درس ۲۶:

تولید متغیر تصادفی

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

مقدمه

این درس به شیوه‌هایی برای نمونه گیری از انواع توزیع‌های **پیوسته** و **گسسته‌ای** می‌پردازد که به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. بحث‌ها و مثال‌های پیشین از سیستم‌های صف، بر فایده توزیع‌های آماری برای مدل سازی فعالیت‌های دلالت داشته که عموما غیرقابل پیش بینی یا **غیرقطعی** است. مثلا، مدت‌های بین دو ورود و مدت‌های خدمت دهی در صف‌ها و تقاضا برای یک محصول اغلب ماهیتی غیرقابل پیش بینی دارند. معمولا، چنین متغیرهایی به صورت **متغیرهایی تصادفی** با توزیع آماری مشخص مدلسازی می‌شود و برای براورد پارامترهای توزیع فرضی و **آزمودن اعتبار** مدل آماری بدست آمده، شیوه‌های استاندارد آماری وجود دارد.

نکته: در این درس فرض می‌کنیم توزیع احتمال به طور کامل مشخص شده است و ما در جستجوی راه‌هایی به منظور تولید نمونه‌هایی از این توزیع برای استفاده به عنوان ورودی در مدل شبیه‌سازی هستیم.

در همه روش‌های این فصل فرض می‌کنیم که یک منبع اعداد تصادفی **یکنواخت** بین **صفر** و **یک** و **مستقل** که به صورت $R_1, R_2, \ldots$ نشان داده می‌شود، در دسترس است. برای هر یک از R_i، تابع توزیع احتمال

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \le x \le 1 \\ 0 & ,0 \le x \le 1 \end{cases}$$

و تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

است. در این فصل، $R_1, R_2, \ldots$ یا R معرف اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک و مستقل است.

روش تبدیل معکوس

در ادامه به تابع توزیع هایی می پردازیم که امکان یافتن تابع معکوس آن ها به سادگی مسیر است.

توزیع نمایی

توزیع نمایی دارای تابع توزیع احتمال یا تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر است:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

به دلیل این که امکان محاسبه تابع معکوس تابع توزیع تجمعی به صورت صریح وجود دارد، روش گام به گام روش تبدیل معکوس برای توزیع نمایی به صورت زیر می شود:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی نمایی متغیر تصادفی X را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

گام ۲: فرض کنید در دامنه X برقرار است.

گام ۳: معادله $R = F(X)$ را حل کنید تا X برحسب R بدست آید:

$$X = F^{-1}(R) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$$

گام ۴: اعداد تصادفی یکنواخت $R_1, R_2, R_3, \dots$ را تولید و مقادیر موردنظر را طبق رابطه زیر

$$X_i = F^{-1}(R_i)$$

محاسبه کنید.

تابع توزیع یکنواخت

یک متغیر تصادفی مانند X را در نظر بگیرید که در فاصله $[a,b]$ به طور **یکنواخت** توزیع شده است. برای تولید X به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$X = a + (b-a)R$$

تابع چگالی X به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & O/W \end{cases}$$

برای تولید اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت گام‌های زیر انجام می‌شود:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی یکنواخت به صورت زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

گام ۲: تساوی $F(X) = (X-a)/(b-a) = R$ را بنویسید.

گام ۳: حل X بر حسب R به رابطه $X = a + (b-a)R$ می‌آنجامد.

توزیع ویبول

در توزیع **ویبول**، هر گاه پارامتر **موقعیت** یا V برابر با **صفر** باشد، آنگاه تابع توزیع احتمال به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}}x^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} & ,x\ge 0\\ 0, & O/W\end{cases}$$

در تابع فوق، $\alpha>0$ و $\beta>0$ که به ترتیب پارامترهای **مقیاس** و **شکل** هستند. به منظور تولید هر مقدار تصادفی از توزیع ویبول، **گام‌های ۱** تا **۳** را به صورت زیر انجام می دهیم:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x)=1-e^{-(x/\alpha)^{\beta}},x\ge 0$$

گام ۲: فرض کنید $R=1-e^{-(x/a)^{\beta}}$ باشد.

گام ۳: حل X بر حسب R به نتیجه زیر می‌آنجامد:

$$X=\alpha\left[-\ln(1-R)\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

توزیع مثلثی

متغیر تصادفی مانند X را در نظر بگیرید که دارای تابع توزیع زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & O/W\end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی این توزیع به صورت زیر می‌شود.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\ge 0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0<x\le 1\\ 1-\dfrac{(2-x)^2}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

به ازای $0 \le X \le 1$ داریم:

$$R = \frac{X^2}{2}$$

به ازای $1 < X \le 2$ داریم:

$$R = 1 - \frac{(2-X)^2}{2}$$

اگر $0 \le X \le 1$ باشد چنین بر می‌آید که $0 \le R \le \frac{1}{2}$ که در این صورت $X = \sqrt{2R}$ است. اگر $1 < X \le 2$ باشد رابطه $\frac{1}{2} < R \le 1$ می‌شود که در این صورت داریم: $X = 2 - \sqrt{2(1-R)}$. بنابراین می‌توان تولید متغیر تصادفی براساس تابع توزیع **مثلثی** را به صورت زیر بیان کرد:

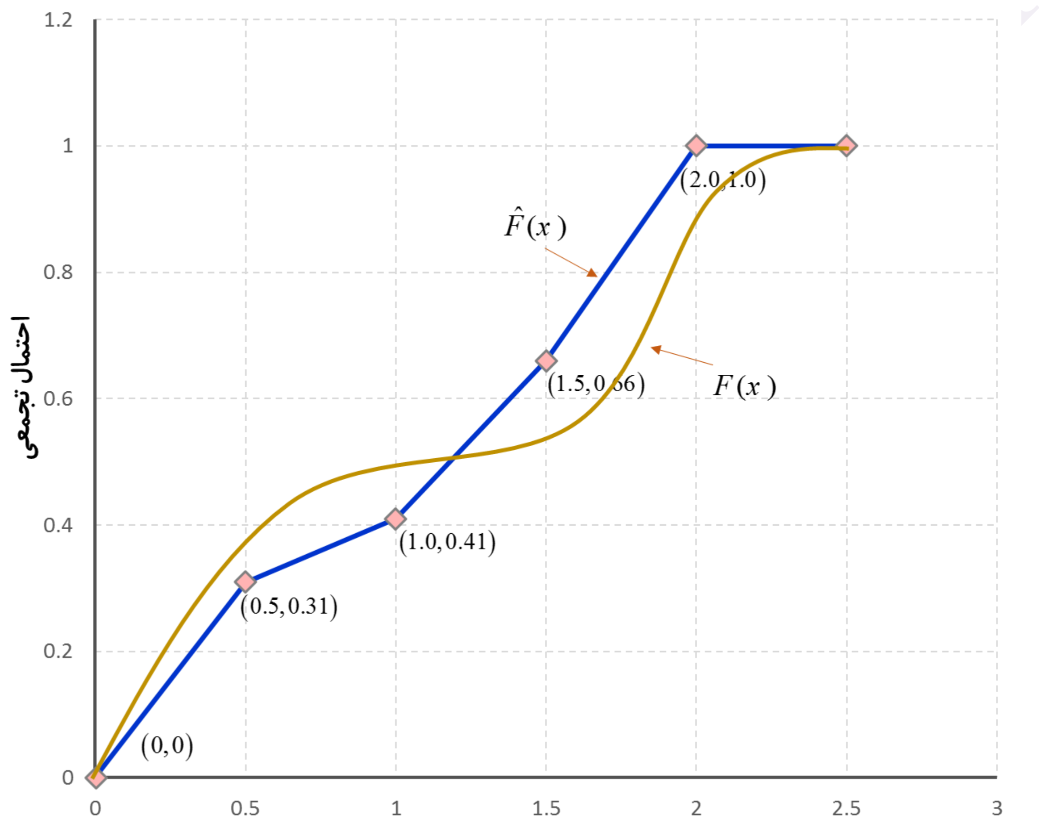
$$X = \begin{cases} \sqrt{2R}, & 0 \le R \le \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1-R)}, & \frac{1}{2} \le R \le 1 \end{cases}$$

توزیع‌های تجربی پیوسته

این امکان وجود دارد که مدلساز **نتواند** به توزیعی نظری به منظور ارایه مدل مناسبی برای داده‌های ورودی برسد. در این صورت استفاده از **توزیع تجربی** داده‌ها توصیه می‌شود. برای روشن شدن موضوع مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال: تصور کنید ۱۰۰ مورد مدت تعمیر نوعی ابزار شکسته گردآوری شده و داده‌ها بر حسب تعداد مشاهده در فواصل مختلف، در جدول زیر خلاصه شده است.

فاصله (ساعت)	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
$0 \le x \le 0.5$	۳۱	۰.۳۱	۰.۳۱
$0.5 < x \le 1.0$	۱۰	۰.۱	۰.۴۱
$1.0 < x \le 1.5$	۲۵	۰.۲۵	۰.۶۶
$1.5 < x \le 2.0$	۳۴	۰.۳۴	۱.۰۰



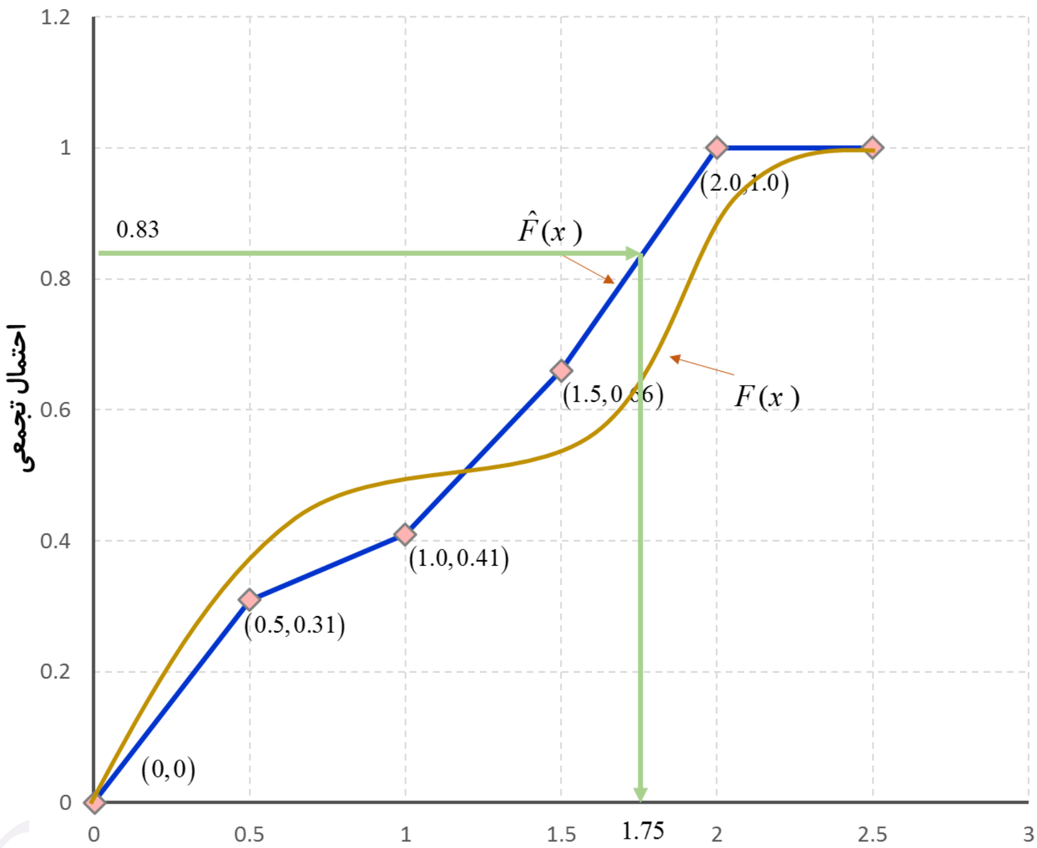
در شکل فوق، $F(x)$ توزیع واقعی و $\hat{F}(x)$ توزیع تجربی است. شکل حقیقی $F(x)$ **مجهول** است و همواره در عمل، مجهول خواهد ماند **مگر** تعداد نامحدودی داده در دسترس پذیر باشد. فرض بر این است که متغیر تصادفی X در مورد مدت‌های به صورت $X \ge 0$ صدق می‌کند. فرض کنید یک عدد تصادفی بین صفر و یک تولید می‌شود که برابر با $R_1 = 0.83$ است. عدد تصادفی X_1 که دارای توزیع تجربی داده شده است به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$X_1 = F^{-1}(R_1)$$

چون مقدار R_1 بین دو عدد ۰.۶۶ و ۱.۰ است، مقدار X_1 بـا **درون یابی خطی** مقـدار بـین ۱.۵ و ۲.۰ بدست می‌آید.

$$X_1 = 1.5 + \left[\frac{R_1 - 0.66}{1.0 - 0.66}\right](2.0 - 1.5) = 1.75$$

در شکل زیر، نمایش شماتیک برای محاسبه مقدار عدد تصادفی با توزیع تجربی داده شـده آورده شـده است.



تبدیل مستقیم در مورد توزیع نرمال

روش‌های بسیاری برای تولید تصادفی با **توزیع نرمال** به وجود آمده است. اما، روش **تبدیل معکـوس** کاربرد پذیر نیست، زیرا **نمی‌توان** معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال را از طریق تحلیلی محاسبه کرد. همان طور که می‌دانید، تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد به صورت زیر است:

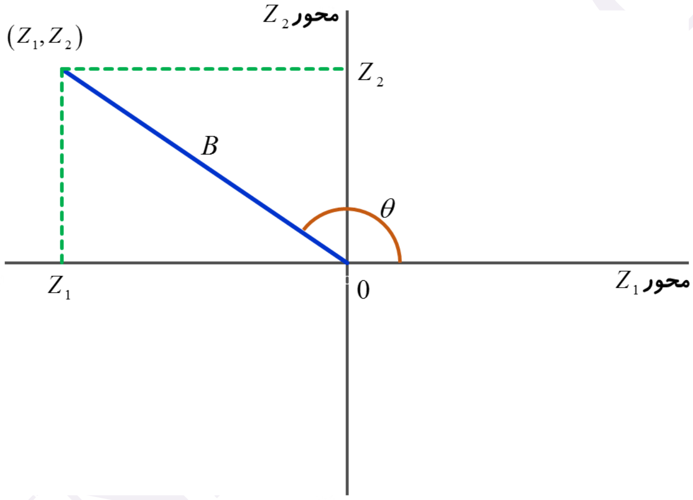
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \qquad -\infty < x < +\infty$$

برای تولید متغیر تصادفی با توزیع نرمال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد، Z_1 و Z_2، را در نظر بگیرید که از دو مقدار θ و B بدست می‌آید.

$$Z_1 = B\cos\theta$$
$$Z_2 = B\sin\theta$$

نمایش قطبی Z_1 و Z_2 به صورت زیر است.



روشن است $B^2 = Z_1^2 + Z_2^2$. می‌توان نشان داد که B^2 دارای **توزیع مربع کای** با **درجـــه آزادی دو** دارد. با این فرض می‌توان نشان داد که شعاع B به صورت زیر تعیین می‌شود(اثبات واگذار به خواننده).

$$B = \left(-2\ln R\right)^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به این که شعاع B و زاویه θ **مستقل** از هم هســتند. بـرای تولیـد دو مقـدار مسـتقل نرمـال استاندارد، Z_1 و Z_2 ، از دو عدد تصادفی مستقل R_1 و R_2 به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$Z_1 = \left(-2\ln R_1\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(2\pi R_2\right)$$
$$Z_2 = \left(-2\ln R_1\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(2\pi R_2\right)$$

روش پیچش

اگر یک تابع توزیع احتمال مجموع دو یا چند متغیر تصادفی مستقل باشد، با استفاده از **پیچش** می‌توان اعداد تصادفی با توزیع احتمال اولیه را بدست آورد. با استفاده از این روش می‌توان متغیر تصادفی با توزیع ارلنگ و با توزیع تقریبا نرمال را به دست آورد.

توزیع ارلنگ

هر متغیر تصادفی ارلنگ X با پارامترهای (k,θ)، **مجموع** K متغیر تصادفی مستقل **نمایی**، $X_i \left(i=1,\dots,K\right)$ ، هر یک با میانگین $\frac{1}{K\theta}$ است. یعنی داریم:

$$X = \sum_{i=1}^{K} X_i$$

می‌توان هر یک از متغیرهای تصادفی را با توجه به این که توزیع نمایی دارد، تولید کرد. در این صورت مقدار تصادفی ارلنگ به صورت زیر می‌شود:

$$X = \sum_{i=1}^{K} -\frac{1}{K\theta}\ln R_i = -\frac{1}{K\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{K} R_i\right)$$

نکته: از نظر کارایی بهتر است که ابتدا تمامی اعداد تصادفی را در هم ضرب کنیم و سپس فقط یک لگاریتم بگیریم.

تولید مقادیر تقریبا نرمال

قضیه حد مرکزی چنین می‌گوید که مجموع n متغیر تصادفی **مستقل** و **هم توزیع** $X_1,X_2,\dots,X_n$ هر یک با میانگین μ_X و واریانس σ_X^2 ، **تقریبا** توزیع نرمال با میانگین $n\mu_X$ و واریانس

$n\sigma_X^2$ دارد. با به کارگیری این قضیه در مورد متغیرهای تصادفی یکنواخت در فاصله **صفر** و **یک** که میانگین $\frac{1}{2}$ و واریانس $\frac{1}{12}$ دارند خواهیم داشت:

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}R_i-0.5n}{\left(\frac{n}{12}\right)^{0.5}}$$

رابطه فوق، **تقریبا** توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک دارد. هر چه مقدار n بزرگتر شود، تقریب مناسبتری خواهیم داشت. اما بسیاری از محققان عنوان می‌کنند که $n=12$ به عنوان تقریبی مناسب برای نرمال بودن **کافی** است. با قرار دادن $n=12$ در رابطه بالا داریم:

$$Z=\sum_{i=1}^{12}R_i-6$$

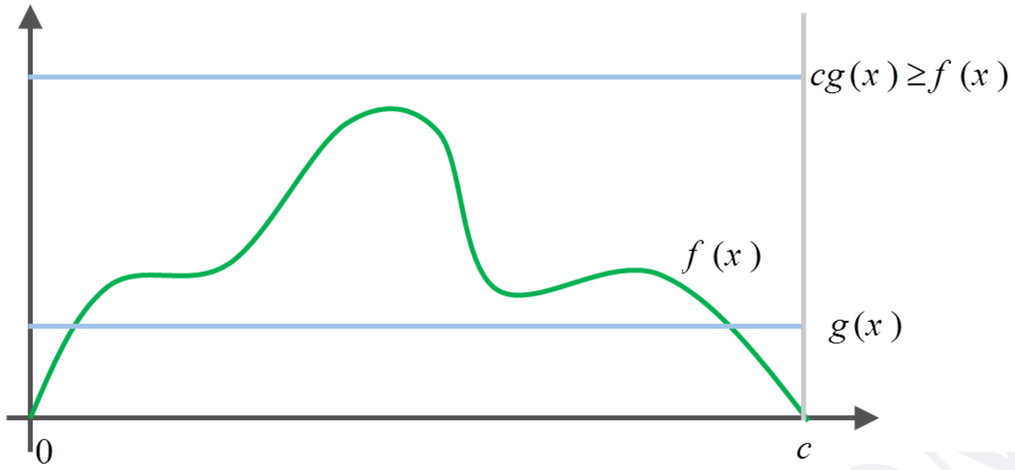
اگر تولید مقدار نرمالی مانند Y با میانگین μ_Y و واریانس σ_Y^2 مدنظر باشد، ابتدا متغیر Z را براساس رابطه بالا بدست می‌آوریم و سپس از تبدیل

$$Y=\mu_Y+\sigma_Y Z$$

استفاده می‌کنیم.

روش رد و قبول

در این روش به دلیل **عدم امکان** ایجاد یک فرم **بسته** برای برخی از توابع توزیع، از یک تابع توزیع **دلخواه** که امکان تولید فرم بسته آن وجود داشته باشد استفاده می‌شود. ما به دنبال آن هستیم که متغیر تصادفی Y با تابع توزیع $f(x)$، که امکان داشتن فرم بسته وجود **ندارد**، تولید کنیم. متغیر تصادفی X که دارای تابع توزیع $g(x)$ با فرم بسته در نظر بگیرید که رابطه $f(x)\le cg(x)$ برای تمامی مقادیر x برقرار باشد. در واقع تابع $cg(x)$ همیشه **بالای** تابع توزیع $f(x)$ است. در شکل زیر این رابطه نشان داده شده است.

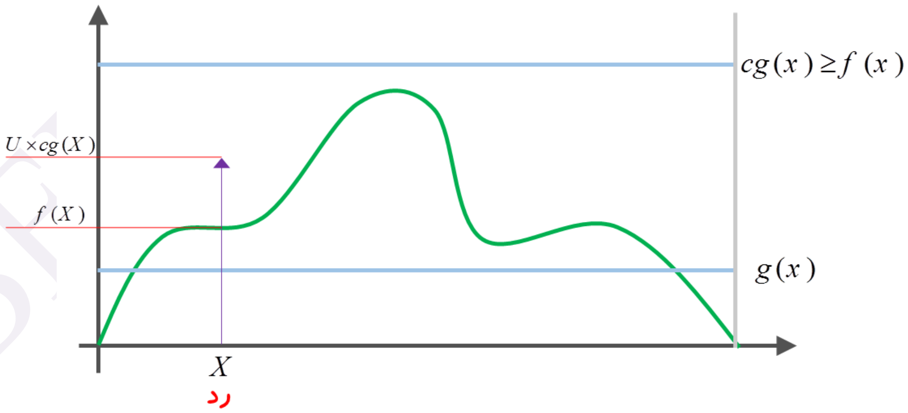


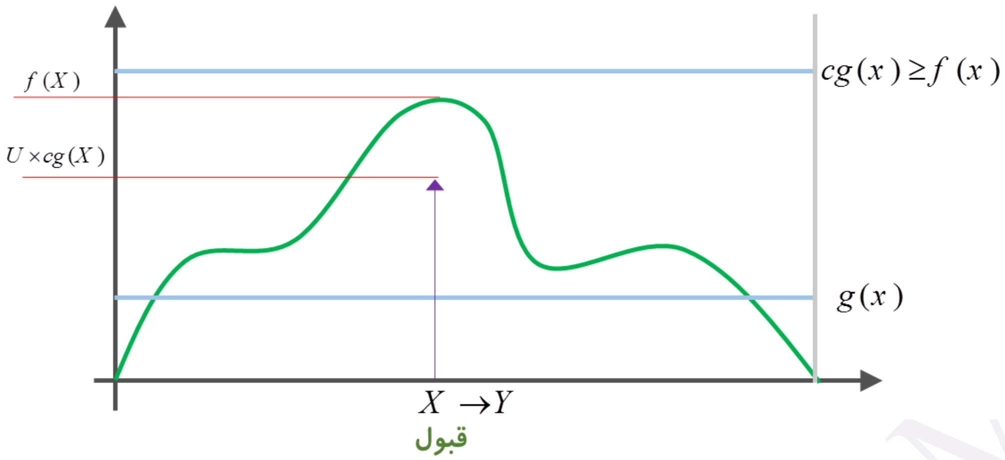
برای تولید اعداد تصادفی با استفاده از **روش رد و قبول** به صورت زیر عمل می‌کنیم.

گام ۱: متغیر تصادفی X را با تابع توزیع $g(x)$ بین **صفر و c** و U را با تابع توزیع یکنواخت بین **صفر و یک** تولید می‌کنیم.

گام ۲: اگر $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$ باشد در این صورت (**قبول**) $Y = X$، در غیر این صورت (**رد**) برو به **گام ۱**.

در شکل‌های زیر حالت رد و قبول برای متغیر Y آورده شده است.





در ادامه برای روشن شدن روش های تولید اعداد تصادفی به تمرین‌های زیر مراجعه کنید.

تمرین‌ها

تمرین ۱: یک مولد مقدار تصادفی برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع زیر ایجاد کنید.

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x \le 0 \\ e^{-2x}, & 0 < x \le \infty \end{cases}$$

حل:

گام ۱: تابع توزیع به صورت زیر می‌شود.

$$F(x)=\begin{cases} 0.5e^{2x}, & -\infty < x \le 0 \\ 1-e^{-2x}, & 0 < x \le \infty \end{cases}$$

گام ۲: در نظر بگیرید.

$$F(X)=R \quad for \quad -\infty < X < \infty$$

گام ۳: تابع توزیع تجمعی $F(X)$ را برای X حل کنید.

$$X=\begin{cases} \frac{1}{2}\ln(2R) & 0 < R < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\ln(2-2R) & \frac{1}{2} < R < 1 \end{cases}$$

نمونه‌ای از اعداد تولید شده توسط این الگوریتم در ادامه آورده شده است.

$$R_1 = 0.54 \xrightarrow{\frac{1}{2}<R_1<1} X_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\times 0.54\right) = 0.0416$$

$$R_2 = 0.79 \xrightarrow{\frac{1}{2}<R_2<1} X_2 = -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\times 0.79\right) = 0.4337$$

$$R_3 = 0.05 \xrightarrow{0<R_3<\frac{1}{2}} X_3 = \frac{1}{2}\ln\left(2\times 0.05\right) = -1.1512$$

$$R_4 = 0.94 \xrightarrow{\frac{1}{2}<R_4<1} X_4 = -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\times 0.94\right) = 1.0601$$

تمرین ۲: طرحی برای تولید مقدار از توزیع مثلثی با تابع توزیع زیر در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2), & 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{3}\right), & 3 \le x \le 6 \\ 0, & O/W \end{cases}$$

ده مقدار تصادفی تولید، میانگین نمونه را محاسبه و آن را با میانگین حقیقی توزیع مقایسه کنید.

حل:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی به صورت زیر است:

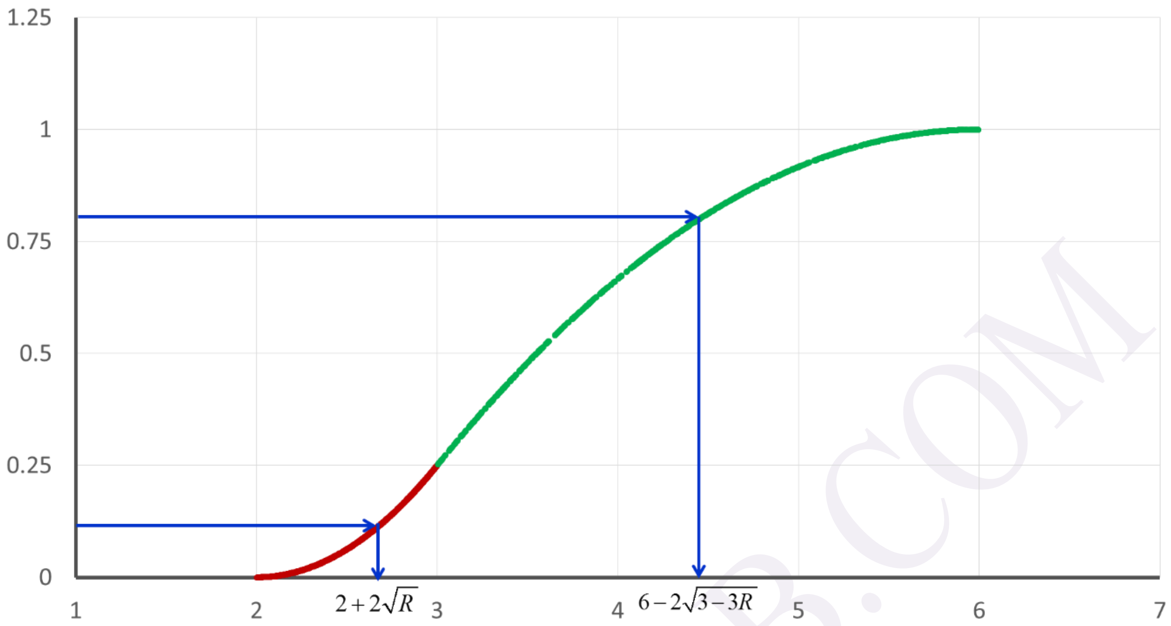
$$F(x) = \begin{cases} 1-x+\frac{x^2}{4}, & 2 \le x < 3 \\ x-\frac{x^2}{12}-2, & 3 \le x < 6 \end{cases}$$

گام ۲: در نظر بگیرید $F(X) = R \quad for \quad 2 \le X \le 6$

گام ۳: تابع $F(X)$ را بر حسب X حل کنید.

$$X = \begin{cases} 2+2\sqrt{R} & 2 \le x < 3 \\ 6-2\sqrt{3-3R} & 3 \le x < 6 \end{cases}$$

نمایش شماتیک انتخاب عدد تصادفی براساس تابع توزیع تجمعی به صورت شکل زیر است.



$$R_1=0.93 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_1<1} X_1=6-2\sqrt{3-3\times 0.93}=5.11$$

$$R_2=0.37 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_2<1} X_2=6-2\sqrt{3-3\times 0.37}=3.26$$

$$R_3=0.24 \xrightarrow{0<R_3<\frac{1}{4}} X_3=2+2\sqrt{0.24}=2.99$$

$$R_4=0.51 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_4<1} X_4=6-2\sqrt{3-3\times 0.51}=3.58$$

$$R_5=0.42 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_5<1} X_5=6-2\sqrt{3-3\times 0.42}=3.36$$

$$R_6=0.15 \xrightarrow{0<R_6<\frac{1}{4}} X_6=2+2\sqrt{0.15}=2.78$$

$$R_7=0.53 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_7<1} X_7=6-2\sqrt{3-3\times 0.53}=3.63$$

$$R_8=0.39 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_8<1} X_8=6-2\sqrt{3-3\times 0.39}=3.31$$

$$R_9=0.13 \xrightarrow{0<R_9<\frac{1}{4}} X_9=2+2\sqrt{0.13}=2.73$$

$$R_{10}=0.55 \xrightarrow{\frac{1}{4}<R_{10}<1} X_9=6-2\sqrt{3-3\times 0.55}=3.69$$

میانگین اعداد تصادفی تولید شده برابر است با:

$$\overline{X}=\frac{34.48}{10}=3.448$$

میانگین تابع توزیع داده شده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\overline{X} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2+3+6}{3} = 3.66$$

تمرین ۳: مولدی برای یک متغیرتصادفی ایجاد کنید که تابع توزیع آن به صورت زیر است. همچنین ۵ عدد تصادفی با استفاده مولد تولید کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{24}, & 2 < x \le 10 \\ 0, & O/W \end{cases}$$

حل:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی $f(x)$ به صورت زیر است.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \le x \le 2 \\ \frac{2}{3} + \frac{(x-2)}{24}, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$$

گام ۲: در نظر بگیرید: $F(X) = R \quad for \quad 0 \le X \le 10$

گام ۳: $F(X)$ را بر حسب X حل کنید که به صورت زیر می‌شود.

$$X = \begin{cases} 3R, & 0 \le R \le \frac{2}{3} \\ 2 + 24\left(R - \frac{2}{3}\right) = 24R - 14, & \frac{2}{3} \le R \le 1 \end{cases}$$

پنج عدد تصادفی براساس مولد فوق به صورت زیر می‌شود.

$$R_1 = 0.24 \xrightarrow{0<R_1<\frac{2}{3}} X_1 = 3\times 0.24 = 0.72$$

$$R_2 = 0.49 \xrightarrow{0<R_2<\frac{2}{3}} X_2 = 3\times 0.49 = 1.47$$

$$R_3 = 0.85 \xrightarrow{\frac{2}{3}<R_3<1} X_3 = 24\times 0.85 - 14 = 6.40$$

$$R_4 = 0.62 \xrightarrow{0<R_4<\frac{2}{3}} X_4 = 3\times 0.62 = 1.86$$

$$R_5 = 0.11 \xrightarrow{0<R_5<\frac{2}{3}} X_5 = 3\times 0.11 = 0.33$$

تمرین ۴: در یک بانک داده‌هایی در مورد مدت‌های خدمت دهی باجه اتوبانک گردآوری شده است. این داده‌ها در قالب فواصل به شرح زیر داده شده است:

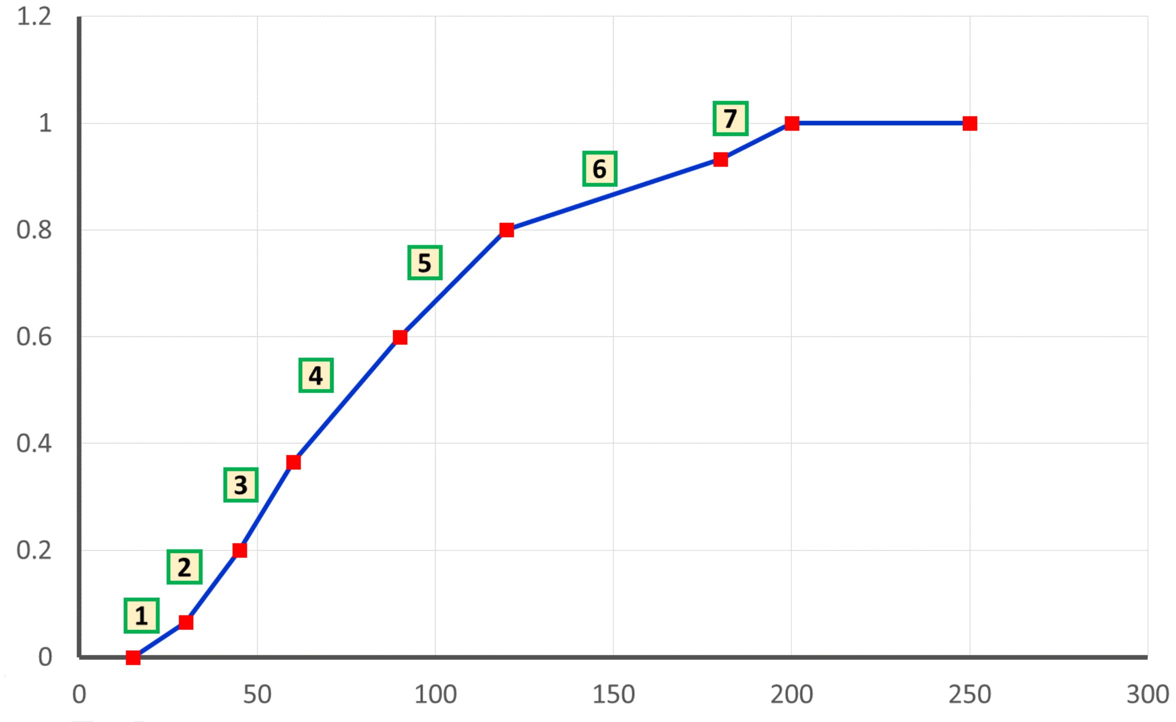
فاصله (ثانیه)	فراوانی
$15 \le x \le 30$	۱۰
$30 < x \le 45$	۲۰
$45 < x \le 60$	۲۵
$60 < x \le 90$	۳۵
$90 < x \le 120$	۳۰
$120 < x \le 180$	۲۰
$180 < x \le 200$	۱۰

با استفاده از اعداد تصادفی ۴ رقمی، پنج مقدار برای زمان خدمت دهی تولید کنید.

حل: جدول فراوانی نسبی و تجمعی برای داده‌های فوق به صورت زیر است:

فاصله (ثانیه)	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
$15 \le x \le 30$	۱۰	۰.۰۶۶	۰.۰۶۶
$30 < x \le 45$	۲۰	۰.۱۳۳	۰.۲۰۰
$45 < x \le 60$	۲۵	۰.۱۶۶	۰.۳۶۶
$60 < x \le 90$	۳۵	۰.۲۳۳	۰.۶۰۰
$90 < x \le 120$	۳۰	۰.۲۰۰	۰.۸۰۰
$120 < x \le 180$	۲۰	۰.۱۳۳	۰.۹۳۳
$180 < x \le 200$	۱۰	۰.۰۶۶	۱,۰۰۰

نمایش تابع توزیع تجمعی به صورت زیر است:



تابع فوق، یک تابع **قطعه بندی شده خطی** یا ***Piece-wise linear*** است که معادله خطـی هـر یـک از هفت بخش در جدول زیر آمده است.

شماره بازه	فاصله (ثانیه)	محدوده عدد تصادفی	معادله تابع خطی
۱	$15 \le x \le 30$	$0 \le R \le 0.066$	$R = \frac{11}{2500}X - \frac{33}{500}$
۲	$30 < x \le 45$	$0.066 < R \le 0.2$	$R = \frac{67}{7500}X - \frac{101}{500}$
۳	$45 < x \le 60$	$0.2 < R \le 0.366$	$R = \frac{83}{7500}X - \frac{149}{500}$
۴	$60 < x \le 90$	$0.366 < R \le 0.6$	$R = \frac{39}{5000}X - \frac{51}{500}$
۵	$90 < x \le 120$	$0.6 < R \le 0.8$	$R = \frac{1}{150}X$
۶	$120 < x \le 180$	$0.8 < R \le 0.933$	$R = \frac{133}{60000}X + \frac{267}{500}$
۷	$180 < x \le 200$	$0.933 < R \le 1.0$	$R = \frac{67}{20000}X + \frac{33}{100}$

با تولید ارقام تصادفی و یافتن بازه مربوطه، اعداد تصادفی را می‌توان به صورت جدول زیر بدست آورد.

ردیف	رقم تصادفی	عدد تصادفی بین صفر و یک R	محدوده بازه	عدد تصادفی با توزیع تجربی X
۱	۹۴۰۲	۰,۹۴۰۲	۷	۱۸۲
۲	۴۲۲۲	۰,۴۲۲۲	۴	۶۷
۳	۵۳۲۸	۰,۵۳۲۸	۴	۸۱
۴	۷۳۰۱	۰,۷۳۰۱	۵	۱۰۹
۵	۳۵۰۶	۰,۳۵۰۶	۳	۵۸

تمرین ۵: تابع توزیع $f(x) = 2e^{-2x}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از روش قبول و رد برای بازه صفر و دو، ۵ عدد تصادفی تولید کنید.

حل:

برای استفاده از روش قبول و رد، تابع $g(x) = \frac{1}{2}$ و $c = 4$ در نظر می‌گیریم. گام‌های تولید اعداد تصادفی به صورت زیر می‌شود:

گام ۱: عدد تصادفی با توزیع $X \approx U(0,2)$ و $U \approx U(0,1)$ تولید کنید. U بیانگر تابع توزیع **یکنواخت** است.

گام ۲: اگر $U \le \frac{f(X)}{cg(X)}$ باشد در این صورت قبول می شود و $Y = X$. در غیر این صورت برو به **گام ۱.**

خلاصه نتایج محاسبات گام‌های فوق به صورت زیر می‌شود.

U	X	$f(X)$	$g(X)$	$\frac{f(X)}{cg(X)}$	قبول یا رد
0.995	1.305	0.147	0.5	0.074	رد
0.065	1.735	0.062	0.5	0.031	رد
0.495	0.188	1.372	0.5	0.686	0.188
0.455	1.523	0.095	0.5	0.048	رد
0.432	1.645	0.075	0.5	0.037	رد
0.362	1.944	0.041	0.5	0.020	رد
0.085	0.067	1.749	0.5	0.875	0.067
0.276	0.175	1.409	0.5	0.704	0.175
0.414	1.607	0.080	0.5	0.040	رد
0.016	0.195	1.354	0.5	0.677	0.195
0.609	1.482	0.103	0.5	0.052	رد
0.723	0.572	0.638	0.5	0.319	رد
0.668	1.769	0.058	0.5	0.029	رد
0.182	1.720	0.064	0.5	0.032	رد
0.451	1.254	0.163	0.5	0.081	رد
0.876	0.449	0.815	0.5	0.407	رد
0.329	0.377	0.942	0.5	0.471	0.377

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**