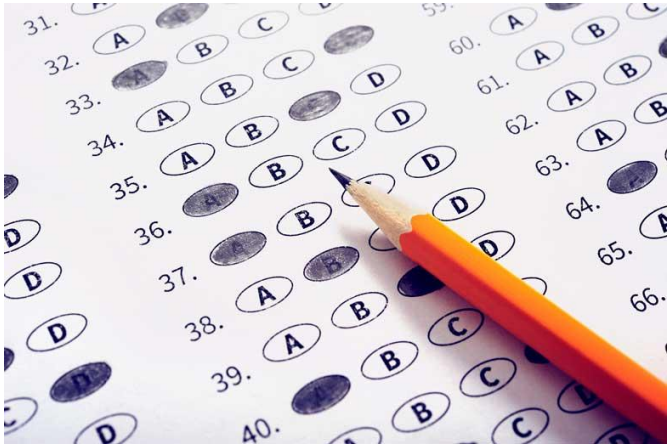
به نام خدا

کنکور کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ۱۳۹۷



۳۱- در یک مسئلهٔ تخصیص متوازن، مقادیر حداقل هر سطر و هر ستون ماتریس هزینه‌های A به‌صورت زیر مشخص شده است. در این‌صورت مقدار بهینهٔ تابع هدف z^*، در کدام گزینه همواره صدق می‌کند؟

$$A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{matrix} \end{array}$$

۱) $z^* \geq \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j\right\}$

۲) $z^* \leq \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j\right\}$

۳) $z^* \leq \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j\right\}$

۴) $z^* \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j\right\}$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

در بهترین حالت، حداقل هر سطر یا هر ستون، به عنوان جواب مسئله تخصیص در نظر گرفته می شود. یعنی:

$$Z^* \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$Z^* \geq \sum_{j=1}^{n} \beta_j$$

برای برقراری هر دو عبارت فوق باید داشته باشیم:

$$Z^* \geq Max\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i\right\}$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۲- در مورد دوگان مسئلهٔ روبه‌رو، گزینهٔ درست کدام است؟

$$\min \quad z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4$$

$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 5$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 9$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

۱) بیکران است.

۲) مقدار بهینهٔ متناهی دارد.

۳) دارای جواب بهینهٔ چندگانه است.

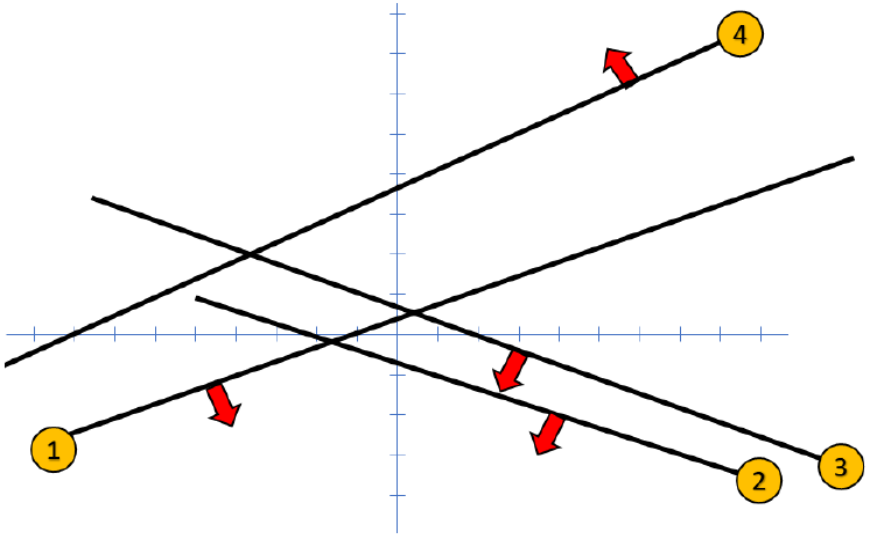
۴) فاقد جواب شدنی است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

ابتدا مسئله فوق را به شرایط استاندارد در می آوریم:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 \\
&s.t. \\
&x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \le -5 \quad (y_1) \\
&-3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le -9 \quad (y_2) \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
\longrightarrow
\begin{aligned}
&Min - 5y_1 - 9y_2 \\
&s.t. \\
&1)\ y_1 - 3y_2 \ge -1 \\
&2)\ -y_1 - 3y_2 \ge 2 \\
&3)\ -2y_1 - 5y_2 \ge -4 \\
&4)\ -y_1 + 2y_2 \ge 7
\end{aligned}
$$

مسئله همزاد به روش ترسیمی حل می شود.



فضای امکان پذیر مسئله همزاد تهی است و لذا جواب ندارد. لذا گزینه ۴ درست است.

۳۳- مسئلهٔ بهینه‌سازی تک‌متغیرهٔ $\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & 0 \le x < 4 \end{array}$ را برای تابع $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & 0 \le x < 1 \\ 2x-2 & 1 \le x < 2 \\ x & 2 \le x \le 4 \end{cases}$ به شکل زیر خطی نموده‌ایم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3 + c\lambda_4 \\ & \lambda_1 \le z_1 , \lambda_2 \le A , \lambda_3 \le B , \lambda_4 \le C \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ge 0 \\ & z_1, z_2, z_3 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

آنگاه کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟

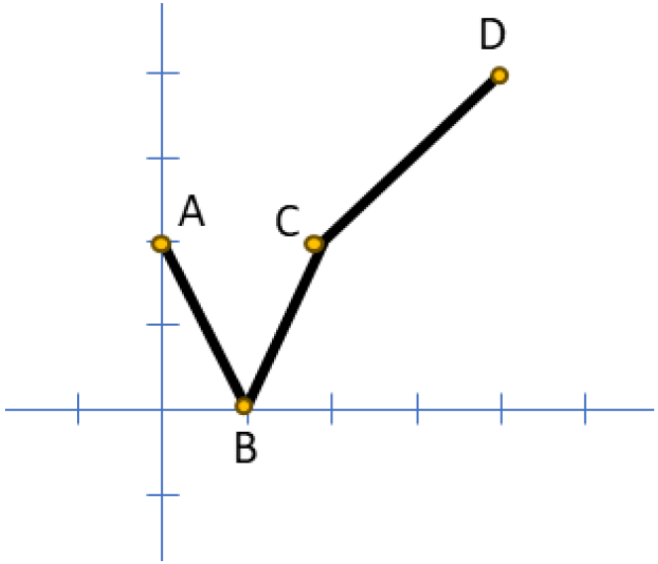
۱) $A+B = z_1 + 2z_2 \ , \ a+b=2$

۲) $B+C = z_2 + 2z_3 \ , \ b+c=6$

۳) $A+B+C = 2z_1 + z_2 + z_3 \ , \ a+b+c=6$

۴) $A+B+C = z_1 + 2z_2 + 2z_3 \ , \ a+b+c=8$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$A\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix},B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix},C\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix},D\begin{vmatrix}4\\4\end{vmatrix}$$

$$x=0\lambda_1+1\lambda_2+2\lambda_3+4\lambda_4=\lambda_2+2\lambda_3+4\lambda_4$$

$$y=2\lambda_1+\underset{a}{0}\lambda_2+\underset{b}{2}\lambda_3+\underset{c}{4}\lambda_4=2\lambda_1+2\lambda_3+4\lambda_4\rightarrow b+c=6$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1\le Z_1\\&\lambda_2\le Z_1+Z_2\\&\lambda_3\le Z_2+Z_3\\&\lambda_4\le Z_3\end{aligned}\quad\rightarrow\quad\begin{aligned}&A=Z_1+Z_2\\&B=Z_3+Z_2\\&C=Z_3\end{aligned}\quad\rightarrow\quad B+C=Z_2+2Z_3$$

لذا گزینه ۲ درست است.

۳۴- مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \quad z = ۲x_۱ + \alpha x_۲$$
$$\text{s.t.} \quad x_۱ + x_۲ \le \alpha$$
$$-x_۱ + x_۲ \le -۱$$
$$x_۱, x_۲ \ge ۰$$

در صورت وجود، مقدار بهینهٔ مسئله کدام است؟

۱) ۲α

۲) ۲α یا $\frac{\alpha(\alpha+۱)}{۲}+۱$

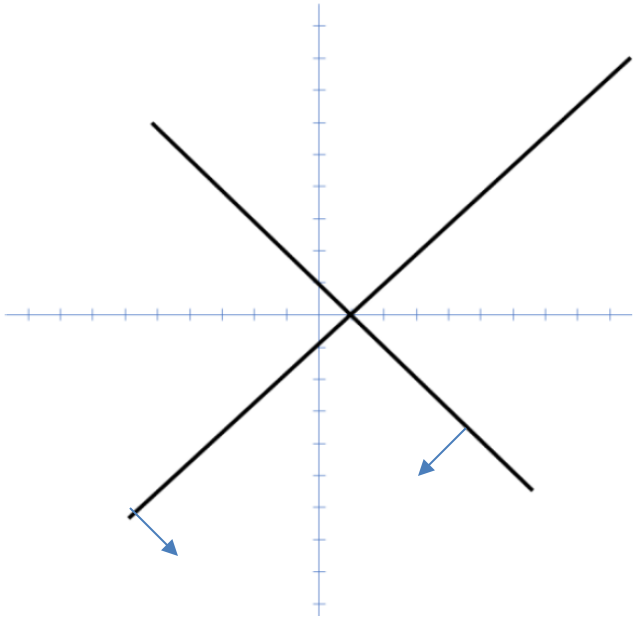
۳) ۲ یا $\alpha+۱+\frac{\alpha(\alpha-۱)}{۲}$

۴) ۲

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

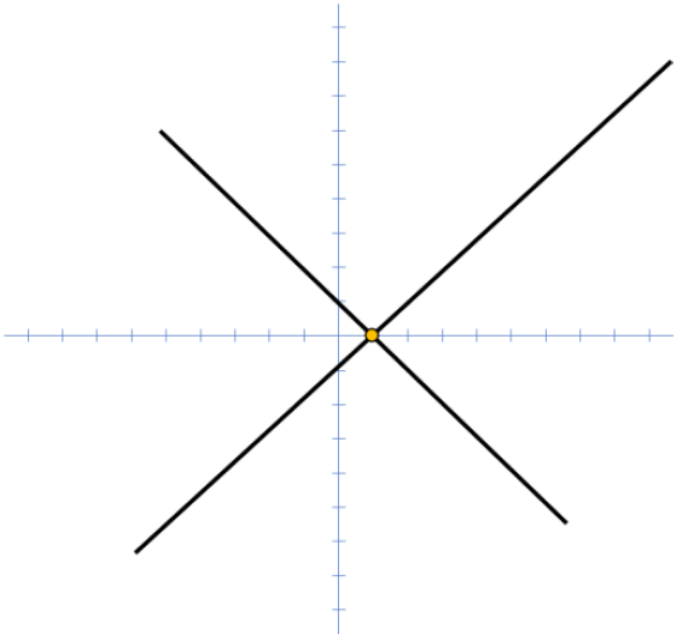
حل:

برای $\alpha < 1$ فضای امکان پذیر تهی است.



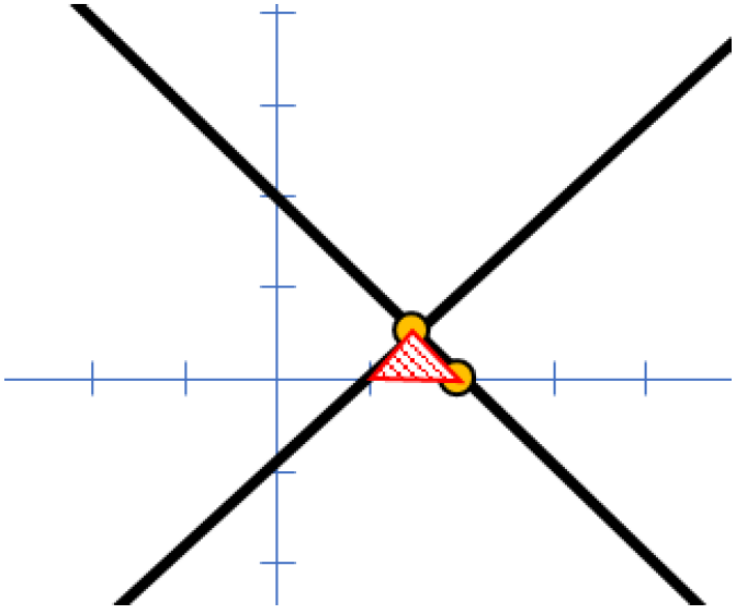
حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

برای $\alpha = 1$ فضای امکان پذیر یک نقطه است. و تمامی گزینه ها صحیح هستند. مقدار بهینه تابع هدف ۲ است.



حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

برای $\alpha = 2$ جواب مسئله به صورت ترسیمی به صورت زیر می شود:

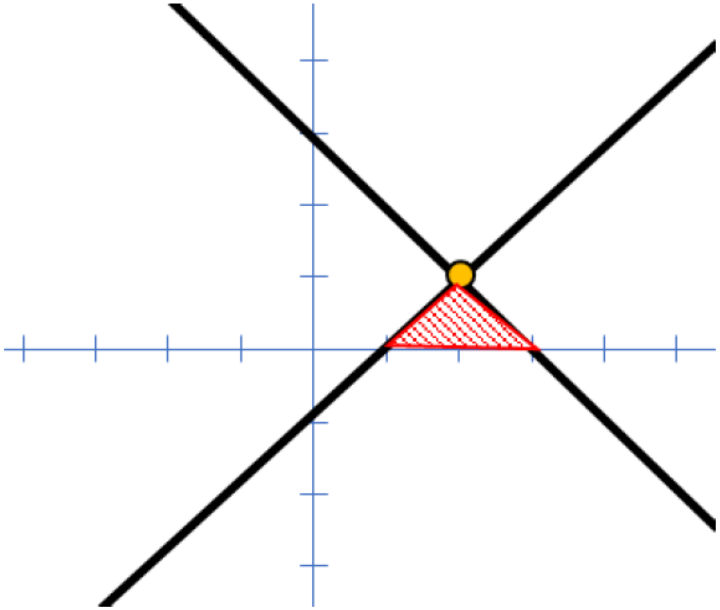


$$1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, z = 4$$

$$2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, z = 4$$

لذا در این حالت گزینه های ۳ و ۴ حذف می شود.

برای $\alpha = 3$ جواب مسئله به صورت ترسیمی به صورت زیر می شود:



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow x_1 = 2, x_2 = 1 \rightarrow Z^* = 2\times 2 + 3\times 1 = 7$$

فقط گزینه ۲ صدق می کند لذا گزینه ۲ درست است.

۳۵- ناحیهٔ شدنی با محدودیت‌های $Ax \geq b$ را که در آن A یک ماتریس $m \times n$ با $m > n$ و b یک بردار m بعدی است، با اطلاعات زیر در نظر بگیرید:

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\text{Rank}(A) = n$, $n \times n$ یک ماتریس A_1.

اگر برای نقطهٔ x_0 داشته باشیم $A_2 x_0 > b_2$ و $A_1 x_0 = b_1$. آنگاه x_0 چه وضعیتی دارد؟ (فرین یا انتهایی، ترجمهٔ واژهٔ اکستریم (extreme) است)

۱) نقطهٔ فرین ۲) نقطهٔ مرزی ۳) نقطهٔ ناشدنی ۴) نقطهٔ درونی

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

گزینه ۱: اطلاعات داده شده شرط کافی برای نقطه گوشه بهینه را ندارد لذا صحیح نیست.

گزینه ۳: با توجه به این که $A_1 x_0 = b_1, A_2 x_0 > b_1$ لذا یک جواب شدنی است و این گزینه صحیح نیست.

گزینه ۴: با توجه به این که $A_1 x_0 = b_1$ به صورت تساوی است نقطه درونی نیست لذا این گزینه غلط است.

پس گزینه ۲ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۶- در یک صفحهٔ ۸×۸ بازی شطرنج، می‌خواهیم یک چیدمان برای بیشترین تعداد مهرهٔ وزیر را به‌نحوی تعیین کنیم که هیچ دومهره‌ای نتوانند یکدیگر را تهدیدکنند، یعنی هم‌زمان در یک سطر، یک ستون یا یک قطر (اصلی یا فرعی) واقع نشده باشند. برای یافتن جوابی برای این مسئله از طریق بهینه‌سازی، فرض کنید متغیر صفر و یک x_{ij} مقدار یک بگیرد، اگر در خانهٔ (i,j) صفحهٔ شطرنج مهرهٔ وزیری قرار داده شود و در غیراین‌صورت مقدار صفر بگیرد. با فرض $S=\{۱,\dots,۸\}$ می‌توان مدل اولیه زیر را نوشت:

$$\max \sum_{i,j\in S} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in S} x_{ij} \le ۱ \,,\; j\in S$$

$$\sum_{j\in S} x_{ij} \le ۱ \,,\; i\in S$$

$$x_{ij} \in \{۰,۱\} \;,\; i,j\in S.$$

آنگاه یکی از محدودیت‌های لازم برای هر $i,j\in S$ به‌منظور تکمیل این مدل کدام است؟

۱) $\sum_{k\in S:k<i,k<j} x_{(i-k)(j-k)} + \sum_{k\in S:k+i\le ۸,k<j} x_{(i+k)(j-k)} \le ۱$

۲) $\sum_{K\in S:k<i,k+j\le ۸} x_{(i-k)(j+k)} + \sum_{k\in S:k+i<۸,k+j<۸} x_{(i+k)(j+k)} \le ۱$

۳) $\sum_{k\in S:k<i,k+j\le ۸} x_{(i-k)(j+k)} + \sum_{k\in S:k+i\le ۸,k<j} x_{(i+k)(j-k)} \le ۱$

۴) $\sum_{k\in S:k<i,k<j} x_{(i-k)(j-k)} + \sum_{k\in S:k+i<۸,k+j<۸} x_{(i+k)(j+k)} \le ۱$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

متغیر تصمیم به صورت زیر تعریف می شود.

$$X_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{درخانه } (i,j) \text{ مهر وزیر قرار بگیرید.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع هدف، حداکثر سازی این حالات است لذا تابع هدف به صورت زیر است:

$$Max \sum_{(i,j)\in S} X_{ij}$$

در هر سطر و هر ستون، تنها حداکثر یک مهره وزیر قرار می گیرد و لذا محدودیت های زیر لحاظ می گردد:

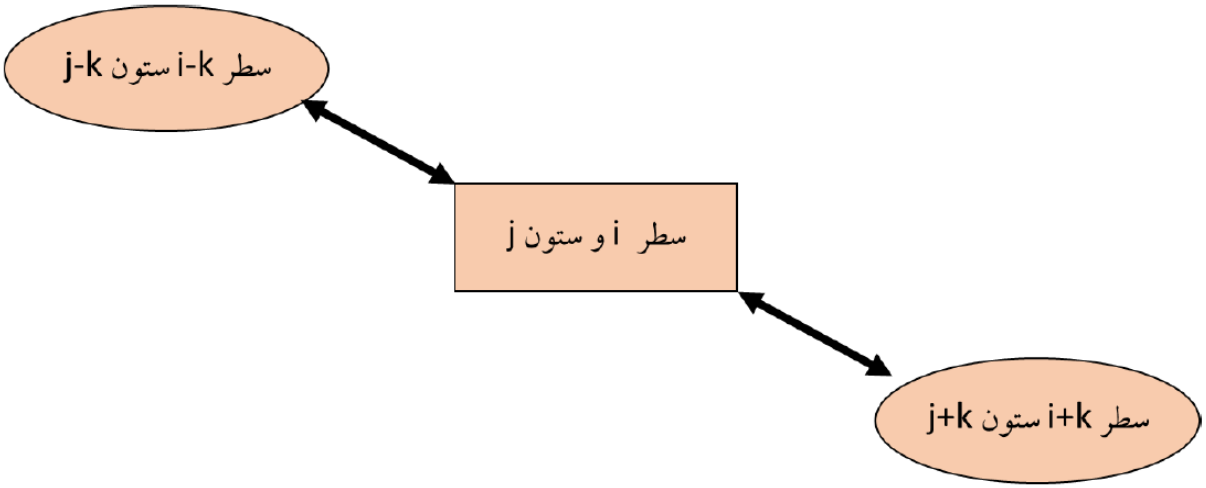
حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

$$\sum_{i} X_{ij} \le 1 \quad j \in S$$

$$\sum_{j} X_{ij} \le 1 \quad i \in S$$

از طرفی نباید در قطرهای صـــفحه شـــطرنج بیش از دو مهره قرار بگیرید لذا محدودیت ها باید دو حالت زیر را لحاظ کند.

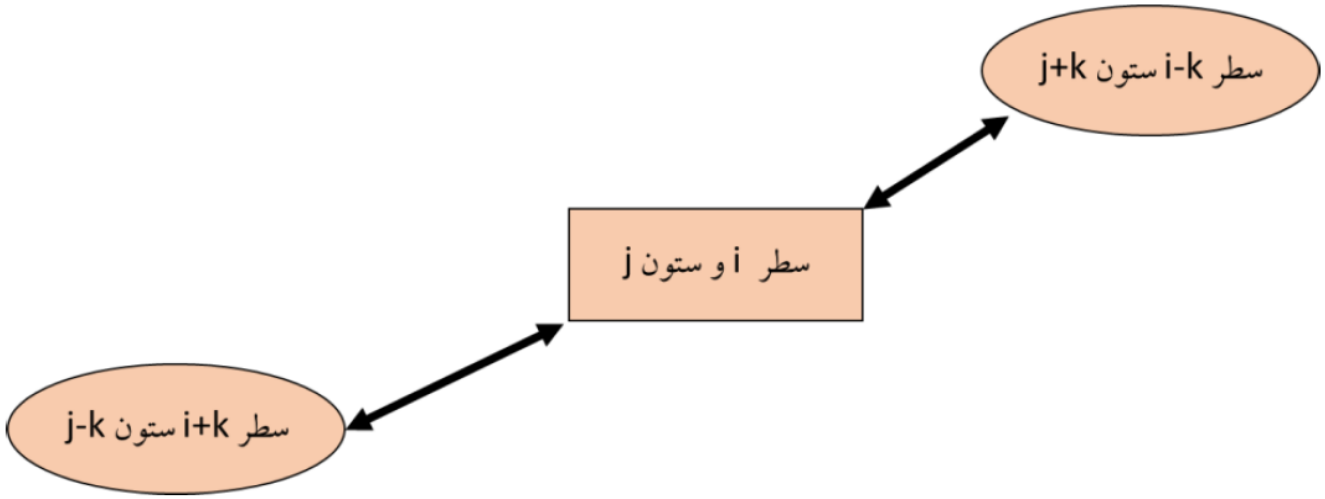
حالت اول:



$$\sum_{\substack{k<i \\ k<j}} x_{(i-k)(j-k)} + \sum_{\substack{i+k\le 8 \\ j+k\le 8}} x_{(i+k)(j+k)} \le 1 \quad \forall (i,j) \in S$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حالت دوم:



$$\sum_{\substack{i<k \\ j+k\le 8}} x_{(i-k)(j+k)} + \sum_{\substack{j+k\le 8 \\ j<k}} x_{(i+k)(j-k)} \le 1 \quad \forall (i,j)\in S$$

گزینه ۳ محدودیت فوق را نشان می دهد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۷- کدام گزینه درست است؟

۱) در روش سیمپلکس، هیچ نقطهٔ فرینی تکرار نخواهد شد.

۲) اگر یک نقطهٔ فرین بهینه باشد، هر پایهٔ متناظر با آن حتماً شرایط بهینگی را دارد.

۳) اگر در یک تکرار روش سیمپلکس، یک متغیر از پایه خارج شود، در تکرار بعدی ممکن است مجدداً وارد پایه شود.

۴) اگر در یک تکرار روش سیمپلکس، یک متغیر کمکی داخل پایه باشد و تمام عناصر سطر متناظرش کوچکتر یا مساوی صفر باشند، محدودیت نظیر آن زائد هندسی است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱:در روش سیمپلکس این امکان دارد در فرایند حل به یک نقطه مرزی بازگردیم.

گزینه ۲: اگر جواب تباهیده داشته باشیم، جواب تابع هدف پایه های متناظر با یک جواب تباهیده برابر است ولی یکی از ان ها بهینه است.

گزینه ۳: اگر یک متغیر از پایه خارج شود، مجدد و بلافاصله نمی تواند وارد پایه شود.

گزینه ۴: در این صورت محدودیت مورد نظر روی متغیر پایه محدودیتی اعمال نمی کند. مثلا:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1 \rightarrow x_1 = 1 + x_2 + x_3$$

گزینه ۴ صحیح است.

۳۸- اگر مسئلهٔ حمل‌ونقل متوازن با **m** مبدأ و **n** مقصد به روش سیمپلکس استاندارد حل شود، تعداد متغیرهای غیرپایه در تابلوی بهینه و حداکثر تعداد عناصر غیرصفر در جواب بهینه به‌ترتیب برابر کدام است؟

۱) $m+n-1 , mn-(n+m)-1$

۲) $m+n-1 , m(n-1)-n+1$

۳) $m+n , m(n-1)-n$

۴) $m+n , mn-(n+m)$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

m تعداد مبدا و n تعداد مقصد است. تعداد کل متغیر ها برابر $m*n+1$است.

تعداد متغیرهای پایه یک درخت پوشا برای شبکه حمل و نقل $m+n-1$ و یک متغیر برای تابع هدف در نهایت $m+n$ متغیر داریم.

تعداد متغیرهای غیرپایه برابر است با تعداد کل متغیرها منهای تعداد متغیرهای پایه لذا داریم:

$$m*n+1-(m+n)=m(n-1)-n+1$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

۳۹- جدول زیر یکی از جداول میانی روش سیمپلکس برای یک مدل برنامه‌ریزی خطی با هدف مینیمم‌سازی است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	−۳	۲	۰	۰	۰	−۶	
x_4	۳	۱	۰	۱	۰	۹	۳
x_3	−۲	−۳	۱	۰	۰	۱	۴
x_5	۶	−۲	۰	۰	۱	−۲	۶

درصورتی‌که در ورود و خروج متغیرها به پایه، نامنفی‌بودن جواب بعدی لحاظ نشود، کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر x_2 وارد پایه شود، درهرصورت مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد.

۲) اگر x_1 وارد پایه شود، درهرصورت مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد.

۳) اگر x_4 از پایه خارج شود، درهرصورت جواب پایه‌ای بعدی شدنی است.

۴) اگر x_5 از پایه خارج شود، درهرصورت جواب پایه‌ای بعدی شدنی است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱: اگر $x2$ وارد پایه شود اگر متغیرهای $x3$ یا $x5$ از پایه خارج شوند مقدار تابع هدف افزایش می یابد.

گزینه ۲: اگر $x1$ وارد پایه شود، با خارج شده $x3$ از پایه مقدار تابع هدف کاهش می یابد.

گزینه ۳: اگر $x4$ از پایه خارج شود، $x1$ و $x2$ و $x6$ می تواند وارد پایه شود اگر $x1$ وارد پایه شود مقادیر سمت راست هیچ گاه منفی نمی شود. اگر $x2$ وارد پایه شود، چون اعداد زیر ۱+ ، منفی است لذا مقادیر سمت راست هیچ گاه منفی نمی شود. اگر $x6$ وارد پایه شود، هیچ گاه سمت راست متغیرهای پایه $x3$ و $x5$ منفی نمی شود لذا این گزینه درست است.

گزینه ۴: اگر $x5$ از پایه خارج شود، اگر $x2$ بخواهد وارد پایه شود، سمت راست $x3$ منفی میشود.

۴۰- در مورد مجموعهٔ ناتهی $S=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| g(x)\le k\right\}$ برای یک k مشخص، می‌توان گفت:

۱) اگر S محدب باشد، g می‌تواند تابعی غیرمحدب باشد.

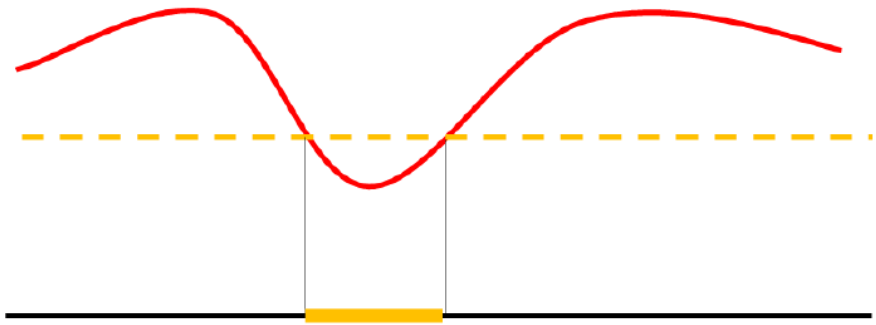
۲) اگر S محدب باشد، g تابعی محدب است.

۳) اگر S محدب نباشد، g تابعی مقعر است.

۴) اگر S محدب نباشد، g می‌تواند تابعی محدب باشد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:



گزینه ۱ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۱- برای یافتن جوابی نامنفی $(x \geq 0)$ برای دستگاه معادلات $Ax = b$ با استفاده از روش دوفازی، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر در تابلوی نهایی فاز یک، برخی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر داخل پایه بمانند، دستگاه دارای محدودیت زائد جبری است.

۲) اگر در تابلوی نهایی فاز یک، برخی از متغیرهای مصنوعی با مقدار غیرصفر داخل پایه بمانند، دستگاه ناسازگار است.

۳) اگر در تابلوی نهایی فاز یک، برخی از متغیرهای مصنوعی با مقدار غیرصفر داخل پایه بمانند، دستگاه فاقد جواب نامنفی است.

۴) اگر در تابلوی نهایی فاز یک، برخی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر داخل پایه بمانند، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

اگر در پایان فاز ۱، مقدار متغیرهای مصنوعی غیرصفر باشد، انگاه دستگاه فاقد جواب است لذا گزینه ۳ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۲- فرض کنید B یک ماتریس معکوس‌پذیر با عناصر نامنفی باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) تمام عناصر B^{-1} منفی است.

۲) تمام عناصر B^{-1} نامنفی است.

۳) هر سطر B^{-1} حداقل یک عنصر منفی دارد.

۴) هر سطر B^{-1} حداقل یک عنصر مثبت دارد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

با مثال فوق، گزینه های ۱ و ۲ غلط هستند.

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

با مثال فوق گزینه ۳ غلط می شود. لذا گزینه ۴ صحیح است.

۴۳- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x)$ که روی $\mathbb{R}^n$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر مرتبه دوم می‌باشد، درست است؟

- x^* یک مینیمم یا ماکسیمم محلی برای f است، اگر به‌ازای تمام $d \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $d^T \nabla f(x^*) = 0$.
- اگر $\nabla f(x^*) = 0$ و ماتریس هشین f در x^* نیمه معین مثبت باشد، x^* لزوماً یک مینیمم محلی برای f نیست.
- اگر در دو نقطهٔ x^* و y^* مقدار f به‌طور عمومی کمینه شود و f تابعی محدب باشد، آنگاه هر ترکیب محدب از x^* و y^* نیز مقدار f را به‌طور عمومی کمینه می‌کند.

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) ۰

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

گزاره ۱: این امکان است که نقطه مدنظر، نقطه زینی باشد لذا غلط است.

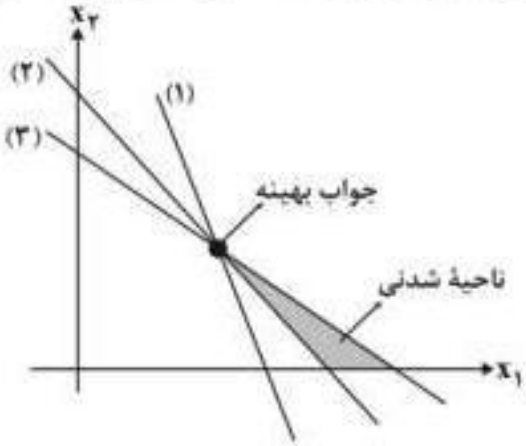
گزاره ۲: این تعریف نقطه کمینه است لذا این گزینه درست است.

گزاره ۳: اگر دو نقطه x^* و y^* کمینه عمومی باشد یعنی برابر هستند و لذا چون محدب است ترکیب ان هم برابر با کمینه عمومی است لذا این گزینه درست است.

۲ گزاره درست است و لذا گزینه ۲ درست است.

۴۴- در شکل زیر ناحیهٔ شدنی و جواب بهینه برای نمونه‌ای از مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر نشان داده شده است.

$$\min \quad c^T x$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0.$$



برای محدودیت i ام متغیر کمکی کمبود با S_i و متغیر مصنوعی (در صورت نیاز) با R_i نمایش داده می‌شود. در این‌صورت مجموعه متغیرهای پایه در جدول اولیه و در جدول بهینهٔ روش سیمپلکس دوفازی از راست به چپ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{x_1, x_2, S_2\}, \{R_1, R_2, S_3\}$

۲) $\{x_1, x_2, S_3\}, \{S_1, S_2, R_3\}$

۳) $\{S_1, x_2, x_2\}, \{R_1, S_2, S_3\}$

۴) $\{x_1, S_2, S_3\}, \{S_1, R_2, R_3\}$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

باتوجه به شکل محدودیت ۱ به صورت ≥، محدودیت ۲ به صورت ≥ و محدودیت ۳ به صورت ≤ است. لذا در مدل اولیه نیاز به تعریف متغیر *S1* و *R1* برای محدودیت ۱، *S2* و *R2* برای محدودیت ۲ و *S3* برای محدودیت ۳ هستیم که متغیرهای *R1*، *R2* و *S3* متغیرهای پایه هستند و در جدول نهایی متغیرهای *x1* و *x2* چون مثبت هستند، همچنین یکی از متغیرهای *S1*، *S2*، و *S3* با مقدار صفر در پایه هستند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۵- سه مسئلهٔ بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$A: \max \quad \sum_{i=1}^{n} d_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad 2\sum_{i=1}^{n} d_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,n$$

$$B: \min \quad \sum_{i=1}^{n} d_i y_i$$

$$\text{s.t.} \quad 2\sum_{i=1}^{n} d_i y_i \ge \sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,n$$

$$C: \min \quad \left| \sum_{i=1}^{n} d_i x_i - \sum_{i=1}^{n} d_i y_i \right|$$

$$\text{s.t.} \quad x_i + y_i = 1, \quad x_i, y_i \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,n.$$

فرض کنید مقادیر بهینهٔ تابع هدف این سه مسئله به‌ترتیب a^*، b^* و c^* باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a^* + b^* \le \sum_{i=1}^{n} d_i$

۲) $a^* - b^* = 0$

۳) $a^* - b^* = c^*$

۴) $a^* + b^* = c^*$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

برای $n=1$ سه مسئله را بررسی می کنیم:

$$A: Max\ d_1x_1$$
$$2d_1x_1 \le d_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, z = 0$$
$$x_1 \in \{0,1\}$$

$$B: Min\ d_1y_1$$
$$2d_1y_1 \ge d_1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} if\ d_1 > 0\ then\ y_1 = 1, Z^* = d_1 \\ if\ d_1 = 0\ then\ Z^* = 0 = d_1 \end{cases}$$
$$y_1 \in \{0,1\}$$

$$C: Min\ |d_1x_1 - d_1y_1|$$
$$x_1 + y_1 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1, y_1 = 1, Z^* = d_1$$
$$x_1, y_1 \in \{0,1\}$$

گزینه ۱: رد نمی شود. $0 + d_1 \le d_1$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

گزینه ۲: رد می شود. $0-d_1 \neq 0$

گزینه ۳: رد می شود. $0-d_1 \neq d_1$.

گزینه ۴: رد نمی شود. $0+d_1 = d_1$

$$n=2$$
$$A: Max\ d_1x_1+d_2x_2$$
$$2(d_1x_1+d_2x_2) \le d_1+d_2$$
$$x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

$$B: Min\ d_1y_1+d_2y_2$$
$$2(d_1y_1+d_2y_2) \le d_1+d_2$$
$$y_1, y_2 \in \{0,1\}$$

$$C: Min\left|d_1x_1+d_2x_2-d_1y_1-d_2y_2\right|$$
$$x_1+y_1=1$$
$$x_2+y_2=1$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0,1\}$$
$$\downarrow$$
$$C: Min\left|d_1(1-y_1)+d_2(1-y_2)-d_1y_1-d_2y_2\right|$$
$$\rightarrow Min\left|d_1+d_2-2d_1y_1-2d_2y_2\right| \rightarrow Min\left|d_1(1-y_1)+d_2(1-y_2)\right|$$
$$\rightarrow d_1, d_2 > 0 \rightarrow y_1=0, y_2=1 \rightarrow \left|d_1-d_2\right|$$

گزینه ۴ رد می شود پس گزینه ۱ صحیح است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

از طرفی به صورت مستقیم هم می توان به جواب رسید:

$$A^* \to \sum d_i x_i \le \frac{1}{2}\sum d_i \Rightarrow Max \sum d_i x_i = \frac{1}{2}\sum d_i$$

$$B^* \to \sum d_i y_i \ge \frac{1}{2}\sum d_i \Rightarrow Min \sum d_i x_i = \frac{1}{2}\sum d_i$$

$$\to A^* + B^* \le \sum d_i$$

لذا باز هم گزینه ۱ صحیح است.

۴۶- مسئلهٔ برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad z = ۲x + y$$

$$\text{s.t.} \quad x + ۳y \geq ۵$$

$$۲x + y \geq ۶$$

$$x, y \geq ۰ \quad \text{صحیح و}$$

در صورت حل این مسئله توسط روش صفحات برش گُموری، کدام‌یک از محدودیت‌های زیر معادل یک برش گموری در اولین تکرار این روش است؟ ($s_۱$ و $s_۲$ به‌ترتیب متغیرهای مازاد محدودیت اول و دوم هستند)

۱) $y \leq s_۲$

۲) $\frac{۴}{۵}s_۱ + \frac{۲}{۵}s_۲ \geq \frac{۳}{۵}$

۳) $x \leq ۲ + s_۲$

۴) $\frac{۳}{۵}s_۱ + \frac{۴}{۵}s_۲ \geq \frac{۳}{۵}$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

متغیر پایه	Z	X	Y	S_1	S_2	RHS
Z	1	2	1	0	0	0
S_1	0	-1	-3	1	0	-5
S_2	0	-2	-1	0	1	-6
Z	1	0	0	0	1	6
S_1	0	0	-2.5	1	-0.5	-2
X	0	1	0.5	0	-0.5	3
Z	1	0	0	0	1	6
Y	0	0	1	-2/5	1/5	4/5
X	0	1	0	1/5	-3/5	13/5

$$\left(\frac{1}{5}-\left[\frac{1}{5}\right]\right)s_1+\left(-\frac{3}{5}-\left[-\frac{3}{5}\right]\right)s_2\geq\frac{13}{5}-\left[\frac{13}{5}\right]\rightarrow\frac{1}{5}s_1+\frac{2}{5}s_2\geq\frac{3}{5}\rightarrow\boxed{s_1+2s_2\geq 3}$$

$$\left(-\frac{2}{5}-\left[-\frac{2}{5}\right]\right)s_1+\left(\frac{1}{5}-\left[\frac{1}{5}\right]\right)s_2\geq\frac{4}{5}-\left[\frac{4}{5}\right]\rightarrow\frac{3}{5}s_1+\frac{1}{5}s_2\geq\frac{4}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}s_1+2s_2\geq 3\\ s_1=-5+x+3y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}-5+x+3y+2s_2\geq 3\\ s_2=-6+2x+y\rightarrow y=s_2+6-2x\end{array}\right\}\rightarrow -5+x+3\left(s_2+6-2x\right)+2s_2\geq 3$$

$$\rightarrow 18-5-5x+5s_2\geq 3\rightarrow -5x+5s_2\geq -10\rightarrow x-s_2\leq 2$$

لذا گزینه ۳ درست است.

۴۷- تابع درجه دوم $f(x)=\frac{1}{2}x^T Qx+q^T x+C$ را در نظر بگیرید که در آن $Q_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن است. در این مورد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) این تابع مقدار کمینهٔ متناهی دارد، اگر و فقط اگر مقدار بیشینهٔ آن نامتناهی باشد.

۲) اگر تمامی مقادیر ویژهٔ ماتریس Q مثبت باشند، این تابع تنها در یک نقطه، بیشینه می‌شود.

۳) اگر Q یک ماتریس نیمه‌معین مثبت باشد، این تابع همیشه دارای مقدار کمینهٔ متناهی است.

۴) تنها اگر Q تکین باشد (دترمینان آن صفر باشد)، امکان کمینه شدن تابع در چند نقطه وجود دارد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱: فرض کنید $Q=0$ باشد در این صورت $f(x)$ یک تابع خطی است و اگر کمینه نامتناهی باشد، بیشینه هم نامتناهی است که این به دلیل نبودن محدودیت روی x است. پس این گزینه غلط است.

گزینه ۲: مثال زیر را در نظر بگیرید

$$f(x)=x^2+x+1 \rightarrow Q=1$$

که ماتریس Q ماتریس مثبت معین است. این تابع بیشینه متناهی ندارد لذا غلط است.

گزینه ۳: Q یک ماتریس نیمه معین مثبت است لذا با توجه به گزینه ۳ که دارای کمینه متناهی است در صورتیکه تابع خطی باشد، دارای کمینه نامتناهی است. لذا غلط است.

گزینه ۴: در مثال $f(x)=x+1$، دترمینان Q صفر است و کمینه ندارد و عبارت می تواند درست باشد لذا گزینه ۴ درست است.

۴۸- گزینهٔ درست کدام است؟

۱) حداقل یکی از دو سیستم $c^T x < 0$ و $Ax \le 0$ و سیستم $y \ge 0$ و $A^T y + c = 0$ شدنی است.

۲) هر دو سیستم $c^T x < 0$ و $Ax \le 0$ و سیستم $y \ge 0$ و $A^T y + c = 0$ می‌توانند همزمان ناشدنی باشند.

۳) سیستم $c^T x > 0$ و $Ax \le 0$ ناشدنی است اگر و فقط اگر سیستم $y \ge 0$ و $A^T y = c$ ناشدنی باشد.

۴) سیستم $c^T x < 0$ و $Ax \ge 0$ شدنی است اگر و فقط اگر سیستم $y \ge 0$ و $A^T y = c$ شدنی باشد.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

لم فارکاس: یکی و فقط یکی از دوس سیستم زیر جواب دارند.

$$System\ 1: Ax \geq 0, cx < 0$$

$$System\ 2: WA = c, w \geq 0$$

گزینه ۱:

$$-A \rightarrow A$$

$$system1 \rightarrow A \rightarrow -A \Rightarrow -Ax \geq 0, cx < 0 \Rightarrow Ax \leq 0, cx < 0$$

$$system2 \rightarrow A \rightarrow -A \Rightarrow y(-A) = c, w \geq 0 \Rightarrow A^T y + c = 0, w \geq 0$$

فقط و فقط یکی از دو سیستم فوق جواب دارند لذا گزینه ۱ غلط است.

گزینه ۲: براساس لم فارکاس، عملیات گزینه ۱، فقط و فقط یکی جواب دارد و لذا امکان ناشدنی شود هر دو نیست لذا این گزینه غلط است.

گزینه ۳: با توجه به لم فارکاس اشتباه است چون امکان ناشدنی بودن هر دو نیست.

گزینه ۴: با توجه به لم فارکاس امکان شدنی شدن هر دو نیست لذا اشتباه است.

هیچ گزینه این درست نیست.

۴۹- مدل بهینه‌سازی زیر را درنظر بگیرید:

$$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

فرض کنید توابع تک‌متغیرهٔ $p_1(y)$، $p_2(y)$، $p_3(y)$ و $p_4(y)$ برای $0 \leq y \leq 1$ همواره مقادیری نامنفی کسب می‌کنند. آنگاه اگر تابع هدف $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ برابر کدام یک از توابع زیر باشد، امکان حل مسئلهٔ فوق با روش برنامه‌ریزی پویا همواره وجود نخواهد داشت؟ (متغیر تصمیم در هر مرحله می‌تواند تنها یکی از x_iها باشد.)

۱) $(p_1(x_1) + p_2(x_2))^2 - \sum_{i=1}^{4} p_i^2(x_i)$

۲) $p_1(x_1)\, p_2(x_2) + p_3(x_3)\, p_4(x_4)$

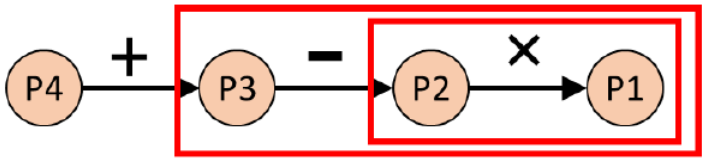
۳) $p_1(x_1)\, p_2(x_2)(p_3(x_3) + p_4(x_4))$

۴) $p_1(x_4) + p_2(x_3)\, p_3(x_2) + p_4(x_1)$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

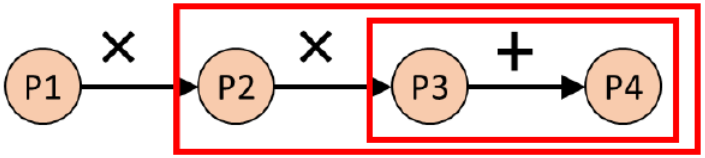
حل:

گزینه ۱: $2p_1p_2 - p_3^2 - p_4^2 \Rightarrow$

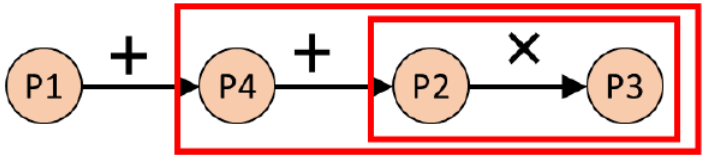


گزینه ۲: $p_1p_2 + p_3p_4 \Rightarrow \times$

گزینه ۳: $p_1p_2(p_3 + p_4) \Rightarrow$



گزینه ۴: $p_1 + p_2p_3 + p_4 \Rightarrow$



گزینه ۲ صحیح است.

۵۰- بازی ماتریسی (یا همان بازی دو نفرهٔ مجموع ـ صفر) با ماتریس پیامد $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ را که در آن a، b، c و d همگی اعدادی مثبت هستند را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد این بازی صحیح است؟

۱) بازی فاقد تعادل نش خالص است.

۲) بازی فاقد هرگونه تعادل نش (خالص یا مخلوط) است.

۳) ارزش انتظاری بازی برابر $ad - bc$ است.

۴) در تعادل نش یک بازیکن دارای استراتژی خالص و دیگری دارای استراتژی مخلوط است.

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

$$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$$

$$player1: Max\left(Min\left(rows\right)\right)=Max\left(-b,-c\right)$$

$$player2: Min\left(Max\left(colums\right)\right)=Min\left(a,d\right)$$

چون دو عبارت فوق برابر نیست لذا جواب تعادل خالص نداریم. سوال این است که ایا تعادل نش مختلط داریم:

اگر $x1$ احتمال انتخاب سطر ۱ و $x2$ احتمال انتخاب سطر ۲ از سوی بازیگر ۱ باشد لذا عایدی این بازی از نظر بازیگر ۱ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Max\left(Min\left(ax_1-cx_2,-bx_1+dx_2\right)\right)$$

$$x_1+x_2=1 \qquad \rightarrow \quad Max\left(\overbrace{Min\left(ax_1-c(1-x_1),-bx_1+d(1-x_1)\right)}^{Z}\right)$$

$$x_1,x_2\geq 0$$

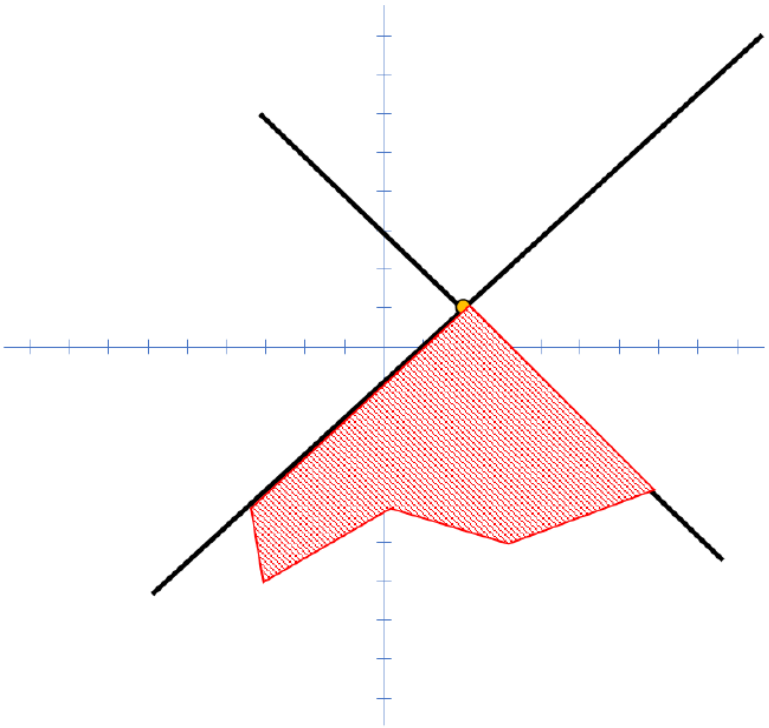
$$\rightarrow Max\ Z$$

$$Z\leq (a+c)x_1-c$$

$$Z\leq (-b-c)x_1+d$$

$$0\leq x_1\leq 1$$

حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



محل برخورد دو خط، جواب بهینه است:

$$\begin{cases} Z=(a+c)x_1-c \\ Z=(-b-d)x_1+d \end{cases} \rightarrow x_1=\frac{c+d}{a+b+c+d}, x_2=\frac{a+b}{a+b+c+d}$$

دارای جواب تعادل مختلط است لذا گزینه ۱ صحیح است.

با تشکر

راه های ارتباطی با ما

www.behinehyab.com

behinehyab@gmail.com