

درس ۲۶:

تولید متغیر تصادفی

تهیه شده توسط گروه بهینه یاب



www.behinehyab.com

مقدمه

این درس به شیوه‌هایی برای نمونه‌گیری از انواع توزیع‌های **پیوسته** و **گسسته‌ای** می‌پردازد که به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. بحث‌ها و مثال‌های پیشین از سیستم‌های صف، بر فایده توزیع‌های آماری برای مدل‌سازی فعالیت‌های دلالت داشته که عموماً غیرقابل پیش‌بینی یا **غیرقطعی** است. مثلاً، مدت‌های بین دو ورود و مدت‌های خدمت‌دهی در صف‌ها و تقاضا برای یک محصول اغلب ماهیتی غیرقابل پیش‌بینی دارند. معمولاً، چنین متغیرهایی به صورت **متغیرهایی تصادفی** با توزیع آماری مشخص مدل‌سازی می‌شود و برای برآورد پارامترهای توزیع فرضی و **آزمودن اعتبار** مدل آماری بدست آمده، شیوه‌های استاندارد آماری وجود دارد.

نکته: در این درس فرض می‌کنیم توزیع احتمال به طور کامل مشخص شده است و ما در جستجوی راه‌هایی به منظور تولید نمونه‌هایی از این توزیع برای استفاده به عنوان ورودی در مدل شبیه‌سازی هستیم. در همه روش‌های این فصل فرض می‌کنیم که یک منبع اعداد تصادفی **یکنواخت** بین **صفر** و **یک** و **مستقل** که به صورت R_1, R_2, \dots نشان داده می‌شود، در دسترس است. برای هر یک از R_i ، تابع توزیع احتمال

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

و تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

است. در این فصل، R_1, R_2, \dots یا R معرف اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک و مستقل

است.

روش تبدیل معکوس

در ادامه به تابع توزیع هایی می پردازیم که امکان یافتن تابع معکوس آن ها به سادگی مسیر است.

توزیع نمایی

توزیع نمایی دارای تابع توزیع احتمال یا تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر است:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

به دلیل این که امکان محاسبه تابع معکوس تابع توزیع تجمعی به صورت صریح وجود دارد، روش

گام به گام روش تبدیل معکوس برای توزیع نمایی به صورت زیر می شود:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی نمایی متغیر تصادفی X را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

گام ۲: فرض کنید در دامنه X برقرار است.

گام ۳: معادله $R = F(X)$ را حل کنید تا X بر حسب R بدست آید:

$$X = F^{-1}(R) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-R)$$

گام ۴: اعداد تصادفی یکنواخت R_1, R_2, R_3, \dots را تولید و مقادیر موردنظر را طبق رابطه زیر

$$X_i = F^{-1}(R_i)$$

محاسبه کنید.

تابع توزیع یکنواخت

یک متغیر تصادفی مانند X را در نظر بگیرید که در فاصله $[a, b]$ به طور **یکنواخت** توزیع شده است. برای

تولید X به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$X = a + (b - a)R$$

تابع چگالی X به صورت زیر ارایه می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & O/W \end{cases}$$

برای تولید اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت گام‌های زیر انجام می‌شود:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی یکنواخت به صورت زیر است:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

گام ۲: تساوی $F(X) = (X - a)/(b - a) = R$ را بنویسید.

گام ۳: حل X بر حسب R به رابطه $X = a + (b - a)R$ می‌انجامد.

توزیع ویبول

در توزیع **ویبول**، هر گاه پارامتر **موقعیت** یا ν برابر با **صفر** باشد، آنگاه تابع توزیع احتمال به صورت

زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & O/W \end{cases}$$

در تابع فوق، $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ که به ترتیب پارامترهای **مقیاس** و **شکل** هستند. به منظور تولید هر

مقدار تصادفی از توزیع ویبول، **گام‌های ۱ تا ۳** را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

گام ۱: تابع توزیع تجمعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}, x \geq 0$$

گام ۲: فرض کنید $R = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}$ باشد.

گام ۳: حل X بر حسب R به نتیجه زیر می‌انجامد:

$$X = \alpha \left[-\ln(1-R) \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

توزیع مثلثی

متغیر تصادفی مانند X را در نظر بگیرید که دارای تابع توزیع زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & O/W \end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی این توزیع به صورت زیر می‌شود.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

به ازای $0 \leq X \leq 1$ داریم:

$$R = \frac{X^2}{2}$$

به ازای $1 < X \leq 2$ داریم:

$$R = 1 - \frac{(2-X)^2}{2}$$

اگر $0 \leq X \leq 1$ باشد چنین بر می‌آید که $0 \leq R \leq \frac{1}{2}$ که در این صورت $X = \sqrt{2R}$ است. اگر

$1 < X \leq 2$ باشد رابطه $\frac{1}{2} < R \leq 1$ می‌شود که در این صورت داریم: $X = 2 - \sqrt{2(1-R)}$. بنابراین

می‌توان تولید متغیر تصادفی براساس تابع توزیع **مثلثی** را به صورت زیر بیان کرد:

$$X = \begin{cases} \sqrt{2R}, & 0 \leq R \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1-R)}, & \frac{1}{2} \leq R \leq 1 \end{cases}$$

توزیع‌های تجربی پیوسته

این امکان وجود دارد که مدلساز **نتواند** به توزیعی نظری به منظور ارایه مدل مناسبی برای داده‌های

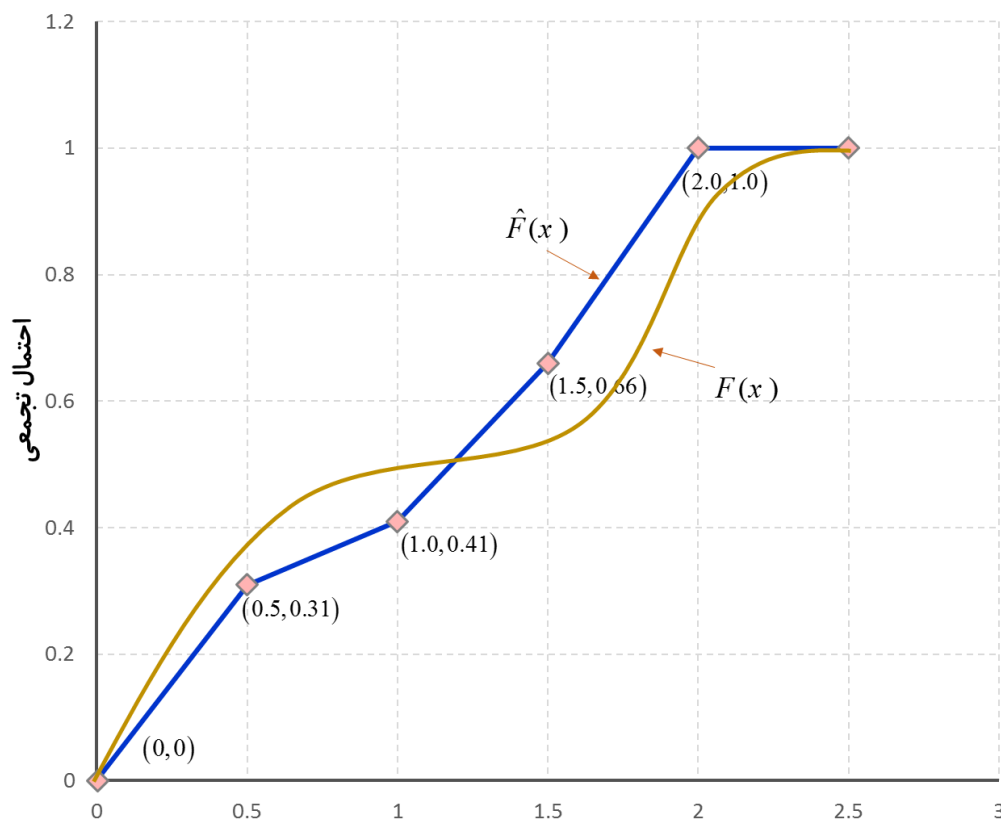
ورودی برسد. در این صورت استفاده از **توزیع تجربی** داده‌ها توصیه می‌شود. برای روشن شدن موضوع مثال

زیر را در نظر بگیرید.

مثال: تصور کنید ۱۰۰ مورد مدت تعمیر نوعی ابزار شکسته گردآوری شده و داده‌ها بر حسب تعداد

مشاهده در فواصل مختلف، در جدول زیر خلاصه شده است.

فاصله (ساعت)	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
$0 \leq x \leq 0.5$	۳۱	۰.۳۱	۰.۳۱
$0.5 < x \leq 1.0$	۱۰	۰.۱	۰.۴۱
$1.0 < x \leq 1.5$	۲۵	۰.۲۵	۰.۶۶
$1.5 < x \leq 2.0$	۳۴	۰.۳۴	۱.۰۰



در شکل فوق، $F(x)$ توزیع واقعی و $\hat{F}(x)$ توزیع تجربی است. شکل حقیقی $F(x)$ مجهول است و همواره در عمل، مجهول خواهد ماند مگر تعداد نامحدودی داده در دسترس پذیر باشد. فرض بر این است که متغیر تصادفی X در مورد مدت‌های به صورت $X \geq 0$ صدق می‌کند. فرض کنید یک عدد تصادفی بین صفر و یک تولید می‌شود که برابر با $R_1 = 0.83$ است. عدد تصادفی X_1 که دارای توزیع تجربی داده شده است به صورت زیر محاسبه می‌شود.

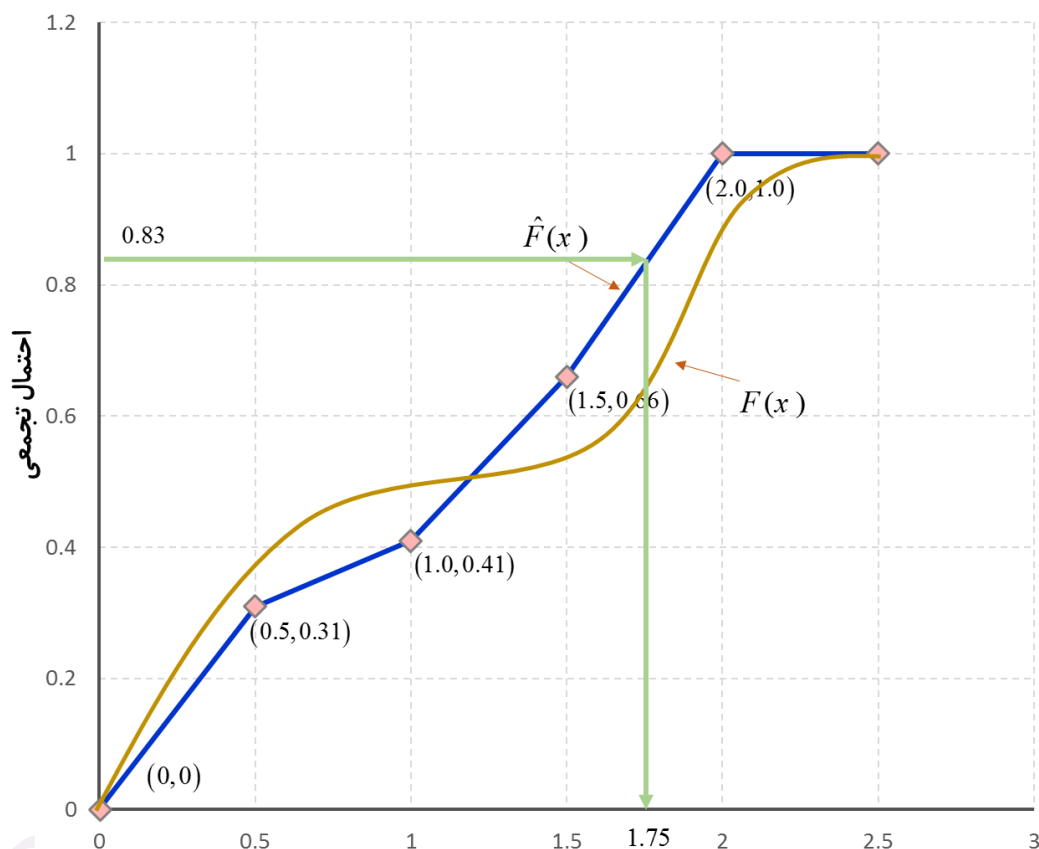
$$X_1 = F^{-1}(R_1)$$

چون مقدار R_1 بین دو عدد 0.66 و 1.0 است، مقدار X_1 با درون یابی خطی مقدار بین 1.5 و 2.0

بدست می آید.

$$X_1 = 1.5 + \left[\frac{R_1 - 0.66}{1.0 - 0.66} \right] (2.0 - 1.5) = 1.75$$

در شکل زیر، نمایش شماتیک برای محاسبه مقدار عدد تصادفی با توزیع تجربی داده شده آورده شده است.



تبدیل مستقیم در مورد توزیع نرمال

روش‌های بسیاری برای تولید تصادفی با **توزیع نرمال** به وجود آمده است. اما، روش **تبدیل معکوس**

کاربرد پذیر نیست، زیرا **نمی‌توان** معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال را از طریق تحلیلی محاسبه کرد. همان

طور که می‌دانید، تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد به صورت زیر است:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad -\infty < x < +\infty$$

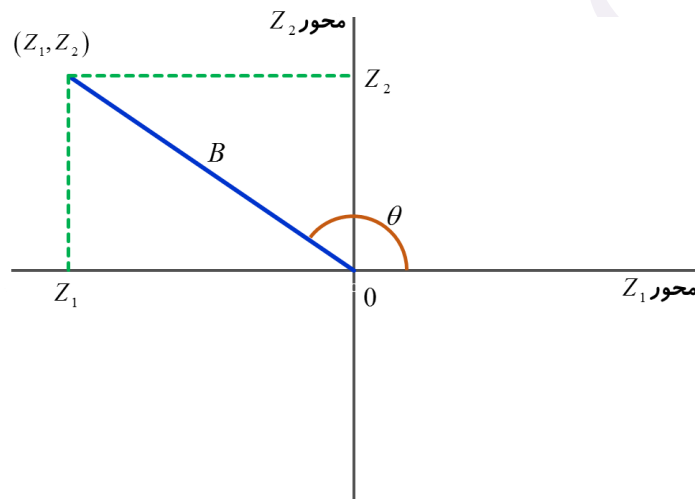
برای تولید متغیر تصادفی با توزیع نرمال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد، Z_1 و Z_2 ، را در نظر بگیرید که از دو مقدار θ و B بدست می‌آید.

$$Z_1 = B \cos \theta$$

$$Z_2 = B \sin \theta$$

نمایش قطبی Z_1 و Z_2 به صورت زیر است.



روشن است $B^2 = Z_1^2 + Z_2^2$. می‌توان نشان داد که B^2 دارای **توزیع مربع کای** با **درجه آزادی دو**

دارد. با این فرض می‌توان نشان داد که شعاع B به صورت زیر تعیین می‌شود (اثبات واگذار به خواننده).

$$B = (-2 \ln R)^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به این که شعاع B و زاویه θ **مستقل** از هم هستند. برای تولید دو مقدار مستقل نرمال

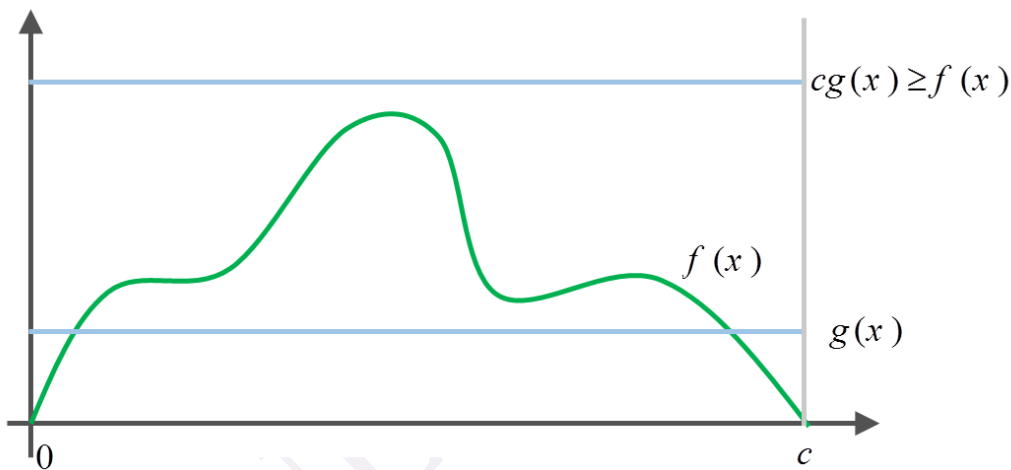
استاندارد، Z_1 و Z_2 ، از دو عدد تصادفی مستقل R_1 و R_2 به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$Z_1 = (-2 \ln R_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi R_2)$$

$$Z_2 = (-2 \ln R_1)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi R_2)$$

روش رد و قبول

در این روش به دلیل **عدم امکان** ایجاد یک فرم بسته برای برخی از توابع توزیع، از یک تابع توزیع **دلخواه** که امکان تولید فرم بسته آن وجود داشته باشد استفاده می‌شود. ما به دنبال آن هستیم که متغیر تصادفی Y با تابع توزیع $f(x)$ ، که امکان داشتن فرم بسته وجود **ندارد**، تولید کنیم. متغیر تصادفی X که دارای تابع توزیع $g(x)$ با فرم بسته در نظر بگیرید که رابطه $f(x) \leq cg(x)$ برای تمامی مقادیر x برقرار باشد. در واقع تابع $cg(x)$ همیشه **بالای** تابع توزیع $f(x)$ است. در شکل زیر این رابطه نشان داده شده است.



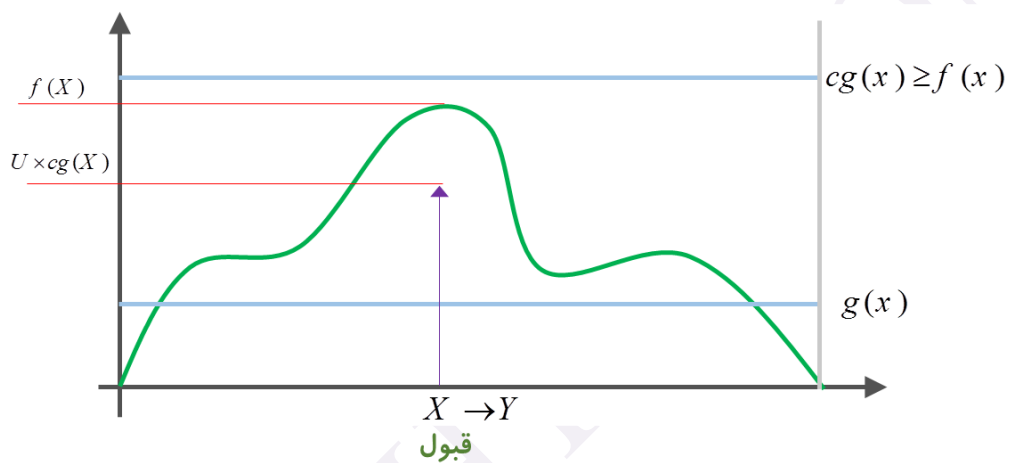
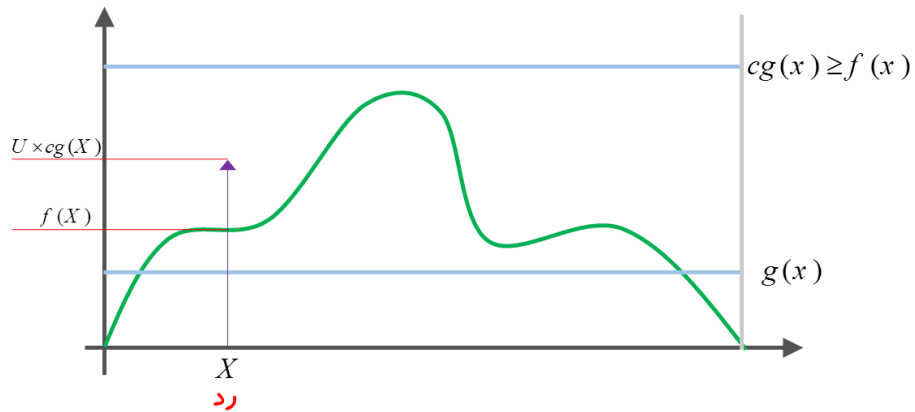
برای تولید اعداد تصادفی با استفاده از **روش رد و قبول** به صورت زیر عمل می‌کنیم.

گام ۱: متغیر تصادفی X را با تابع توزیع $g(x)$ بین صفر و c و U را با تابع توزیع یکنواخت بین صفر و

یک تولید می‌کنیم.

گام ۲: اگر $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$ باشد در این صورت **(قبول)** $Y = X$ ، در غیر این صورت **(رد)** برو به **گام ۱**.

در شکل‌های زیر حالت رد و قبول برای متغیر Y آورده شده است.



توجه: برای مطالعه ادامه آموزش روش‌های تولید متغیرهای تصادفی با توجه به تابع توزیع احتمال و حل تمرین‌های متنوع، جزوه این درس را از طریق وب سایت **بهینه یاب** به نشانی www.behinehyab.com تهیه فرمایید.

برای دریافت بسته‌های آموزشی گروه **بهینه‌یاب** به وب سایت ما به نشانی

www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی behinehyab@gmail.com و یا

بخش "تماس با ما" وب سایت گروه **بهینه‌یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه‌یاب**