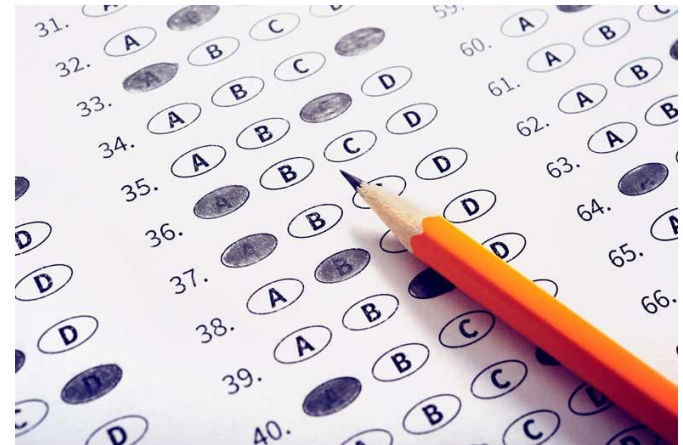
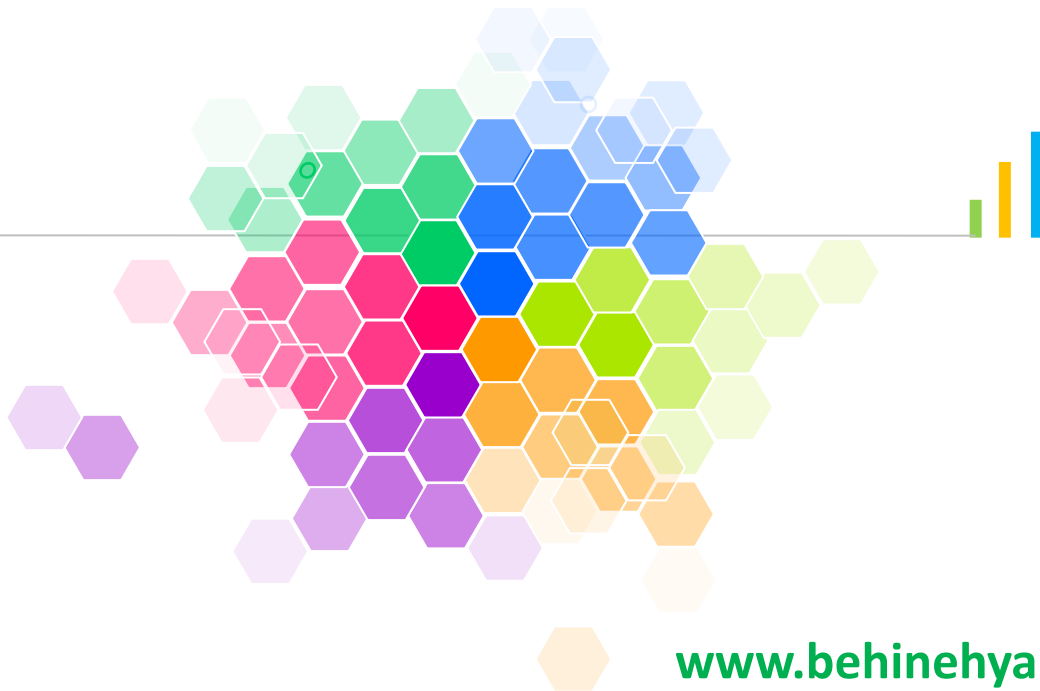


به نام خدا



# کنکور کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ۱۳۹۸



## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۱-  $n$  زوج  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  از داده‌های یک سیستم در اختیار است که در آن  $x_i \in \mathbb{R}^k$  ورودی‌های سیستم و  $y_i \in \mathbb{R}$  خروجی سیستم هستند. می‌خواهیم تقریب خطی  $\hat{y}$  را برای  $y$  با استفاده از بردار  $x$  براساس این داده‌ها بنا کنیم به نحوی که بیشینه قدرمطلق خطاها کمینه شود  $(\hat{y} = a + b^T x)$ . در مورد مدل بهینه‌سازی متناظر با این مسئله، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) یک مدل برنامه‌ریزی خطی با  $2n$  محدودیت و  $2n+1$  متغیر
- (۲) یک مدل برنامه‌ریزی خطی با  $2n$  محدودیت و  $n+2$  متغیر
- (۳) یک مدل برنامه‌ریزی خطی با  $n$  محدودیت و  $2n+1$  متغیر
- (۴) یک مدل برنامه‌ریزی خطی با  $n$  محدودیت و  $n+2$  متغیر

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - a - b_1 X_{i1} - b_2 X_{i2} - \dots - b_k X_{ik}$$

$$\min \max_i |e_i| = \min \underbrace{\max_i |y_i - a - b\mathbf{X}_i|}_Z$$

$\min Z$

s.t.

$$Z \geq |y_i - a - b\mathbf{X}_i| \quad i = 1, \dots, n$$

$\min Z$

s.t.

→

$$Z \geq y_i - a - b\mathbf{X}_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$-Z \leq y_i - a - b\mathbf{X}_i \quad i = 1, \dots, n$$

تعداد محدودیت ها برابر  $2n$  و تعداد متغیرها  $n+2$  است. لذا گزینه ۲ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۲- مدل بهینه‌سازی روبه‌رو را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in S \end{array}$$

که در آن  $S$  مجموعه‌ای محدب و  $f$  تابعی محدب و مشتق‌پذیر است. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف - هر کمینه محلی این مدل کمینه عمومی است.

ب - هر جواب بهینه در  $\nabla f(x) = 0$  صدق می‌کند.

ج - مجموعه جواب‌های بهینه کراندار است.

د - مجموعه جواب‌های بهینه لزوماً محدب نیست.

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

۰ (۴)

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

الف) این ویژگی یک مسئله برنامه ریزی محدب است. محدب بودن تضمینی برای برابری جواب بهینه محلی با بهینه جهانی است. لذا درست است.

ب) لزوماً برقرار نیست اگر جواب در گوشه بازه متغیر اتفاق بیافتد، می تواند شیب در آن نقطه صفر نباشد لذا غلط است.

ج) این امکان دارد که فضای امکان پذیر نامحدود باشد مثلاً یک مسئله برنامه ریزی خطی، محدب است ولی می توان فضای امکان پذیر نامحدود باشد و باعث شود که جواب بی کران شود لذا این گزینه غلط است.

د) چون مجموعه محدب است ترکیب تمامی جواب ها از جمله جواب های بهینه مجموعه محدب را تشکیل می دهد لذا این گزینه غلط است.  
گزینه ۳ صحیح است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۳- تابع  $z^*(\lambda)$  که برابر مقدار بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی پارامتری زیر است، همواره چه خصوصییتی نسبت به  $\lambda$  دارد؟

$$\min z(\lambda) = (c - \lambda d)^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

(۲) غیرنزولی و پیوسته

(۴) محدب

(۱) غیرصعودی و مشتق‌پذیر

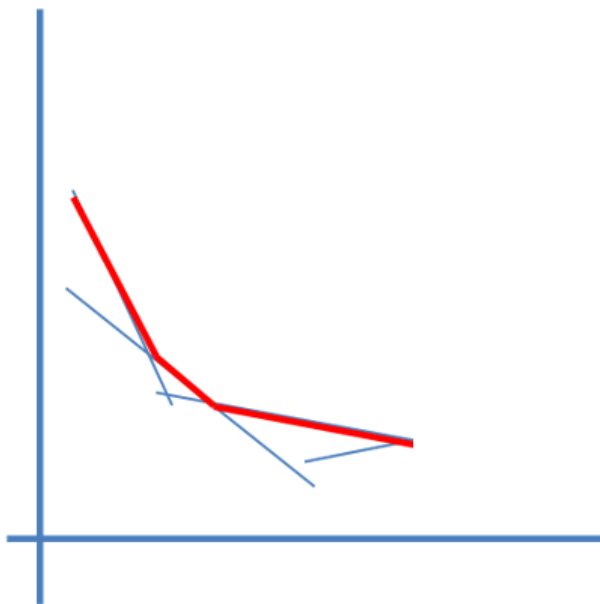
(۳) مقعر

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

مشتق اول تابع  $z^*$  بر حسب منفی است و لذا می تواند تابع  $z^*$  غیر صعودی باشد ولی به دلیل محدودیت  $Ax=b$  می تواند در مرزها مشتق پذیر نباشد. لذا این گزینه حذف است. گزینه ۲ هم به دلیل غیر صعودی بودن حذف می شود.

تابع  $z^*$  را می توان به صورت زیر بیان کرد.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



لذا تابع  $Z^*$  محدب است و گزینه ۴ درست است.



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۴- اگر تمامی درایه‌های ماتریس‌های  $A_1$  و  $A_2$  مثبت باشند، آنگاه برای مسئله زیر، کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A_1 x \leq b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(۲) جواب شدنی وجود دارد.

(۴) مجموعه موجه مسئله دوگان کراندار است.

(۱) مجموعه موجه مسئله تهی یا کراندار است.

(۳) مقدار بهینه، می‌تواند متناهی نباشد.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } c^T x & \\ A_1 x \leq b_1 & \\ A_2 x \geq b_2 & \\ x \geq 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Min } x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{array}$$

جواب شدنی ندارد گزینه ۲ رد می شود.

گزینه ۳: با توجه به مثبت بودن  $A_1, A_2, x_1 \geq 0$  امکان نامتناهی بودن فضای امکان پذیر نیست. لذا گزینه ۳ صحیح نیست.

گزینه ۴: با توجه به این که محدودیت دوم به صورت  $\geq$  است، با ضرب ۱-، محدودیت به صورت  $\leq$  می شود و باعث می شود  $A_2$  منفی شود و همچنین سبب می شود که مدل دوگان با ضرایب منفی شود لذا گزینه ۴ صحیح نیست.

گزینه ۱: بسته به مقدار  $b_1$  و  $b_2$  می توان فضای امکان پذیر تهی و غیر تهی باشد لذا گزینه ۱ صحیح است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۳۵- برای  $y > 0$  و  $x \in \mathbb{R}$ ، کدام تابع محدب است؟

$$\frac{x}{y^2} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{y + 2} \quad (2)$$

$$\frac{y}{y + 2} \quad (3)$$

$$\frac{x + y^2}{y} \quad (4)$$

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱:

$$\frac{x}{y^2} \rightarrow H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{y^3} \\ -\frac{2}{y^3} & \frac{6x}{y^4} \end{bmatrix} \rightarrow \det(H) = -\frac{4}{y^6} < 0$$

برای محدب بودن، بایستی دترمینان مثبت باشد لذا این تابع نه محدب است و نه مقعر

گزینه ۲:

$$\frac{x^2 + y^2}{y + 2} \rightarrow H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{y+2} & -\frac{2x}{(y+2)^2} \\ -\frac{2x}{(y+2)^2} & \frac{2(x^2+4)}{(y+2)^3} \end{bmatrix} \rightarrow \det(H) = \frac{16}{(y+2)^4} > 0$$

لذا تابع  $f$  محدب است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

گزینه ۳:

$$\frac{y}{y+2} = \frac{y+2-2}{y+2} = 1 - \frac{2}{y+2} \rightarrow f'' = \frac{-4}{(y+2)^3} < 0$$

این تابع مقعر است.

گزینه ۴:

$$\frac{x+y^2}{y} = \frac{x}{y} + y \rightarrow H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix} \rightarrow \det(H) = -\frac{1}{y^4} < 0$$

لذا ماتریس  $H$  نه معین مثبت است و نه معین منفی لذا نه محدب است و نه مقعر

لذا گزینه ۲ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۶- دو مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$P_1 : \max t = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$x \in S$$

$$P_2 : \min z = b^T y + \max_{x \in S} \{(c^T - y^T A)x\}$$

$$\text{s.t. } y \geq 0$$

که در آن  $S$  یک مجموعه دلخواه است. در مورد تفاضل مقدار بهینه  $P_2$  از مقدار بهینه  $P_1$   $(t^* - z^*)$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(۲) عددی دلخواه

(۱) صفر

(۴) عددی نامثبت

(۳) عددی نامنفی

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$\text{Max } t = c^T x \quad \text{Min by}$$

$$Ax \leq b(y) \quad \rightarrow \quad Ay \geq c^T$$

$$x \in S \quad y \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} Z^* = b^T \bar{y} + \max (c^T x - \bar{y}^T Ax) &\geq b^T \bar{y} + c^T x - \bar{y}^T Ax \\ A\bar{x} \leq b &\rightarrow \bar{y}^T A\bar{x} \leq \bar{y}^T b \rightarrow -\bar{y}^T A\bar{x} \geq -\bar{y}^T b \end{aligned} \right\} \rightarrow Z^* \geq b^T \bar{y} + c^T x - \bar{y}^T Ax \geq b^T \bar{y} + c^T x - \bar{y}^T b = t^*$$

$$Z^* \geq t^* \rightarrow t^* - Z^* \leq 0$$

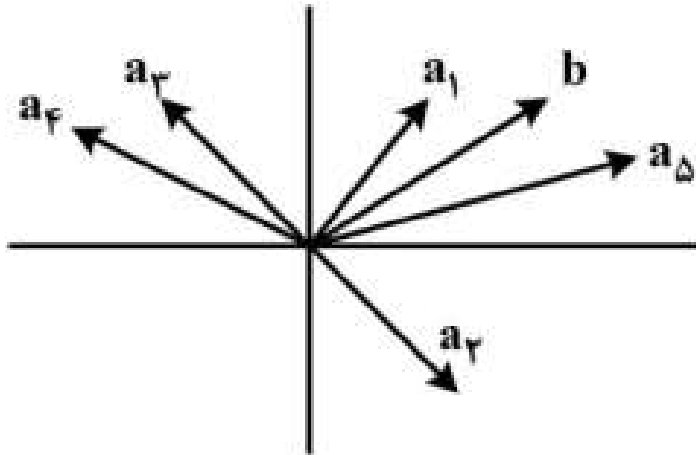
اختلاف نامثبت است لذا گزینه ۴ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۷- چند وجهی زیر را در نظر بگیرید:

$$P = \{x \geq 0 : x_1 a_1 + \dots + x_\Delta a_\Delta = b\}$$

که در آن  $a_1, \dots, a_\Delta$  و  $b$  مطابق شکل زیر هستند:



تعداد نقاط فرین چند وجهی  $P$  کدام است؟

۶ (۱)

۵ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

تعداد نقاط فرین همان تعداد پایه های موجود است. از ترکیب هر دو خط  $a_1$  تا  $a_5$  بدست می آید. به شرط آنکه با بردار  $b$  زاویه کمتر از  $90^\circ$  تشکیل دهد.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



ردیف	بردار منتخب	ترکیب خطی	موجه
1	$a_1$ and $a_2$	+	OK
2	$a_1$ and $a_3$	-	NG
3	$a_1$ and $a_4$	-	NG
4	$a_1$ and $a_5$	+	OK
5	$a_2$ and $a_3$		NG
6	$a_2$ and $a_4$	-	NG
7	$a_2$ and $a_5$	-	NG
8	$a_3$ and $a_4$	-	NG
9	$a_3$ and $a_5$	+	OK
10	$a_4$ and $a_5$	+	OK

اگر بردار  $b$  بین دو خط باشد، ترکیب خطی مثبت و در غیر این صورت منفی است.  
 ردیف ۵ لحاظ نمی گردد چون در یک راستا هستند.  
 لذا گزینه ۳ صحیح است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

- ۳۸- مقدار دترمینان ماتریس پایه در هر تکرار روش سیمپلکس حمل و نقل کدام است؟
- (۱) ۱ یا -۱  
(۲) عدد صحیح دلخواه غیر صفر  
(۳) عدد صحیح مثبت  
(۴) عدد صحیح منفی

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

چون ماتریس شبکه حمل و نقل یونی مودال است، لذا دترمینان آن مثبت یا منفی ۱ است لذا گزینه ۱ صحیح است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۳۹- فرض کنید  $a_1, \dots, a_k$  بردارهای  $n$  بعدی غیرصفر باشند ( $k \leq n$ ). کدام گزاره صحیح است؟  $A = [a_1, \dots, a_k]$

(۱) اگر  $k = n$ ، ماتریس  $A$  دارای حداقل یک مقدار ویژه صفر است.

(۲) اگر این  $k$  بردار مستقل باشند، آنگاه دویه‌دو برهم عمود هستند.

(۳) اگر این  $k$  بردار دویه‌دو برهم عمود باشند، آنگاه مستقل هستند.

(۴) بعد فضای پوچ تبدیل خطی متناظر با  $A$ ، غیرصفر است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

گزینه ۱: اگر یک مقدار ویژه برابر صفر باشد، با توجه به این که دترمینان ماتریس  $A$  برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه است لذا ماتریس  $A$  وابسته می شود که در صورت سوال در این خصوص چیزی گفته نشده است و لذا این گزینه غلط است.

گزینه ۲: مستقل بودن بردارها نشانه عمود بودن آن ها نیست مثلاً

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A_1$  و  $A_2$  از هم مستقل هستند ولی  $A_1$  بر  $A_2$  عمود نیستند.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

گزینه ۳:

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_k \lambda_k = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

$$a_1^T (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_k \lambda_k) = 0 \rightarrow a_1^T a_1 \lambda_1 + \cancel{a_1^T a_2}_{0} \lambda_2 + \dots + \cancel{a_1^T a_k}_{0} \lambda_k = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$$

برای  $K > 1$  هم به طور مشابه می‌توان نشان داده که:

$$\lambda_k = 0$$

لذا گزینه ۳ صحیح است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

گزینه ۴:

فضای پوچ ماتریس  $A$  از حل دستگاه زیر بدست می آید.

$$Ax = 0$$

اگر ماتریس  $A$  مستقل خطی باشند،  $X=0$  است ولی اگر  $A$  مستقل نباشد آنگاه  $X$  غیر صفر است و لذا این گزینه صحیح نیست.

لذا در نهایت گزینه ۳ صحیح است.



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۰- مدل بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = 3x_1 - 3x_2 - 27x_3 - 26x_4 - 16x_5 + 4x_6$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 - x_6 \leq b_1$$

$$x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 5x_6 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

به ازای هر انتخاب دلخواه برای  $b_1$  و  $b_2$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) لزوماً جواب بهینه نداریم.

(۲) فضای موجه مسئله، کراندار است.

(۳) در هر جواب بهینه هر دو محدودیت فعال هستند.

(۴) یک متغیر مشترک بدون تأثیر بر مقدار بهینه قابل حذف است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

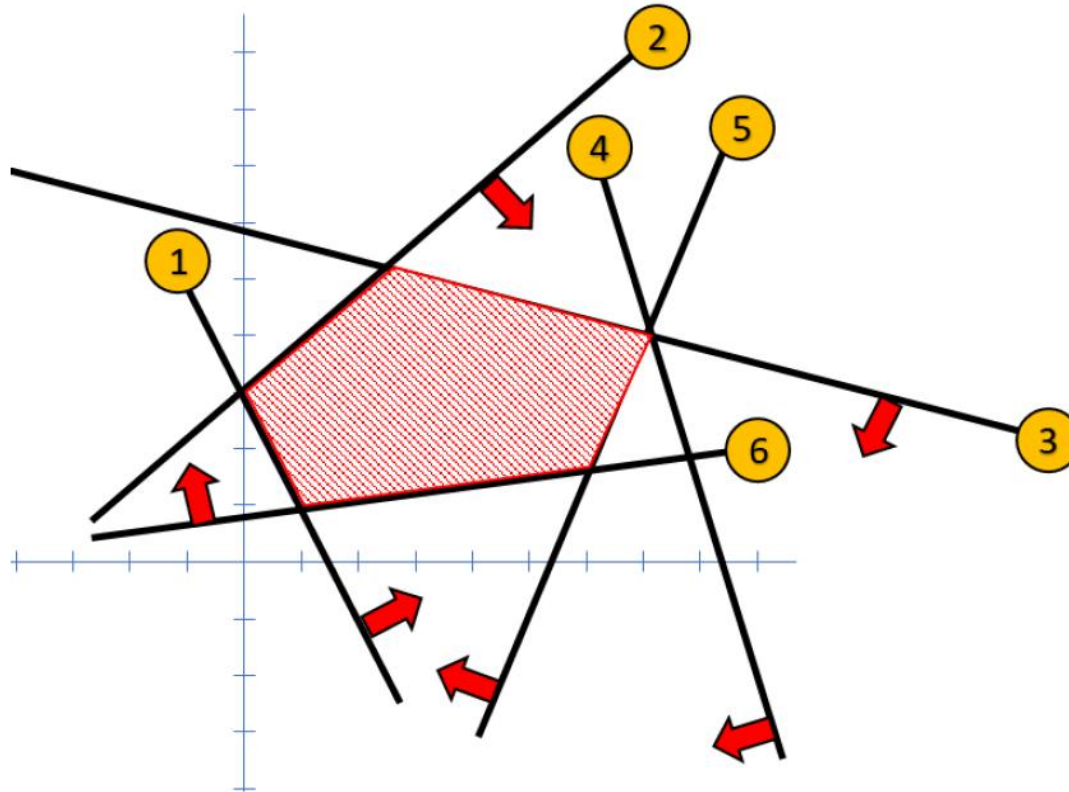


حل:

اگر  $w_1$  و  $w_2$  را متغیر همزاد محدودیت اول و دوم در نظر بگیریم.

$$\begin{array}{ll} \text{Min } b_1 w_1 + b_2 w_2 & \\ 2w_1 + w_2 \geq 3 & \\ w_1 - w_2 \geq -3 & \\ -w_1 - 4w_2 \geq -27 & \longrightarrow \\ -3w_1 - w_2 \geq -26 & \\ -3w_1 + w_2 \geq -16 & \\ -w_1 + 5w_2 \geq 4 & \\ \text{Min } b_1 w_1 + b_2 w_2 & \\ 1) 2w_1 + w_2 \geq 3 & \\ 2) -w_1 + w_2 \leq 3 & \\ 3) w_1 + 4w_2 \leq 27 & \\ 4) 3w_1 + w_2 \leq 26 & \\ 5) 3w_1 - w_2 \leq 16 & \\ 6) -w_1 + 5w_2 \geq 4 & \\ w_1, w_2 \geq 0 & \end{array}$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



محدودیت ۴ در فضای امکان پذیر موثر نیست لذا متغیر  $x_4$  از مدل اولیه قابل حذف است و لذا گزینه ۴ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۱- جدول نهایی روش سیمپلکس برای حل یک مسئله کمینه‌سازی به شکل زیر است:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS
$x_3$	۳	۰	۱	۰	۰	۲
$x_2$	-۲	۱	۰	a	۰	c
$x_5$	۰	۰	۰	-۲	۱	۴
	-۲	۰	۰	b	۰	

کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) اگر  $b > 0$ ، آنگاه  $a \geq 0$  است.
- (۲) اگر  $b < 0$  و  $c = 0$ ، آنگاه جواب تباهیده متناظر با چند پایه وجود دارد.
- (۳) اگر  $b = 0$ ، آنگاه مجموعه جواب‌های بهینه مسئله شامل بیش از یک عضو و مجموعه‌ای کراندار است.
- (۴) اگر  $a = 0$ ، به ازای مقادیر نامنفی ضرایب تابع هدف  $x_4$  و  $x_5$ ، پایه فعلی بهینه است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

گزینه ۱: اگر  $b > 0$  باشد می توان  $x_4$  را وارد پایه کرد. حالا اگر  $a < 0$  باشد، جواب بی کران و اگر  $a > 0$  باشد، جواب بهینه دیگر به دست می آید که در صورت سوال چیزی گفته نشده است که روی  $a$  محدودیت ایجاد شود لذا این گزینه غلط است.

گزینه ۲: اگر  $c = 0$  باشد و می توان  $x_2$  را از پایه خارج و  $x_1$  را وارد پایه کرد تا جواب دیگر تباهیده بدست آید لذا نیاز به شرطی برای  $b$  نیست لذا این گزینه غلط است.

گزینه ۳: اگر  $b = 0$  باشد اگر  $a < 0$  باشد جواب مسئله بی کران می شود و از کران داری خارج می شود لذا برای این حالت نیاز به  $a > 0$  است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

گزینه ۴: اگر ضریب متغیر  $x_4$  و  $x_5$  به ترتیب  $c_4$  و  $c_5$  باشد در جدول نهایی با مقدار  $-c_4$  و  $-c_5$  آورده می شود. برای صفر کردن  $c_5$  برای این که  $x_5$  پایه است،  $c_5$  بربر سطر مربوط به  $x_5$  را به سطر تابع هدف اضافه می کنیم در این صورت ضریب  $x_5$  صفر میشود . ضریب  $x_4$  برابر

$$b - c_4 + (-2c_5)$$

می شود. چون  $-c_4 - 2c_5$  منفی است، لذا با توجه به بهینگی جدول ( $b < 0$ )، باز هم جدول بهینه می ماند لذا این گزینه درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۲- کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) حافظه مورد نیاز در روش سیمپلکس تجدید نظر شده، کمتر از روش سیمپلکس است.
- ۲) حجم محاسبات در روش سیمپلکس تجدید نظر شده، کمتر از سیمپلکس است.
- ۳) در شرایط شروع مشابه تعداد تکرارهای روش سیمپلکس تجدید نظر شده، می‌تواند کمتر از روش سیمپلکس باشد.
- ۴) سیمپلکس تجدید نظر شده، برای شروع نیاز به یک پایه موجه اولیه ندارد.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

روش سیمپلکس تجدید نظر شده از نظر حافظه نسبت به روش سیمپلکس برتری دارد لذا گزینه ۱ صحیح است.



## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۳- یک مدل بهینه سازی خطی عدد صحیح توسط روش شاخه و کران در حال حل بوده، لکن به علت کمبود وقت قبل از هرس شدن تمامی گره های درخت جستجو، روند حل متوقف شده است. کم ترین و بیش ترین مقادیر تابع هدف در جواب های موجه پیدا شده برابر ۱۰۰ و ۱۴۰ است. مقادیر کران پایین متناظر با چهار گرهی که هرس نشده اند برابر ۸۵، ۸۰، ۹۵ و ۹۰ است. اگر روند حل کامل می شد، حداکثر چند درصد بهبود حاصل می شد؟

(۱) ۵٪

(۲) ۲۰٪

(۳) ۴۰٪

(۴) ۷۵٪

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

در این حالت، در بهترین حالت در شاخه ۸۰، امکان یافتن جواب بهینه صحیح است. بهترین جواب فعلی ۱۰۰ است  
لذا  $20\% = \frac{100 - 80}{100} \times 100$  بهترین بهبود در تابع هدف خواهد بود لذا گزینه ۲ درست است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۴- برای  $0 < \alpha < 1$  فرض کنید  $x^*$  جواب بهینه مدل زیر است:

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha f(x) + (1 - \alpha)g(x) \\ \text{s.t.} & x \in S \end{array}$$

و  $y^*$  جواب بهینه مدل زیر باشد. کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} \min & f(y) \\ \text{s.t.} & y \in S, g(y) \leq g(x^*) \end{array}$$

$$f(y^*) < f(x^*) \quad (۲)$$

$$g(y^*) < g(x^*) \quad (۴)$$

$$f(y^*) \geq f(x^*) \quad (۱)$$

$$g(y^*) = g(x^*) \quad (۳)$$

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

چون فضای امکان پذیر هر دو مسئله یکی است لذا  $y^*$  که عضوی از  $S$  است هم در مسئله ۱ می تواند قرار بگیرد ولی مقدار تابع هدف مسئله ۱ را از مقدار  $x^*$  در تابع هدف مدل ۱ بیشتر می کند یعنی

$$\alpha f(x^*) + (1-\alpha)g(x^*) \leq \alpha f(y^*) + (1-\alpha)g(y^*)$$

از محدودیت مسئله ۲ داریم که  $g(y^*) \leq g(x^*)$ . لذا در رابطه بالا حتماً  $f(y^*) \geq f(x^*)$  باشد تا رابطه برقرار باشد.

$$\underbrace{\alpha f(x^*)}_A + \underbrace{(1-\alpha)g(x^*)}_B \leq \underbrace{\alpha f(y^*)}_C + \underbrace{(1-\alpha)g(y^*)}_D$$

$$A + B \leq C + D \xrightarrow{B \geq D} C \geq A$$

یعنی  $f(x^*) \leq f(y^*)$  لذا گزینه ۱ صحیح است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۵- ارتباط بین متغیرهای صفر و یک  $x$ ،  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$  و  $y_4$  به این صورت است که اگر  $x$  مقدار یک بگیرد، آنگاه سایر متغیرها می‌توانند مقدار یک کسب کنند. کدام یک از دسته محدودیت‌های زیر این ارتباط را بیان می‌کند و از طرفی دارای آزادسازی بهتری است (چندوجهی متناظر کوچکتری دارد)؟

$$(۱) \quad y_1 + y_2 + y_3 \leq 3x, \quad y_1 + y_2 + y_4 \leq 3x$$

$$(۲) \quad y_1 + y_2 \leq 2x, \quad y_3 + y_4 \leq 2x$$

$$(۳) \quad y_1 + y_2 \leq 2x, \quad y_3 \leq x, \quad y_4 \leq x$$

$$(۴) \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 4x$$

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

معادل ریاضی محدودیت اشاره شده به صورت زیر است:

$$y_1 \leq x$$

$$y_2 \leq x$$

$$y_3 \leq x$$

$$y_4 \leq x$$

برای این که از روش ازاد سازی، عملکرد بهتری داشته باشیم، باید تا آنجا که می شود از جمع کردن محدودیت ها خودداری کنیم لذا گزینه ۳ از همه به محدودیت های فوق نزدیک تر است لذا گزینه ۳ صحیح است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

۴۶- یک کشتی صید نهنگ در ژاپن می‌تواند در فاصله نزدیک یا دور فعالیت کند. صید در فاصله نزدیک یک هفته و در فاصله دور دو هفته به طول می‌انجامد. شانس صید نهنگ در فاصله نزدیک  $5/4$  و در فاصله دور  $5/9$  است. یک دوره چهار هفته‌ای پیش روی این کشتی برای صید است. در جدول زیر ارزش انتظاری نهنگ صید شده در بازار آخر هر هفته داده شده است:

هفته	۱	۲	۳	۴	$\geq 5$
ارزش انتظاری	۱۰	۹	۱۰	۹	۰

بیشینه میانگین ارزش انتظاری برای این کشتی چه مقداری است؟

(۱)  $16/6$

(۲)  $16/2$

(۳)  $15/7$

(۴)  $15/2$

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

باید امید ریاضی که عایدی است برای کلیه حالت ها محاسبه شود و سپس بهترین انتخاب شود::

شماره حالت	فاصله ماهگیری در هفته اول	فاصله ماهگیری در هفته اول	فاصله ماهگیری در هفته اول	فاصله ماهگیری در هفته اول	مقدار امید عایدی
۱	نزدیک	نزدیک	نزدیک	نزدیک	$0.4[10+9+10+9]=15.2$
۲	نزدیک	نزدیک	دور	-	$0.4*10+0.4*9+0.9*9=15.7$
۳	نزدیک	دور	-	نزدیک	$0.4*10+0.9*10+0.4*9=16.6$
۴	دور	-	نزدیک	نزدیک	$0.9*9+0.4*10+0.4*9=15.7$
۵	دور	-	دور	-	$0.9*9+0.9*9=16.2$

۱) حالت ۳ بیشترین عایدی را دارد لذا گزینه ۱ درست است.



# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

※ مسئله بهینه‌سازی و جدول نهایی حاصل از روش سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید که در آن  $S_1, S_2$  و  $S_3$  متغیرهای لقی (slack variables) متناظر با محدودیت‌های اول تا سوم هستند. با توجه به این اطلاعات به سؤال‌های ۴۷ و ۴۸ پاسخ دهید.

$$\max \quad Z = c_1x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leq 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leq 3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	RHS
$x_3$	۱	۰	۱	۶	۰	$b_1$	۲
$S_2$	۲	۰	۰	۲	۱	-۱	$b_2$
$x_2$	۰	۱	۰	-۳	۰	۱	۱
	۱	$a_1$	۰	$a_2$	۰	۱	

۴۷- مقدار  $a_1 + ca_2$  کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & b_1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = bB^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ b_2 \\ 1 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & b_1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ b_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 4b_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow b_1 = -1, b_2 = 1$$

$$\bar{c}_B = c_B B^{-1} = (2 \quad 0 \quad 3) B^{-1} = (a_2 \quad 0 \quad 1)$$

$$= (2 \quad 0 \quad 3) \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (3 \quad 0 \quad 1) \rightarrow a_2 = 3$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

متغیر پایه	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	RHS
Z	1	a1	0	0	a2	0	1	
$X_3$	0	0	0	1	6	0	b1	2
$S_2$	0	0	0	0	2	1	-1	b2
$X_2$	0	1	1	0	-3	0	1	1
Z	1	1	a1-1	0	a2+3	0	0	
$X_3$	0	1	-b1	1	6+3b1	0	0	2-b1
$S_2$	0	2	1	0	-1	1	0	b2+1
$S_3$	0	0	1	0	-3	0	1	1
Z	1	$1-(a2+3)/(6+3b1)$	$a1-1+b1*(a2+3)/(6+3b1)$	$-(a2+3)/(6+3b1)$	0	0	0	
$S_1$	0	$1/(6+3b1)$	$-b1/(6+3b1)$	$1/(6+3b1)$	1	0	0	$(2-b1)/(6+3b1)$
$S_2$	0	$1/(6+3b1)+2$	$-b1/(6+3b1)+1$	$1/(6+3b1)$	0	1	0	$(2-b1)/(6+3b1)+b2+1$
$S_3$	0	$3/(6+3b1)$	$-3b1/(6+3b1)+1$	$3/(6+3b1)$	0	0	1	$3(2-b1)/(6+3b1)+1$

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



$$\frac{2-b_1}{6+3b_1} = 1 \rightarrow 2-b_1 = 6+3b_1 \rightarrow -4 = 4b_1 \rightarrow b_1 = -1$$

$$-\frac{a_2+3}{6+3b_1} = -2 \xrightarrow{b_1=-1} -(a_2+3) = -6 \rightarrow a_2 = 3$$

$$\frac{2-b_1}{6+3b_1} + b_2 + 1 = 3 \xrightarrow{b_1=-1} 1+b_2+1 = 3 \rightarrow b_2 = 1$$

$$-c = 1 - \frac{a_2+3}{6+3b_1} \xrightarrow{a_2=3, b_1=-1} -c = 1 - \frac{3+3}{6+3 \times -1} \rightarrow c = 1$$

چون  $x_2$  در جدول اول اساسی است لذا داریم:

$$a_1 = 0 \longrightarrow a_1 + ca_2 = 0 + 1 \times 3 = 3$$

گزینه ۳ صحیح است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



۴۸- مقدار  $b_2 + a_3 b_1$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۰

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد



حل:

$$a_{31} = \frac{3}{6+3b_1} = \frac{3}{6+3(-1)} = 1 \longrightarrow b_1 + a_{31}b_2 = -1 + 1 \times 1 = 0$$

گزینه ۴ صحیح است.

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

- ۴۹- یک شرکت کوچک فراوری شیر نیاز به جمع آوری شیر از ۲۵ مزرعه دارد. شرکت تانکری با ظرفیت حمل ده هزار لیتر دارد. ۱۵ مزرعه کوچک و ۱۰ مزرعه بزرگ هستند. مزارع کوچک لازم است یک روز در میان و مزارع بزرگ هر روز بازدید شوند. اگر بخواهیم برنامه مسیریابی با کمترین هزینه حمل و نقل در دو روز متوالی را تعیین کنیم، براساس متغیرهای زیر کدام دسته از محدودیت‌ها برای مدل‌سازی مسئله تصمیم‌گیری مذکور صحیح و لازم است؟
- برای  $k=1,2$  و  $i, j=1, \dots, 25$ ,  $i \neq j$ ، متغیر صفر و یک  $x_{ijk}$  تعیین می‌کند که آیا در مسیر روز  $k$  ام از مزرعه  $i$  مستقیماً به مزرعه  $j$  حرکت انجام شده است ( $x_{ijk}=1$ ) یا خیر.
  - برای  $k=1,2$  و  $i=1, \dots, 15$ ، متغیر صفر و یک  $y_{ik}$  تعیین می‌کند که آیا در روز  $k$  ام مزرعه  $i$  بازدید شده است ( $y_{ik}=1$ ) یا خیر.

$$x_{ijk} + x_{jik} \leq y_{ik} \quad k=1,2 \quad (1)$$

$$i \neq j, i, j=1, \dots, 25$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ijk} = \sum_{j \neq i} x_{jik} = y_{ik} \quad k=1,2 \quad (2)$$

$$i=1, \dots, 15$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ijk} + \sum_{j \neq i} x_{jik} = 2 \quad k=1,2 \quad (3)$$

$$i=1, \dots, 25$$

$$y_{i1} + y_{i2} \leq 1 \quad i=1, \dots, 15 \quad (4)$$

# حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر از مزرعه } i \text{ به مزرعه } j \text{ در روز } k \text{ حرکت کنیم.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$X_{jik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر از مزرعه } j \text{ به مزرعه } i \text{ در روز } k \text{ حرکت کنیم.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$Y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر مزرعه } i \text{ ام در روز } k \text{ بازدید شود.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

در تعریف مزرعه  $i=1, \dots, 15$  مربوط به مزرعه کوچک است لذا در برخی از روز ها می تواند بازدید نشود. اگر مزرعه ای همچون  $i$  در روز  $k$  ام بازدید شود حتما قبلا از مراجعه به مزرعه  $i$ ، به مزرعه دیگری مانند  $j$  رفته ایم و بعد از آن هم به مزرعه ای می رویم که چون یک بار از مزرعه  $i$  به مزارع دیگر و به مزرعه  $i$  از مزارع دیگر سفر می شود، مجموع آن یک است. و اگر مزرعه  $i$  در روز  $k$  بازدید شد،  $y_{ik}$  متغیر یک می شود. حالا اگر مزرعه  $i$  در روز  $k$  بازدید نشود،  $y_{ik}=0$  و از مزرعه  $i$  و به مزرعه  $i$  در روز  $k$  از سایر مزارع سفری نمی شود لذا گزینه ۲ درست است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

- ۵۰- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای نیمه‌معین مثبت بودن یک ماتریس  $n \times n$  متقارن نیست؟ (زیرماتریس اصلی، زیرماتریسی است که از حذف سطرها و ستون‌ها با شماره‌های یکسان حاصل می‌شود و زیرماتریس اصلی پیشرو زیرماتریسی است که از حذف  $n - k$  سطر و ستون آخر به ازای  $1 \leq k \leq n$  حاصل می‌شود).
- (۱) بتوان آنرا به صورت ضرب یک ماتریس در ترانژاده آن ماتریس نوشت.
  - (۲) دترمینان تمام زیرماتریس‌های اصلی نامنفی است.
  - (۳) دترمینان تمام زیرماتریس‌های اصلی پیشرو نامنفی است.
  - (۴) تمامی مقادیر ویژه نامنفی است.

## حل سوالات کنکور کارشناسی ارشد

حل:

برای تشخیص نیمه معین مثبت بودن یک ماتریس مانند  $A$ ، روش های مختلفی وجود دارد.

۱- ماتریس  $A$  را به صورت ضرب یک ماتریس در ترانهاده آن نوشت یا  $A = BB^T$

۲- تمامی زیرماتریس های ماتریس اصلی پیشرو دارای دترمینان نامنفی باشد:

۳- تمامی مقادیر ویژه آن که از رابطه زیر محاسبه می شود، نامنفی باشد.

لذا گزینه ۲ درست است.

# با تشکر

راه های ارتباطی با ما

[www.behinehyab.com](http://www.behinehyab.com)

[behinehyab@gmail.com](mailto:behinehyab@gmail.com)