\right) \ge 1 - p_i$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt$، تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال **استاندارد** است؛ بنابراین، $\Pr(Z_i \ge b_i) \ge 1 - p_i$ معادل $\Phi\left(\frac{\mu_i - b_i}{\sigma_i}\right) \ge 1 - p_i$ است. در نتیجه با معکوس سازی هر دو طرف برای هر i داریم:

$$\frac{\mu_i - b_i}{\sigma_i} \ge \Phi^{-1}(1 - p_i)$$

که معادل است با:

$$\mu_i - \Phi^{-1}(1 - p_i)\sigma_i \ge b_i$$

و یا

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} x_j - \Phi^{-1}(1 - p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma^2(\xi_{ij}) x_j^2\right)} \ge b_i$$

Φ^{-1} تابع توزیع تجمعی معکوس متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، عبارت $\Phi^{-1}(1 - p_i)\sigma_i$ به صورت مقدار **ایمنی** محدودیت قابل تفسیر است.

نکته: برای محدودیت های شانسی که فقط سمت راست **یا** سمت چپ و راست آن ها به صورت همزمان تصادفی باشند، نیز به همین صورت عمل می کنیم. همچنین با فرض عدم استقلال متغیرهای تصادفی رابطه

بالا را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}x_j-\Phi^{-1}(1-p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma^2(\xi_{ij})x_j^2\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}Cov(\xi_{ij},\xi_{ik})x_ix_k}\geq b_i$$

$$\sigma(Z_i)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma^2(\xi_{ij})x_j^2+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}cov(\xi_{ij},\xi_{ik})x_ix_k}$$

مثال ۴: مسئله با قیود احتمالی زیر را به فرم قطعی تبدیل و آن را حل کنید:

$$Min\, z=7x_1+5x_2+2x_3,$$

$$s.t.\, Pr(\xi_{11}x_1+\xi_{12}x_2+\xi_{13}x_3\geq 52)\geq 1-p_1,$$

$$Pr(\xi_{21}x_1+\xi_{22}x_2+\xi_{23}x_3\geq 32)\geq 1-p_2,$$

$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

حل:

فرض کنید $p_1=0.1$ و $p_2=0.05$ و متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر باشند:

$$E(\xi_{11})=3, E(\xi_{12})=1, E(\xi_{13})=8, \sigma^2(\xi_{11})=12, \sigma^2(\xi_{12})=25, \sigma^2(\xi_{13})=18$$

$$E(\xi_{21})=6, E(\xi_{22})=9, E(\xi_{23})=3, \sigma^2(\xi_{21})=8, \sigma^2(\xi_{22})=14, \sigma^2(\xi_{23})=12$$

با توجه به روابط بالا، مدل بالا را به یک مدل قطعی تبدیل می کنیم.

$$E(\xi_{11})x_1+E(\xi_{12})x_2+E(\xi_{13})x_3+$$

$$\Phi^{-1}(0.9)\sqrt{\sigma^2(\xi_{11})x_1^2+\sigma^2(\xi_{12})x_2^2+\sigma^2(\xi_{13})x_3^2}\geq 38$$

$$E(\xi_{21})x_1+E(\xi_{22})x_2+E(\xi_{23})x_3+$$

$$\Phi^{-1}(0.95)\sqrt{\sigma^2(\xi_{21})x_1^2+\sigma^2(\xi_{22})x_2^2+\sigma^2(\xi_{23})x_3^2}\geq 22$$

با توجه به جدول توزیع نرمال استاندارد، $\Phi^{-1}(0.9)$ و $\Phi^{-1}(0.95)$ به ترتیب برابر با ۱/۲۷۵ و ۱/۶۴۵ است،

بنابراین خواهیم داشت:

$$3x_1 + x_2 + 8x_3 + 1.275\sqrt{12x_1^2 + 25x_2^2 + 18x_3^2} \geq 38$$

$$6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 1.645\sqrt{8x_1^2 + 14x_2^2 + 12x_3^2} \geq 22$$

سپس، مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 7x_1 + 5x_2 + 2x_3, \\ &\quad \text{s.t. } 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 1.275\sqrt{12x_1^2 + 25x_2^2 + 18x_3^2} \geq 38, \\ &\qquad 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 1.645\sqrt{8x_1^2 + 14x_2^2 + 12x_3^2} \geq 22 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله فوق، یک برنامه ریزی غیرخطی است. برای حل این مـدل، روش هـای مختلفـی وجـود دارد کـه در **درس ۲۱ گروه آموزشی بهینه یاب**، روش های حل مدل فوق ارایه شده است.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**