درس ۲: روش سیمپلکس اولیه

تهیه شده توسط گروه بهینه‌یاب

www.behinehyab.com

روش سیمپلکس اولیه، الگوریتمی فرایندی است که در آن یک رویه نظام گرا (*systematic*) آنقدر تکرار می‌گردد تا سرانجام به جواب مطلوب یا بهینه برسد. مجموعه قدم‌هایی که در چنین فرآیندی هر دفعه تجدید می‌شود را یک تکرار (*Iteration*) می نامند. به این‌ترتیب، الگوریتم یک مسئله دشوار را به مجموعه از مسائل آسان‌تر جایگزین می نماید.

مقدمات روش سیمپلکس اولیه

در یک دستورالعمل جبری کار با معادلات تساوی به مراتب ساده از نامعادلات است. از این رو نخستین قدم روش سیمپلکس تبدیل محدودیت‌های کارکردی از شکل نامعادله به معادله است. محدودیت‌های نامنفی بودن را می‌توان به صورت نامعادلات باقی گذاشت زیرا به طور مستقیم در فرایند حل وارد نمی‌شوند. تبدل نامعادله به معادله با معرفی متغیرهای لنگی (*slack variable*) انجام می‌شود. در ادامه مدل زیر را با استفاده از سیمپلکس حل می‌کنیم تا با قسمت‌های مختلف این الگوریتم در قالب یک مثال آشنا شویم. مدل به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&(P1)\ \ Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad x_1 \leq 4 \\
&\quad (2)\quad 2x_2 \leq 12 \\
&\quad (3)\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

اکنون محدودیت‌های کارکردی (۱) را در نظر بگیرید. متغیر لنگی این محدودیت به صورت $x_3 = 4 - x_1$ تعریف می‌شود و در واقع مقدارکمبود سمت چپ محدودیت ۱ از مقدار سمت راست محدودیت ۱ است، لذا می‌توان محدودیت ۱ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_1 + x_3 = 4$$

معادله فوق زمانی با محدودیت ۱ برابر است که $x_3 \geq 0$ باشد. از این رو محدودیت ۱ با مجموعه محدودیت‌های زیر معادل است:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_3&=4\\ x_3&\geq 0\end{aligned}\right\}\equiv x_1\leq 4$$

برای روشن شدن موضوع یک مثال ساده می زنیم. محدودیت $x_1\leq 4$ را در نظر بگیرید. اگر $x_1=1$ باشد در این صورت $1<4$ خواهد شد و مقدار متغیر لنگی این محدودیت برابر با $x_3=3$ می‌شود. در این صورت شکل معادله رابطه $x_1\leq 4$ به صورت $x_1+x_3=4$ می‌شود که در این فرم معادله $x_1=1$ و $x_3=3$ است.

به صورت مشابه برای سایر نامعادلات می‌توان مدل $(P1)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&(P1-1)\;\; Max\;\; Z=3x_1+5x_2\\
&s.t.\\
&\quad(1)\quad x_1 \qquad\quad +x_3 \qquad\quad =4\\
&\quad(2)\qquad\quad 2x_2 \qquad +x_4 \qquad =12\\
&\quad(3)\quad 3x_1+2x_2 \qquad\qquad +x_5=18\\
&\qquad\quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0
\end{aligned}$$

مدل (*P1-1*) کاملا معادل مدل (*P1*) ولی این شکل جدید برای عملیات جبری به مراتب ساده تر است[1]. در مدل (*P1-1*) تعداد متغیرهای برابر ۵ و تعداد معادلات برابر ۳ است که در این حالت با دستگاه معادلات با دو درجه آزادی مواجه هستیم. در این صورت می‌توان در هر مرحله برای دو متغیر مقدار دلخواهی قرار داد و دستگاه سه معادله، سه مجهول را حل کرد. در روش سیمپلکس (*simplex*) این دو متغیر اضافی برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. متغیرهایی که برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند، متغیرهای غیر اساسی (*non-Basic variables*) و سایر آن‌ها متغیرهای اساسی (*Basic variables*) نامیده می‌شوند. به جوابی که تمامی متغیرهای غیراساسی برابر صفر باشند، جواب اساسی (*Basic solution*) و جواب اساسی که در آن متغیرهای اساسی نامنفی هستند را جواب اساسی موجه (*Basic feasible solution*) می نامند.

ساده تر است که تابع هدف نیز همزمان و همردیف با سایر محدودیت‌ها برخورد شود. بنابراین، قبل از شروع ارایه روش سیمپلکس، مسئله (*P1-1*) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

---

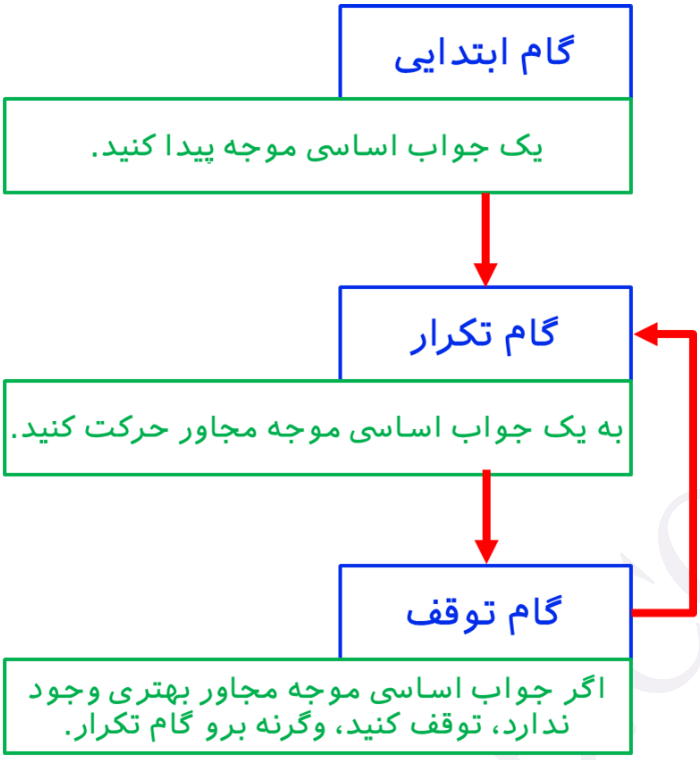
[1] به این فرم، فرم کنونیکال یا Canonical Form می گویند.

$$
\begin{aligned}
&(P1-2)\ \ Max\ \ Z\\
&s.t.\\
&\quad (0)\ Z - 3x_1 - 5x_2 = 0\\
&\quad (1)\ \ x_1 + x_3 = 4\\
&\quad (2)\ \ 2x_2 + x_4 = 12\\
&\quad (3)\ \ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

در مدل *(P1-2)* ، معادله صفر که همان تابع هدف است و جز محدودیت‌ها مـدل محسـوب مـی‌شـود و چون معادله صفر به صورت تساوی است، دیگر نیاز به اضافه کردن متغیر لنگی نمی باشد.

دستور حل روش سیمپلکس اولیه

در این بخش به ارایه روش سیمپلکس می پردازیم. به صورت خلاصه، روش سیمپلکس در هر مرحله به دنبال یافتن جواب‌های اساسی موجه است که هر جواب از جواب قبلی بدتر نباشد تـا سـرانجام یـک جـواب اساسی موجه بهینه یافته شود. برای تبدیل از یک جواب اساسی موجه به جواب اساسی موجه دیگـر، کـافی است یک متغیر اساسی به متغیر غیر اساسی (متغیر اساسی خروجی) و در مقابل یک متغیر غیراساسـی بـه متغیر اساسی (متغیر اساسی ورودی) تبدیل شود. با این تغییرات جواب اساسی موجه فعلی به جواب اساسی موجه مجاور حرکت می کند. اگر یک جواب اساسی موجه از تمام جواب‌های اساسی موجه مجاور بهتر بـود، آن جواب، جواب بهینه است و الگوریتم در این مرحله به پایان می رسد. در شکل زیر خلاصـه مراحـل روش سیمپلکس به صورت کلی آورده شده است.



هر یک از قسمت‌های الگوریتم سیمپلکس را در قالب یک مثال بیان می‌کنیم.

گام ابتدایی: متغیرهای لنگی (x_3,x_4,x_5) را متغیرهای اساسی بنامید و متغیرهای (x_1,x_2) را به عنوان متغیرهای غیراساسی برابر با صفر قرار دهید. برای سادگی در انجام محاسبات، ضرایب متغیرهای و اعداد سمت راست را در جدولی به عنوان جدول سیمپلکس (*simplex tableau*) ثبت می‌شود. جدول سیمپلکس مثال (*P1-2*) به صورت جدول زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18

چون هر معادله شامل یک متغیر اساسی با ضریب *+1* است، لذا مقدار هر متغیر اساسی برابر با عدد ثابت سمت راست معادله خواهد بود. جواب موجه اساسی جدول فوق برابر (

$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18)$ است که از این به بعد به صورت $(0,0,4,12,18)$ نمایش داده می‌شود.

گام توقف: اگر و فقط اگر تمام ضرایب معادل صفر مقادیر غیرمنفی (≥ 0) باشد، آن وقت جواب اساسی موجه فعلی، جواب بهینه است و در این صورت توقف کنید. در غیر این صورت برای پیدا کردن جواب اساسی موجه مجاور به گام تکراری بروید.

گام تکراری:

۱- متغیری که دارای بزرگترین ضریب منفی در معادله صفر است را به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب کنید. افزایش مقدار این متغیر غیراساسی منجر به تندترین اهنگ رشد مقدار تابع هدف می‌شود. مستطیلی به دور ستونی که زیر این متغیر بکشید و آن را ستون لولا (*pivot column*) بنامید. در این مثال، بزرگترین ضریب منفی (۵-) بوده و مربوط به متغیر x_2 است و لذا x_2 به عنوان متغیر اساسی ورودی انتخاب می‌شود.

۲- متغیر اساسی خروجی به صورت زیر تعیین می‌شود.

الف) ضرایب مثبت ستون لولا را در نظر بگیرید

ب) اعداد سمت راست را به این ضرایب تقسیم کنید

پ) سطری را انتخاب کنید که نسبتی که برای آن در قسمت (ب) بدست آمده است، کوچکترین باشد.

ت) متغیر اساسی این معادله، متغیر اساسی خروجی است.

مستطیلی به دور این معادله بکشید و آن را سطر لولا (*pivot row*) بنامید. عددی که در هر دو مستطیلی قرار می‌گیرد را عدد لولا (*pivot number*) می نامیم.

نتایج عملیات بالا در جدول زیر آمده است.

متغیر ورودی

متغیر اساسی (0)	شماره معادله (1)	Z (2)	X_1 (3)	X_2 (4)	X_3 (5)	X_4 (6)	X_5 (7)	طرف سمت راست (8)	آزمون نسبت
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2 کمینه
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	9=18/2

متغیر خروجی

سطر لولا

ستون لولا

عدد لولا

در جدول فوق متغیر x_2 ، متغیر اساسی ورودی و x_4 متغیر اساسی خروجی است.

۳- جواب اساسی جدید را به کمک یک جدول سیمپلکس جدید بدست آورید. مراحل به دست آوردن جدول جدید به صورت زیر است.

الف) در ستون (۰)، متغیر x_4 را حذف و به جای آن متغیر x_2 را قرار دهید.

ب) برای تبدیل ضریب متغیر x_2 به یک، تمام سطر لولا را بر عدد لولا تقسیم نمایید.

پ) برای اینکه متغیر اساسی x_2 از سایر معادلات حذف شود، هر سطر (شامل سطر مربوط به معادله صفر) به استثنای سطر لولا به صورت زیر تغییر نماید.

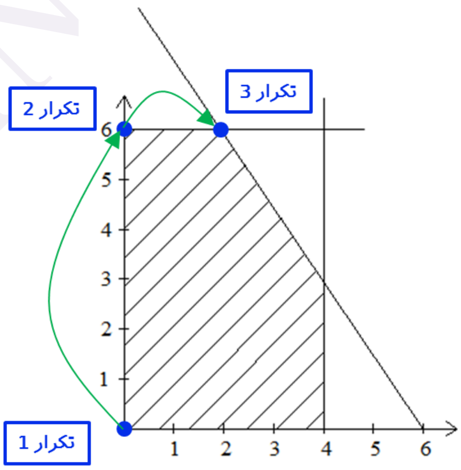
سطر جدید(به جز سطر لولا) = سطر قدیم – سطر لولای جدید × ضریب ستون لولا

پس از ایجاد جدول سیمپلکس جدید، به گام توقف می رویم. در صورت این که شرط توقف برقرار باشد الگوریتم متوقف می‌شود و در غیر این صورت به گام تکرار می رویم. این روند تا برآورده شدن شرط توقف ادامه می‌دهیم. جدول کامل سمپلکس برای *(P2-1)* به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2 کمینه
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	9=18/2
Z	0	1	-3	0	0	2.5	0	30	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_5	3	0	3	0	0	-1	1	6	2=6/3 کمینه
Z	0	1	0	0	0	1.5	1	36	
X_3	1	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	2	0	0	1	0	0.5	0	6	
X_1	3	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	

در جدول فوق، جواب اساسی موجه $(2,6,2,0,0)$ با $Z=36$ شرط توقف را برآورده مـی سـازد و لـذا این جواب بهینه است.

نکته: در هر گام از گام تکرار الگوریتم سیمپلکس، یکی از نقاط گوشـه محـدوده امکـان پـذیر را مـورد آزمون قرار می‌دهد. با توجه به کوچکی انداز مدل، می‌توان نمایش حرکـت بـر روی گوشـه‌هـای ناحیـه امکان پذیر را در نمایش هندسی مدل (*P1*) ملاحظه کرد که در زیر آمده است.



اگر در روش سیمپلکس به جای انتخاب بزرگترین ضریب منفی از نظر قدرمطلق را انتخاب نمی کردیم، از سمت راست به جواب بهینه نزدیک می شدیم که یـک جـواب اساسـی موجـه دیگـر مـورد بررسـی قـرار می‌گرفت.

قیمت‌های سایه (*shadow prices*): روش سمپلکس علاوه بر جواب بهینه اطلاعات با ارزش دیگری تولید می نماید. قیمت سایه منبع *i* (که با y_i^* نشان داده می‌شود) ارزش نهایی (*Marginal value*) این منبع را می سنجند که مبین آهنگ افزایش *Z* در اثر افزایش ملایم مقدار موجود این منبع (b_i) است. توجه شود که میزان افزایش در b_i باید به قدری کافی کوچک باشد که مجموعه متغیرهای فعلی همچنان بهینه باقی بماند زیرا به مجرد اینکه مجموعه متغیرهای اساسی تغییر کند، ارزش نهایی نیز تغییر می کند. روش سیمپلکس قیمت سایه را با y_i^* که معرف ضریب متغیر لنگی *i*-ام در معادله صفر جدول نهایی سیمپلکس است، مشخص می سازد.

برای نمونه در مثال (*P1*)، قیمت سایه منبع ۱ برابر ضریب متغیر x_3 معادله صفر (برابر با صفر)، قیمت سایه منبع ۲ برابر ضریب متغیر x_4 در معادله صفر (برابر ۱.۵) و قیمت سایه منبع ۳ برابر ضریب متغیر x_5 در معادله صفر(برابر ۱) است. تعبیر دیگر قیمت سایه منبع ۱ این است که حداکثر قیمتی که پرداخت آن برای افزایش یک واحد از این منبع مقرون به صرفه است. به تعبیر دیگر، حداکثر منبعی که برای افزایش یک واحد از منبع i می‌توان پرداخت کرد.

حالات خاص در روش سیمپلکس اولیه

شرایط مشابه در هنگام انتخاب متغیر اساسی ورودی

فرض کنید دو یا چند متغیر غیراساسی دارای بزرگترین ضریب منفی و شرایط یکسانی داشته باشند. مثلا اگر تابع هدف به $Z = 3x_1 + 3x_2$ تغییر کند، آنگاه باید متغیر اساسی ورودی را به دلخواه انجام داد. روش ساده‌ای برای پیش بینی بهترین انتخاب وجود ندارد که کدام انتخاب زودتر به جواب می رسد. در این مسئله اگر x_1 انتخاب شود بعد از سه تکرار به جواب بهینه می رسیم در صورتیکه با انتخاب x_2 پس از دو تکرار به جواب بهینه میرسم.

متغیر اساسی تبهگن

فرض کنید دو یا چند متغیر اساسی امکان خروج از جواب اساسی را داشته باشند. در این صورت اتفاق‌های زیر رخ می‌دهد.

۱- یکی از مقادیر متغیرهای اساسی صفر باشند. چنین متغیرها را متغیرهای اساسی تبهگن (Degenerate) می نامند.

۲- مادامی که متغیر اساسی تبهگن وجود دارد و به عنوان متغیر اساسی خروجی انتخاب می‌شود و متغیر اساسی ورودی هم برابر صفر خواهد شد ولذا مقدار Z تغییر نخواهد کرد.

۳- اگر مقدار Z تغییر نکند، این امکان وجود دارد که سیمپلکس در یک حلقه دور بزند و سیمپلکس در یک سلسله جواب‌های تکراری بیافتد، هر چند این اتفاق در عمل به ندرت می افتد.

در صورتیکه حالت تباهیدگی رخ دهد می‌توان با انتخاب متغیرهای اساسی خروجی دیگر از آن‌ها رهایی یافت و بدون نگرانی از وجود متغیرهای تبهگن به کار خود ادامه داد.

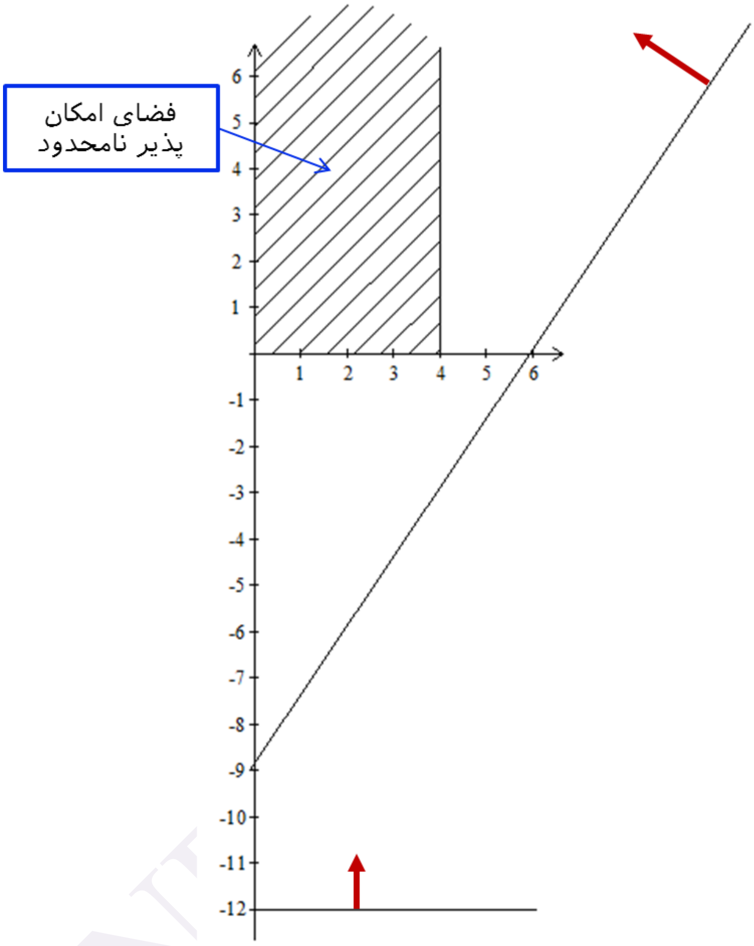
توجه: یک قاعده ساده برای خروج از حالت تباهیدگی، به کارگیری قاعده *Bland* است. در این قاعده، متغیری به عنوان ورودی به پایه انتخاب می شود که دارای کمترین اندیس و کمترین ضریب تابع هدف داشته باشد. در حالتی که بیش از یک انتخاب برای متغیر خروجی از پایه وجود دارد، متغیری که به سطر تابع هدف یا سطر صفر نزدیک تر است انتخاب می شود.

Z نامحدود است

حالتی را در نظر بگیرید که هیچکدام از متغیرهای اساسی شرایط خروج را نداشته باشند و مقدار متغیرهای اساسی ورودی می‌تواند تا بی نهایت افزایش یابد بدون آنکه هیچ یک از متغیرهای اساسی دیگر منفی شوند. این حالت وقتی اتفاق می افتد که تمام ضرایب ستون لولا در جدول سیمپلکس منفی یا صفر باشد(نامثبت باشند). برای روشن شدن موضوع مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 3x_1 + 5x_2 \\
&s.t. \\
&(1)\quad x_1 \le 4 \\
&(2)\quad -x_2 \le 12 \\
&(3)\quad 3x_1 - 2x_2 \le 18 \\
&\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

نمایش هندسی مدل فوق به صورت زیر می‌شود و مقدار تابع هدف با بی نهایت می‌تواند افزایش یابـد و فرم جدول سیمپلکس هم در ادامه آورده می‌شود.



متغیر اساسی (0)	شماره معادله (1)	Z (2)	X_1 (3)	X_2 (4)	X_3 (5)	X_4 (6)	X_5 (7)	طرف سمت راست (8)
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4
X_4	2	0	0	-2	0	1	0	12
X_5	3	0	3	-2	0	0	1	18

در جدول فوق، $x_4 = 12 + 2x_2$ و $x_5 = 18 + 2x_2 - 3x_1$ است که مقدار x_2 می‌توانـد تـا بـی نهایـت افزایش یابد و حد بینهایت ندارد و با افزایش x_2 تا بینهایت، مقدار تابع هدف تا بینهایت افزایش می یابد. در واقع محدودیت‌های مسئله از افزایش نامحدود تابع هدف در جهت مناسب جلوگیری نمی کند. در صورتیکه

در مسئله چنین اتفاقی افتاد احتمالا در محاسبات اشتباهی رخ داده است و یا اینکه پاره‌ای از محدودیت‌ها منظور نشده است.

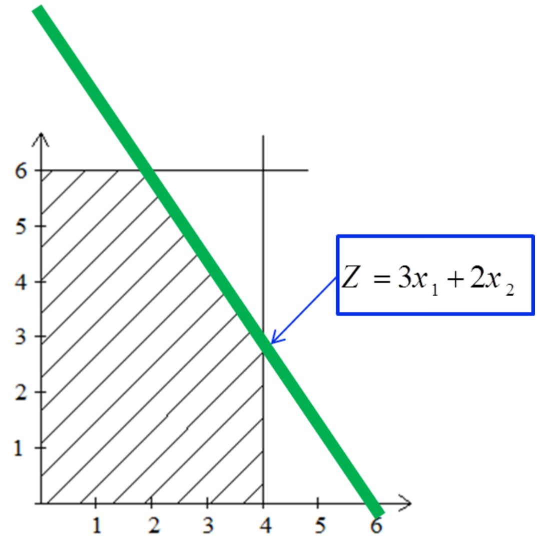
جواب بهینه چندگانه

وقتی دستکم ضریب یکی از متغیرهای غیراساسی در معادله صفر آخرین جدول برابر صفر باشد، جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت. برای رسیدن به جواب بهینه دیگر، می‌توان متغیرهای غیراساسی که ضریب صفر دارد را به عنوان متغیرهای اساسی ورودی انتخاب کنیم. برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&(1)\quad x_1 \qquad \le 4 \\
&(2)\qquad 2x_2 \le 12 \\
&(3)\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

حل ترسیمی مدل فوق در زیر آمده است. در این شکل، هر نقطه از پاره خط رابط بین (2,6) و (4,3) جواب بهینه است. اطلاع از وجود جواب‌های بهینه چندگانه مسئله مورد نظر غالبا در کاربرد نتایج در عمل بسیار اهمیت دارد. یک مدل ریاضی نمی‌تواند تمامی عوامل اقتصادی در دنیای واقع را لحاظ کند. بنابراین پس از انتخاب گزینه‌های برتر، می‌توان بهترین گزینه را با کمک یک کارشناس انتخاب کرد.



متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-2	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	کمینه4=4/1
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	
X_5	3	0	3	2	0	0	1	18	6=18/3
Z	0	1	0	-2	3	0	0	12	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2
X_5	3	0	0	2	-3	0	1	6	کمینه 3=6/2
Z	0	1	0	0	0	0	1	18	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_4	2	0	0	0	3	1	-1	6	کمینه 2=6/3
X_2	3	0	0	1	-1.5	0	0.5	3	
Z	0	1	0	0	0	0	1	18	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	
X_3	2	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	3	0	0	1	0	0.5	0	6	

در جدول فوق، دو جواب اساسی موجه $(4,3,0,6,0)$ و $(2,6,2,0,0)$ جواب بهینه هستند که در آن‌ها $Z=18$ است.

محدودیت‌های تساوی

هر محدودیت به شکل تساوی ($a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$) با یک جفت محدودیت نامساوی زیر قابل جایگزین است.

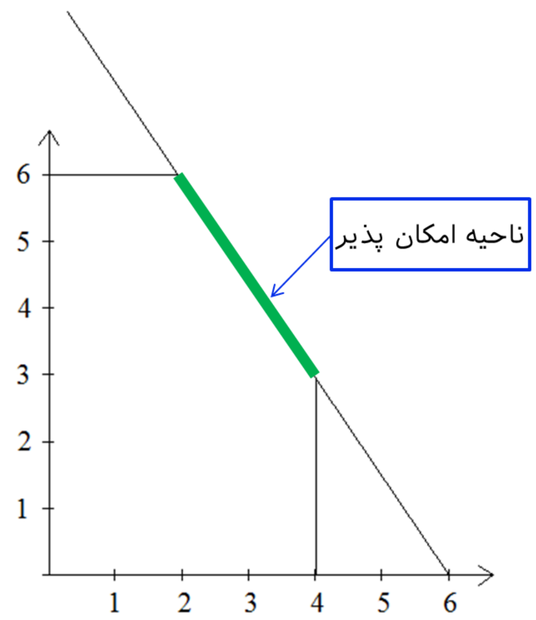
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

ولی به جای اضافه کردن تعداد محدودیت‌ها که باعث دشوار حل می‌شود، می‌توان از روش متغیرهای مصنوعی (*Artificial variable*) استفاده کرد. مدل (*P1*) که در آن نامعادله $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ با معادله $3x_1 + 2x_2 = 18$ جایگزین شده است در زیر آمده است.

$$\begin{aligned}
&\quad Max\ Z \\
&s.t. \\
&(0)\ Z - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\
&(1)\ x_1 + x_3 = 4 \\
&(2)\ 2x_2 + x_4 = 12 \\
&(3)\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

فضای امکان پذیر مدل فوق به صورت زیر است:



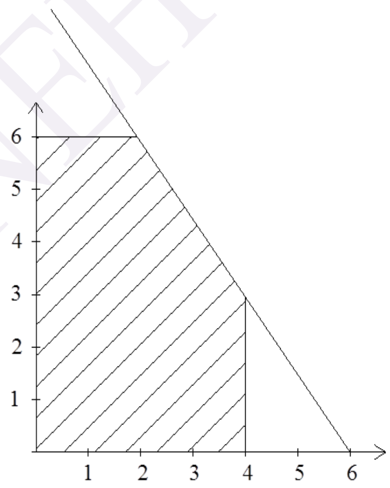
متاسفانه این معادلات جواب اساسی موجه مشخصی ندارند زیرا معادله (۳) دارای متغیر لنگـی نیسـت. این مشکل با معرفی متغیر مصنوعی $\bar{x}_5$ برطرف می‌شود کـه در ایـن صـورت معادلـه (۳) بـه صـورت زیـر می‌شود.

$$3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$$

با جایگزینی معادله فوق در مدل به مدل تغییر یافته به صورت زیر خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z \\
&s.t. \\
&(0)Z - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\
&(1)\quad x_1 + x_3 = 4 \\
&(2)\quad 2x_2 + x_4 = 12 \\
&(3)\quad 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5 \ge 0
\end{aligned}$$

اضافه کردن متغیر مصنوعی $\bar{x}_5$ باعث بزرگ شدن ناحیه امکان پذیر مشابه شکل زیر می‌شود.



اکنون فرض کنید که برای پیدا کردن جواب بهینه مسئله تغییر شکل یافته از روش سیمپلکس استفاده کرده باشید. چنانچه جواب حاصل از مدل تغییر شکل یافته در مدل اصلی هم موجه باشد، حـل مسـئله بـه پایان می رسد. متاسفانه چنین تضمینی وجود ندارد که جواب بهینـه مسـئله تغییـر شـکل یافتـه حتمـا در مسئله اصلی صدق نماید. برای ایجاد چنین تضمینی، از روش M بزرگ (*Big-M method*) استفاده می‌کنیم.

در این روش به نقاط خارج از نقطه موجه مسئله اصلی جریمه زیادی (*M*) تعلق می‌گیرد. برای ایجاد چنین جریمه ای، تابع هدف به صورت $Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0$ تغییر می کند. از انجایکه *M* یک مقدار بزرگ است، مقدار *Z* فقط وقتی حداکثر می‌شود که $\bar{x}_5$ برابر صفر می‌شود. این معادله در جدول سیمپلکس نمی‌تواند قرار بگیرد زیرا $\bar{x}_5$ یک متغیر اساسی است و ضریب کلیه متغیرهای اساسی در سطر صفر مساوی صفر باید باشد. برای صفر کردن ضریب $\bar{x}_5$ در تابع هدف کافی است *M*− برابر سطر مربوط به معادله‌ای که متغیر $\bar{x}_5$ در آن حضور دارد به تابع هدف اضافه شود که به صورت زیر می‌شود.

-3	-5	0	0	M	0	A
3	2	0	0	1	18	B

(-3M-3)	(-2M-5)	0	0	0	-18M	A+(-M)B

به این صورت می‌توان با تغییر فوق از روش سیمپلکس برای حل مدل تغییر یافته استفاده کرد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	$\bar{X}_5$	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3M-3	-2M-5	0	0	0	-18M	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1کمینه
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	
$\bar{X}_5$	3	0	3	2	0	0	1	18	6=18/3
Z	0	1	0	-2M-5	3M+3	0	0	-6M+12	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
X_4	2	0	0	2	0	1	0	12	6=12/2
$\bar{X}_5$	3	0	0	2	-3	0	1	6	کمینه 3=6/2
Z	0	1	0	0	-4.5	0	M+2.5	27	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0	1	0	0	4	4=4/1
X_4	2	0	0	0	3	1	-1	6	کمینه 2=6/3
X_2	3	0	0	1	-1.5	0	0.5	3	
Z	0	1	0	0	0	1.5	M+1	36	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	0	-0.333	0.333	2	
X_3	2	0	0	0	1	0.333	-0.333	2	
X_2	3	0	0	1	0	0.5	0	6	

در جدول فوق، جواب $(2,6,2,0,0)$ بهینه است که عینا همان جواب مسئله اصلی است.

روش فاز۱-فاز۲

همان طور که بیان شد، روش M بزرگ برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای مصنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولی به دلیل این که محاسبات با پارامترهای M در مدل‌های بزرگ بسیار دشوار می‌شود، می‌تواند منجر به خطای محاسباتی شود. در این موارد روش فاز ۱-فاز ۲ توصیه می‌شود. این روش به این صورت انجام می‌شود که در فاز ۱ به دنبال کمینه کردن مقدار مجموع متغیرهای مصنوعی هستیم. در صورتیکه مدل به جای رسید که مجموع متغیرهای مصنوعی برابر صفر شود. جوابی که منجر به این جواب شود به عنوان جواب اولیه مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مثال زیر می‌توان روند حل از روش فاز۱-فاز۲ آشنا شد.

مثال: مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را به صورت روش فاز ۱-فاز ۲ حل نمایید.

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 300 \\
&\quad (2) \quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 300 \\
&\qquad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,4.
\end{aligned}
$$

شکل استاندارد مدل فوق به صورت زیر می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 300 \\
&\quad (2) \quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 300 \\
&\qquad\quad x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,6.
\end{aligned}
$$

در روش فاز ۱-فاز۲، ابتدا مدلی را حل می‌کنیم که به دنبال کمینه کردن تابع هدف $w = x_5 + x_6$ با محدودیت‌های مدل اصلی هستیم. در واقع به دنبال بهینه کردن مدل زیر هستیم.

$$MinW = x_5 + x_6$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 300$$

$$(2)\quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 300$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,6.$$

حل مدل فوق همزمان با مدل اصلی انجام می‌شود که در جدول سیمپلکس تابع هدف W و تابع هـدف مدل اصلی وارد می‌شود.مراحل حل روش فاز ۱-فاز ۲ در جدول سیمپلکس به صورت زیر است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	طرف سمت راست	
W		0	-1	0	0	0	0	1	1	0	
Z	0	1	0	- 4	- 2	- 3	- 5	0	0	0	
X_5	1	0	0	2	3	4	2	1	0	300	
X_6	2	0	0	8	1	1	5	0	1	300	
W		0	-1	-10	-4	-5	-7	0	0	-600	جدول غیر بهینه (آغاز فاز 1)
Z	0	1	0	-4	-2	-3	-5	0	0	0	
X_5	1	0	0	2	3	4	2	1	0	300	300/2=150
X_6	2	0	0	8	1	1	5	0	1	300	300/8=37.5 کمینه
W		0	-1	0	-2.75	-3.75	-0.75	0	1.25	-225	جدول غیر بهینه (فاز 1)
Z	0	1	0	0	-1.5	-2.5	-2.5	0	0.5	150	
X_5	1	0	0	0	2.75	3.75	0.75	1	-0.25	225	60=225/3.75 کمینه
X_1	2	0	0	1	0.125	0.125	0.625	0	0.125	375	3000=375/0.125
W		0	-1	0	0	0	0	1	1	0	جدول بهینه (پایان فاز 1)
Z	0	1	0	0	0.333	0	-2	0.666	0.333	300	
X_3	1	0	0	0	0.733	1	0.2	0.266	-0.067	60	
X_1	2	0	0	1	0.033	0	0.6	-0.033	0.133	30	
Z	0	1	0	0	0.333	0	-2			300	جدول غیربهینه (آغاز فاز 2)
X_3	1	0	0	0	0.733	1	0.2			60	300=60/0.2
X_1	2	0	0	1	0.033	0	0.6			30	50=30/0.6 کمینه
Z	0	1	0	3.33	0.44	0	0			400	جدول بهینه(پایان فاز 2)
X_3	1	0	0	-0.333	0.722	1	0			50	
X_4	2	0	0	1.666	0.055	0	1			50	

جواب بهینه مدل اصلی $(0,0,50,50)$ و $Z^* = 400$ است.

روش سیمپلکس تجدید نظر شده

یکی دیگر از روش های کاربردی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی روش **سیمپلکس تجدید نظر شده** است. روش سیمپلکس به رغم مناسب بودن برای انجام محاسبات دستی، کارایی لازم را برای حل کامپیوتری مسائل بزرگ را ندارد. علت را می توان در حفظ و ذخیره سازی اطلاعاتی جستجو کرد که ممکن است در تکرارهای سیمپلکس هرگز استفاده نشود. مثلا بعضی از متغیرها هرگز شرایط لازم را برای انتخاب شدن به عنوان متغیر ورودی نمی یابند، در نتیجه همه محاسبات مربوط به ضرایب این متغیرها در تابع هدف و محدودیت ها بدون استفاده باقی خواهد ماند. در واقع، ستون مربوط به آن متغیر محاسبه می شود ولی عملا از آن استفاده نمی شود.

روش سیمپلکس تجدید نظر شده (Revised Simplex) با استفاده از همه اصول و گام های روش سیمپلکس اولیه، بدون انجام عملیات زائد و ذخیره اطلاعات غیرمفید، که حفظ آن ها در رایانه حافظه زیادی می طلبد، مسئله را حل می کند. استفاده از ماتریس در به کارگیری روش سیمپلکس تجدید نظر شده ضرورتی اجتناب ناپذیر است و همین امر تعریف ماتریسی مسئله برنامه ریزی خطی را ضروری می سازد.

نمایش ماتریسی مسئله برنامه ریزی خطی

به طور کلی مسئله برنامه ریزی خطی استاندارد به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = cx \\ &Ax \le \overline{b} \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

که در فرم بالا:

$$x=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T \quad c=[c_1,c_2,\dots,c_n]$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \bar{b}=[\bar{b}_1,\bar{b}_2,\dots,\bar{b}_m]^T$$

مثال: مدل زیر را به صورت ماتریسی نمایش دهید.

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 4x_1+3x_2+6x_3 \\ &3x_1+\ x_2+3x_3 \le 30 \\ &2x_1+2x_2+3x_3 \le 40 \\ &x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

در مدل فوق:

$$x=[x_1,x_2,x_3]^T \quad c=[4,3,6]$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \bar{b}=[30,40]^T$$

$$\rightarrow Max\ Z=[4,3,6]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

در صورت اضافه کردن متغیرهای لنگی یا کمکی، مسئله به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned} &Max\ Z=cx \\ &Ax+Is=\bar{b} \\ &x,s\ge 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &Max\ Z=cx \\ &[A,I]\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}=\bar{b} \\ &x,s\ge 0 \end{aligned}$$

که در مدل فوق:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

که I ماتریس واحد m در m نامیده می شود و

$$s=[s_1,s_2,...,s_m]^T$$

با اضافه کردن متغیر لنگی s، مدل مثال به صورت زیر به شکل ماتریسی می شود:

$$Max\ \ Z=[4,3,6,0,0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\s_1\\s_2\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3&1&3&1&0\\2&2&3&0&1\end{bmatrix}}_{[A,I]}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\s_1\\s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\40\end{bmatrix}$$

$$x_1,x_2,x_3,s_1,s_2\geq 0$$

تعداد متغیرهای اساسی مساوی با تعداد محدودیت ها و معادل m است. ماتریس $[A,I]$ دارای m سطر (m تعداد محدودیت ها به غیر از محدودیت های نامنفی بودن) و m+n ستون است که شامل m متغیر اساسی و n متغیر غیراساسی است. در مثال فوق، m برابر ۲ و n برابر با ۳ است.

ماتریس $[A,I]$ به دو ماتریس، که یکی از ضرایب متغیرهای اساسی و دیگری از ضرایب متغیرهای غیراساسی تشکیل می شود، تقسیم می شوند. ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی با B و ماتریس ضرایب متغیرهای غیراساسی با N نمایش داده می شود. به همین ترتیب، تمامی متغیرهای مسئله که از متغیرهای $x_j,s_i\,(j=1,...,m;i=1,...,n)$ تشکیل شده نیز به دو گروه متغیرهای اساسی(x_B) و متغیرهای غیراساسی(x_N) تقسیم می شوند.

نکته: در گام نخست الگوریتم سیمپلکس اولیه، متغیرهای اساسی از نوع s_i و متغیرهای اساسی از نوع x_j است. در گام های بعدی این وضعیت تغییر می کند و متغیرهای اساسی ترکیبی از s_i و x_j خواهد بود. در ادامه با یک مثال این حالت را توضیح خواهیم داد.

مثال: با استفاده از روش سیمپلکس اولیه، مدل زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 &\le 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

جدول ابتدایی سیمپلکس برای مسئله فوق به صورت زیر است:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-4	-3	-6	0	0	0
s_1	1	0	3	1	3	1	0	30
s_2	2	0	2	2	3	0	1	40

$\bar{a}_1$ B $\bar{b}$

در جدول فوق، متغیرهای اساسی یا x_B متغیرهای کمکی (s_1, s_2) و متغیرهای غیراساسی یا x_N، متغیرهای تصمیم گیری (x_1, x_2, x_3) هستند. B ماتریس ضرایب متغیرهای اساسی و N ماتریس ضرایب متغیرهای غیراساسی در محدودیت ها هستند.

$$x_B = [s_1, s_2], x_N = [x_1, x_2, x_3]$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

جدول تکرار اول روش سیمپلکس به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	2	-1	0	2	0	60
x_3	1	0	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
s_2	2	0	-1	1	0	-1	1	10

B^{-1}

در جدول فوق،

$$x_B=[x_3,s_2],x_N=[x_1,x_2,s_1]$$
$$B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس B ضرایب متغیرهای پایه در جدول اولیه هستند و B^{-1} ماتریس معکوس B اسـت. ضـریب x_3 در محدودیت اول ۳ و در محدودیت دوم ۳ است لذا ستون اول ماتریس B به این صورت ایجاد می شود.

جدول نهایی سیمپلکس به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	1	0	0	1	1	70
x_3	1	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	2	0	-1	1	0	-1	1	10

B^{-1}

که در آن:

$$x_B=[x_3,x_2],x_N=[x_1,s_1,s_2]$$
$$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس B ضرایب متغیرهای پایه در جدول اولیه هستند و B^{-1} ماتریس معکوس B اسـت. ضـریب x_3 در محدودیت اول ۳ و در محدودیت دوم ۳ است لذا ستون اول ماتریس B به این صورت ایجـاد مـی شـود. ضریب x_2 در محدودیت اول ۱ و در محدودیت دوم ۲ است لذا ستون دوم ماتریس B به این صـورت ایجـاد می شود.

با توضیحاتی که در بالا داده شده است، می توان نمایش ماتریسی مدل برنامه ریزی خطی را بیان کرد.

محدودیت های مدل برنامه ریزی خطی به صورت زیر نوشته می شود.

$$[A,I]\begin{bmatrix}x\\ s\end{bmatrix}=\bar{b}$$

که بر حسب متغیرهای تصمیم و کمکی(لنگی) به دو بخش تقسیم شده است. همچنین آن را نیـز مـی توان بر حسب متغیرهای اساسی و غیراساسی به دو قسمت تقسیم کرد و به صورت زیر نوشت:

$$[B,N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \bar{b} \rightarrow Bx_B + Nx_N = \bar{b}$$

در صورت این که طرفین معادله را در B^{-1} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}\bar{b}$$
$$x_B = B^{-1}\bar{b} - B^{-1}Nx_N$$

از انجا که x_N بیانگر متغیرهای غیراساسی و دارای مقدار صفر هستند، در نتیجه داریم:

$$x_B = B^{-1}\bar{b}$$

در صورت داشتن B^{-1} برای هر جدول، رابطه بالا مقدار متغیرهای اساسـی آن جـدول یـا اعـداد سـمت راست آن را به دست می دهد.

تابع هدف نیز با تفکیک متغیرها به اساسی و غیراساسی، به صورت زیر خواهد شد:

$$Z = c_B x_B + c_N x_N$$
$$Z = c_B\left(B^{-1}\bar{b} - B^{-1}Nx_N\right) + c_N x_N$$
$$Z = c_B B^{-1}\bar{b} - c_B B^{-1}Nx_N + c_N x_N$$
$$Z = c_B B^{-1}\bar{b} - \left(c_B B^{-1}N - c_N\right)x_N$$

از انجا که x_N بیانگر متغیرهای غیراساسی و دارای مقدار صفر هستند، در نتیجه داریم:

$$Z = c_B B^{-1}\bar{b}$$

ضریب متغیرهای غیراساسی در تابع هدف، یعنی ضریب x_N که با نماد z_j-c_j نشان داده مـی شـود، بـا توجه به روابط بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} N - c_N$$

ضرایب متغیرهای غیراساسی در محدودیت ها، با توجه به $x_B = B^{-1}\bar{b} - B^{-1} N x_N$ برابر با $B^{-1}N$ است. ازآن جا که این رابطه فقط برای به دست آورد اعداد ستون لولا به کار می رود و نیاز به دیگر ضرابط متغیرهای غیراساسی در محدودیت ها نیست، ماتریس N به صورت تعدادی بردار ستونی نشان داده می شود که هر ستون مربوط به یک متغیر است:

$$N = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n]$$

که $\bar{a}_j$ ستون ضرایب متغیر x_j را در محدودیت ها نشان می دهد. به این ترتیب برای محاسبه اعداد ستون لولا از رابطه زیر استفاده می شود:

$$a_j = B^{-1} \bar{a}_j$$

برای آشنایی بیشتر با نحوه به کارگیری روابط بالا، مثالی می زنیم. به مدل اولیه بر می گردیم.

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید می خواهیم اطلاعات جدول سیمپلکسی را بدست آوریم که متغیرهای x_3 و x_2 متغیرهای اساسی هستند. لذا داریم:

$$c_B = \begin{array}{c} \scriptstyle x_3 \quad x_2 \\ \begin{bmatrix} 6, 3 \end{bmatrix} \end{array}, c_N = \begin{array}{c} \scriptstyle x_1 \quad s_1 \quad s_2 \\ \begin{bmatrix} 4, 0, 0 \end{bmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c} \scriptstyle x_3 \quad x_2 \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_N = [x_1, s_1, s_2], x_B = [x_3, x_2]$$

برای محاسبه ضریب متغیرهای غیراساسی در تابع هدف جدول سیمپلکسی که x_3 و x_2 متغیرهای اساسی هستند به صورت زیر انجام می شود:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} N - c_N = \begin{array}{c} x_3 \; x_2 \\ \begin{bmatrix} 6, 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} x_1 \; s_1 \; s_2 \\ \begin{bmatrix} 4, 0, 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} x_1 \; s_1 \; s_2 \\ \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

در این جدول سیمپلکس، مقدار x_B و Z به صورت زیر محاسبه می شود.

$$x_B = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Z = c_B B^{-1}\bar{b} = [6,3] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 70$$

محاسبه ستون زیر متغیر x_1 به صورت زیر انجام می شود:

$$a_1 = B^{-1}\bar{a}_1$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

مطالبی که تا به حال گفته شد، کلیه پیش نیاز های لازم برای ارایه الگوریتم سیمپلکس تجدید نظر شده را پوشش داده است. لذا در ادامه به معرفی این الگوریتم می پردازیم.

گام های روش سیمپلکس تجدید نظر شده

گام ۱: متغیر ورودی را تعیین کنید. در هر تکرار ضرایب غیراساسی را در تابع هدف با استفاده از رابطه $c_B B^{-1} N - c_N$ پیدا کنید. اگر این مقادیر همگی غیرمنفی باشند، به جواب بهینه رسیده اید. جواب بهینه را با استفاده از روابط زیر محاسبه کنید.

$$x_B = B^{-1}\bar{b}$$

$$Z = c_B B^{-1}\bar{b}$$

در غیر این صورت، متغیر دارای منفی ترین ضریب محاسبه شده را انتخاب کنید. این متغیر، متغیر ورودی است.

گام ۲: متغیر خروجی را تعیین کنید. انتخاب متغیر خروجی مستلزم در اختیار داشتن ضرایب متغیر ورودی در محدودیت ها و اعداد سمت راست است. در صورتی که متغیر x_j ورودی باشد، ضرایب آن در محدودیت ها از رابطه زیر بدست می اید.

$$a_j = B^{-1}\bar{a}_j$$

مقدار متغیرهای اساسی فعلی یا اعداد سمت راست عبارت است از:

$$x_B = B^{-1}\bar{b}$$

بر اساس محاسبات، $Min\left\{\frac{x_B}{a_j}\right\}$ متغیر اساسی خروجی را نشان می دهد.

گام ۳: B^{-1} جدید را محاسبه و متغیر اساسی جدید را معین کنید و به گام ۱ بروید.

مثال: مدل زیر را یک بار دیگر در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم سیمپلکس تجدید نظر شده جواب بهینه را بدست آورید.

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

حل:

مدل را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ &3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 \quad\quad = 30 \\ &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad\quad + s_2 = 40 \\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

تکرار ۱:

گام ۱. متغیر ورودی را تعیین کنید. متغیر اساسی تکرار ۱، s_1 و s_2 و ضریب آن ها در تابع هدف $c_B=(0,0)$ صفر است. ضرایب متغیرهای غیراساسی $x_N=(x_1,x_2,x_3)^T$ به طریق زیر محاسبه می شوند:

$$z_j-c_j=c_BB^{-1}N-c_N=\begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array}\begin{bmatrix}0, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\begin{bmatrix}4, & 3, & 6\end{bmatrix}=\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\begin{bmatrix}-4, & -3, & -6\end{bmatrix}$$

چون منفی ترین عدد ۶- و ضریب x_3 است، این متغیر ورودی است. در روش سیمپلکس محاسبات بالا مشابه سطر صفر جدول زیر است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-4	-3	-6	0	0	0

$$-6=\min\{-4,-3,-6\}$$

گام ۲. متغیر خروجی را تعیین کنید. ضرایب x_3 در محدودیت ها به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a_3=B^{-1}\bar{a}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\ 40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\ 40\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Min\left\{\frac{30}{3},\frac{40}{3}\right\}=10$$

چون کوچکترین عدد حاصل مربوط به متغیر اساسی s_1 است، این متغیر به عنوان متغیر خروجی انتخاب می شود. در صورت استفاده از جدول سیمپلکس، محاسبات گام های ۱ و ۲ به صورت زیر خلاصه می شود:

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-4	-3	-6	0	0	0
s_1	1				3			30
s_2	2				3			40

گام ۳. B و x_B جدید را محاسبه کنید. از آن جا که متغیر x_3 ورودی و s_1 خروجی است، متغیر اساسی تکرار جدید عبارتند از:

$$x_B=[x_3,s_2]^T, c_B=[6,0]\rightarrow B=\begin{bmatrix}3&0\\3&1\end{bmatrix}\rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\-1&1\end{bmatrix}$$

تکرار ۲

گام ۱. متغیر ورودی را تعیین کنید. ضرایب متغیرهای غیراساسی $x_N=[x_1,x_2,s_1]$ به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$z_j-c_j=c_BB^{-1}N-c_N=\begin{array}{c}{\scriptstyle x_3\ \ s_2}\\ \begin{bmatrix}6,0\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{array}{c}{\scriptstyle x_1\quad x_2\quad s_1}\\ \begin{bmatrix}3&1&1\\2&2&0\end{bmatrix}\end{array}-\begin{array}{c}{\scriptstyle x_1\ x_2\ s_1}\\ \begin{bmatrix}4,3,0\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}{\scriptstyle x_1\ \ x_2\ \ s_1}\\ \begin{bmatrix}2,\underset{\Uparrow}{-1},2\end{bmatrix}\end{array}$$

x_2 متغیر ورودی می شود.

گام ۲. متغیر خروجی را تعیین کنید.

$$a_2=B^{-1}\bar{a}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}$$

$$x_B=\begin{bmatrix}x_3\\s_2\end{bmatrix}=B^{-1}\bar{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Min\left\{\overset{x_3}{\frac{10}{\frac{1}{3}}},\overset{s_2}{\underset{\Uparrow}{\frac{10}{1}}}\right\}=10$$

s_2 متغیر خروجی است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1		-1				
x_3	1	0		$\frac{1}{3}$				10
s_2	2	0		1				10

گام ۳. از آن جا که x_2 متغیر ورودی و s_2 خروجی است، متغیرهای اساسی تکرار بعد عبارتند از:

$$x_B=[x_3,x_2]^T,c_B=[6,3]$$

$$B=\begin{bmatrix}3&1\\3&2\end{bmatrix}\to B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-1&1\end{bmatrix}$$

گام ۱. متغیر ورودی را تعیین کنید. ضرایب متغیرهای غیراساسی $x_N=[x_1,s_1,s_2]^T$ به طریق زیر محاسبه می شود:

$$z_j-c_j=c_BB^{-1}N-c_N=\begin{array}{c}\scriptstyle x_3\quad x_2\\\begin{bmatrix}6,3\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-1&1\end{bmatrix}\begin{array}{c}\scriptstyle x_1\quad s_1\quad s_2\\\begin{bmatrix}3&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\end{array}-\begin{array}{c}\scriptstyle x_1\ \ s_1\ \ s_2\\\begin{bmatrix}4,0,0\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\scriptstyle x_1\ \ s_1\ \ s_2\\\begin{bmatrix}1,1,1\end{bmatrix}\end{array}$$

چون تمامی اعداد بدست آمده غیرمنفی هستند، به جواب نهایی رسیده اید. حال، جواب بهینه را بدست آورید.

$$Z^*=c_BB^{-1}\bar{b}=[6,3]\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\40\end{bmatrix}=70$$

$$x_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{3}\\10\end{bmatrix}$$

مثال: مسئله زیر را به روش سیمپلکس تجدید نظر شده حل کنید.

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

حل:

متغیر s_1 به عنوان متغیر اساسی محدودیت اول، متغیر s_2 برای تساوی کردن محدودیت دوم و متغیر R_2 به عنوان متغیر لنگی و مصنوعی به منظور متغیر اساسی محدودیت دوم در نظر گرفته می شود.

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= 3x_1 + 2x_2 \qquad - MR_2 \\ & 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\quad = 4 \\ & x_1 + 2x_2 \quad - s_2 + R_2 = 6 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, R_2 \ge 0 \end{aligned}$$

به این ترتیب داریم:

$$x_B = [s_1, R_2]^T \quad x_N = [x_1, x_2, s_2]^T \quad c_B = [0, -M\ ] \quad c_N = [3, 2, 0]$$

$$B = B^{-1} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار ۱

گام۱. متغیر ورودی را تعیین می کنیم.

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} N - c_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & R_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0, -M \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3, 2, 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \left[\overbrace{-M - 3}^{x_1}, \underbrace{\overbrace{-2M - 2}^{x_2}}_{\Uparrow}, \overset{s_2}{M} \right]$$

با توجه به این که مقدار $-2M-2$ بیشترین مقدار منفی را دارد، لذا متغیر x_2 به عنوان متغیر ورودی به پایه معرفی می شود.

گام ۲. متغیر خروجی از پایه را انتخاب کنید. برای این که بایستی ابتدا مقدار ضرایب متغیر x_2 در تمامی محدودیت ها را بدست آوریم.

$$a_2 = B^{-1}\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Min\left\{ \overset{s_1}{\frac{4}{1}}, \underset{\Uparrow}{\overset{R_2}{\frac{6}{2}}} \right\} = 3$$

متغیر R_2 از پایه خارج می شود.

گام ۳. B^{-1} جدید را محاسبه می کنیم.

$$x_B = [s_1, x_2]^T \quad x_N = [x_1, R_2, s_2]^T \quad c_B = [0, 2] \quad c_N = [3, -M, 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تکرار ۲

گام ۱. متغیر ورودی را تعیین کنید.

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} \overset{s_1}{0}, \overset{x_2}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{x_1}{2} & \overset{R_2}{0} & \overset{s_2}{0} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overset{x_1}{3}, \overset{R_2}{-M}, \overset{s_2}{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\Uparrow}{\overset{x_1}{-2}}, \overset{R_2}{M+1}, \overset{s_2}{-1} \end{bmatrix}$$

x_1 متغیر ورودی به پایه می شود.

گام ۲. متغیر خروجی را تعیین کنید.

$$a_1 = B^{-1}\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Min \left\{ \underset{\Uparrow}{\overset{s_1}{\frac{1}{\frac{3}{2}}}}, \overset{x_2}{\frac{3}{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{2}{3}$$

متغیر s_1 متغیر خروجی از پایه می شود.

گام ۳. B^{-1} جدید را محاسبه می کنیم.

$$x_B = [x_1, x_2]^T \quad x_N = [s_1, R_2, s_2]^T \quad c_B = [3, 2] \quad c_N = [0, -M, 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

تکرار ۳

گام ۱. متغیر ورودی را تعیین کنید.

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} N - c_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3, & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & R_2 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & R_2 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0, & -M, & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{s_1}{\frac{4}{3}}, \overbrace{M + \frac{1}{3}}^{R_2}, \underset{\Uparrow}{\overset{s_2}{\frac{-1}{3}}} \end{bmatrix}$$

متغیر s_2 وارد پایه می شود.

گام ۲. متغیر خروجی را تعیین کنید.

$$a_{s_2} = B^{-1}\bar{a}_{s_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Min \left\{ \underset{\Uparrow}{\overset{x_1}{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}}}, \overset{x_2}{-} \right\} = 2$$

آزمون نسبت فقط بر روی اعداد مثبت ستون مربوط به متغیر ورودی به پایه انجام می شود. لذا متغیر x_1 از پایه خارج می شود.

گام ۳. B^{-1} جدید را محاسبه کنید.

$$x_B = [s_2, x_2]^T \quad x_N = [s_1, R_2, x_1]^T \quad c_B = [0, 2] \quad c_N = [0, -M, 3]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تکرار ۴

گام۱. متغیر ورودی را تعیین کنید.

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} N - c_N = \begin{array}{c} s_2 \quad x_2 \\ \begin{bmatrix} 0, 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{ccc} s_1 & R_2 & x_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{array}{c} s_1 \quad R_2 \quad x_1 \\ \begin{bmatrix} 0, -M, 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} s_1 \quad R_2 \quad x_1 \\ \begin{bmatrix} 2, M, 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

چون مقادیر منفی در مقادیر محاسبه شده فوق وجود ندارد، به جواب بهینه رسیدم.

جواب بهینه به شرح ذیل است.

$$Z^* = c_B B^{-1} \bar{b} = \begin{array}{c} s_2 \quad x_2 \\ \begin{bmatrix} 0, 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 8$$

$$x_B = \begin{bmatrix} s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

روش سیمپلکس با متغیر حددار

در بسیاری از مسائل برنامه ریزی خطی با مواردی مواجه می شویم که متغیرهای تصمیم، حد بالا یا حد پایین مشخصی دارند. در این حالت شکل مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \le u_j, x_j \ge l_j \quad j = 1, \dots, n$$

u_j و l_j اعداد ثابتی اند که به ترتیب حداکثر میزان افزایش(حد بالایی) و کاهش (حد پایینی) متغیر x_j را نشان می دهند.

راهی ساده و غیرکارا برای حل این گونه مسائل، برخورد مشابه با متغیرهای حددار و دیگر محدودیت های کارکردی مسئله است. این شیوه برخورد در حل مسئله به افزایش محاسبات و کاهش کارایی حل می انجامد. از طرف دیگر، توجه به این نکته ضروری است که زمان لازم برای انجام محاسبات سیمپلکس از عوامل مختلفی تاثیر می پذیرد که تعداد محدودیت ها مهم ترین ان هاست. تجربه نشان داده زمان محاسبات تقریبا با توان سوم تعداد محدودیت های افزایش می یابد. برای مثال، اگر تعداد محدودیت ها دو برابر شود، زمان محاسبات $۲^۳=۸$ برابر افزایش می یابد. روش حل این مسائل به دو دسته متغیرهای با حد پایین و متغیرهای با حد بالا تقسیم می شود که در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

متغیرهای با حد پایین

در این قسیمت با حالتی مواجد می شوید که مسئله فقط دارای متغیرهایی با حد پایین است. شکل کلی مسئله به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m \\
&x_j \ge l_j \quad j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

محدودیت متغیر حد دار را می توان با کم کردن متغیر x'_j از آن به صورت تساوی درآورد:

$$x_j - x'_j = l_j \rightarrow x_j = l_j + x'_j$$

حال با تغییر فوق، یعنی جایگزین کردن $l_j+x'_j$ با x_j محدودیت حد پایین برای x_j را از لیست محدودیت ها حذف کرد. گام های حل مسائل با متغیرهای حد پایین به صورت زیر می شود:

گام۱. برای متغیرهای با حد پایین تغییر متغیر $x_j = l_j+x'_j$ را در سراسر مسئله انجام دهید.

گام۲. مسئله جدید حاصل از این تغیر متغیر را بدون در نظر گرفتن محدودیت حد پایین با استفاده از روش سیمپلکس حل کنید.

گام۳. تمامی متغیرهای x'_j بدست آمده در جدول نهایی را با استفاده از رابطه تغییر متغیر، مجددا به x_j تبدیل کنید.

مثال: مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= -x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_2 &\ge 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

مدل فوق را با استفاده از روش حد پایین حل کنید.

حل:

x_2 متغیری با حد پایین است یعنی مقدار x_2 از ۱ کمتر نمی شود. برای حذف این محدودیت کافی است تغییر متغیر زیر را انجام دهید.

$$x_2 = 1 + x'_2$$

در نتیجه مسئله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= -x_1 + 4x'_2 + 4 \\ -3x_1 + x'_2 &\le 5 \\ x_1 + 2x'_2 &\le 2 \\ x_1, x'_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

با استفاده از روش سیمپلکس، جواب بهینه مدل فوق به صورت زیر است.

$$x_1^* = 0, x_2'^* = 1, x_2^* = x_2'^* + 1 = 2, Z^* = 8$$

متغیرهای با حد بالایی (حد فوقانی)

در بسیاری از مسائل برنامه ریزی خطی، متغیرهای مسئله حد فوقانی دارند که بیانگر حداکثر مقادیر آن متغیر هستند. روش حد فوقانی روشی برای حل چنین مسائلی است. شکل کلی این مدل به صورت زیر است:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m$$
$$x_j \le u_j \quad j = 1,\dots,n$$

روش حد فوقانی روشی است که محدودیت حد فوقانی را از شکل محدودیت های کارکردی در می آورد و با آن ها جداگانه مانند محدودیت های غیرمنفی برخورد می کند.

مشکل اصلی در مورد متغیرهایی با حد فوقانی این است که تغییر متغیر مانند حالتی که برای حد پایین مطرح شد، درست نیست، زیرا تضمینی وجود ندارد که با انجام تغییر متغیر زیر مقدار xj غیرمنفی باقی بماند.

$$x_j = u_j - x'_j \rightarrow x_j + x'_j = u_j$$

برای روشن شدن اشکال فوق، مثالی می زنیم. فرض کنید محدودیت زیر در مفروض است:

$$x_j \le 3 \rightarrow x'_j = 3 - x_j , x'_j \ge 0$$

برای x_j' می توان مقدار ۵ را در نظر گرفت چون مقدار نامنفی است که در این صورت x_j برابر ۲- می شود که برخلاف فرض نامنفی بودن x_j است.

در روش سیمپلکس فرض بر این است که اعداد سمت راست در محدودیت ها غیرمنفی هستند که سبب می شود که مقدار متغیرهای اساسی نامنفی و موجه باشند. در روش حد فوقانی به جای اضافه کردن محدودیت حد فوقانی، تاثیر آن را می توان با تغییر شرایط موجه بودن جواب اساسی، جایگزین کرد. این

تغییر در شرط موجه بودن به این صورت است که متغیر در صورتی ناموجه است که (۱) مقدار آن منفی باشد و یا (۲) از حد فوقانی خود تجاوز کند.

در ادامه الگوریتم روش حد فوقانی بیان می شود. جزییات بیشتر در قالب حل یک مسئله بیان خواهد شد.

گام۱. جدول سیمپلکس را معمولی پر کنید ولی محدودیت های با حد فوقانی را وارد جدول نکنید.

گام۲. متغیر غیراساسی ورودی به پایه، x_k، را انتخاب کنید(متغیر با منفی ترین ضریب در سطر صفر)

گام۳. برای انتخاب متغیر خروجی نسبت های زیر را محاسبه کنید(a_{ik} ضرایب متغیر x_k در محدودیت های عملکردی هستند).

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}} \quad (i = 1,\dots,m), a_{ik} > 0$$
$$\alpha_i = \frac{u_i - b_i}{-a_{ik}} \quad (i = 1,\dots,m), a_{ik} < 0$$

u_k حد بالای متغیر ورودی است. انگاه حداقل مقدار $(\theta_i, \alpha_i, u_k)$ را محاسبه کنید. در این وضعیت سه حالت رخ می دهد:

حالت اول: حداقل مربوط به θ_r باشد. آن گاه x_k وارد پایه می شود و x_r از پایه خارج می شود. در این حالت با ورود x_k یک متغیر اساسی x_r مقدارش به صفر می رسد. این همان حالتی است که قبلا در روش سیمپلکس با آن برخورد داشتید.

حالت دوم: حداقل نسبت حاصل u_k باشد. آنگاه x_k غیراساسی باقی می ماند و به حد فوقانی خود می رسد. در این صورت متغیر ورودی تبدیل به متغیر خروجی می شود. متغیر (x_k) باید به متغیر $y_k=u_k-x_k$ تغییر داد، سپس به روش سیمپلکس عمل کرد. با این کار متغیر جدید y_k به صورت غیراساسی و با مقدار صفر خواهد ماند. چون امکان ورود به پایه را داشت ولی به حد بالای خود رسید.

حالت سوم: حداقل نسبت حاصل، α_r باشد. در این صورت متغیر اساسی مقابل عدد منفی ستون لولا (x_r) به حد فوقانی خود می رسد. در این صورت ابتدا تغییر متغیری برای آن به صورت $y_r=u_r-x_r$ داده می شود و عملیات طبق روش سیمپلکس ادامه می یابد. با این کار افزایش α_r در متغیر اساسی x_r انجام می شود و محاسبات زیادی برای جدول جدید سیمپلکس انجام نمی شود.

نکته: فرق حالت دوم و سوم این است که در حالت دوم تغییر متغیر برای متغیر غیراساسی که شرایط ورود به پایه را دارد انجام می شود ولی در حالت سوم، تغییر متغیر برای متغیر اساسی فعلی انجام می شود.

گام ۴ (دستور توقف): هر گاه تمامی اعداد سطر صفر غیر منفی شد، توقف کنید. به جواب بهینه رسیدید.

مثال: مسئله زیر را در نظر بگیرید. به روش سیمپلکس حد فوقانی جواب بهینه را بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= x_1+2x_2+x_3\\
& x_1+x_2+x_3\le 6\\
& -x_1+x_2+x_3\le 1\\
& x_1 \le 10\\
& x_2 \le 3\\
& x_3 \le 4\\
& x_1,x_2,x_3\ge 0
\end{aligned}
$$

حل:

گام۱. با اضافه کردن متغیرهای کمکی، مانند روش سیمپلکس مسئله وارد جدول زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-1	-2	-1	0	0	0
s_1	1	0	1	1	1	1	0	6
s_2	2	0	-1	1	1	0	1	1

گام۲. متغیر x_2 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود.

گام۳. برای تعیین متغیر خروجی مقدار زیر محاسبه می شود.

$$\theta_1 = \frac{6}{1} = 6$$
$$\theta_2 = \frac{1}{1} = 1$$

مقدار θ_1 به این معنا است که متغیر x_2 می تواند تا ۶ واحد افزایش یابد تا متغیر s_1 منفی نشود. مقدار θ_2 به این معنا است که متغیر x_2 می تواند تا ۱ واحد افزایش یابد تا متغیر s_2 منفی نشود. این همان مفهوم آزمون نسبت در روش سیمپلکس است.

چون اعداد ستون مربوط به x_2 مثبت هستند نیازی به محاسبه α نیست. حد بالای متغیر x_2 برابر ۳ است لذا داریم:

$$Min\{\theta_1, \theta_2, u_2\} = Min\{6,1,3\} = 1 = \theta_2$$

از آن جا که حداقل مربوط به θ_2 است(حالت اول گام۳)، x_2 وارد می شود و s_2 از پایه خارج می شود و عملیات دقیقا مشابه روش سمپلکس انجام می گیرد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	0	1	0	2	2
s_1	1	0	2	0	0	1	-1	5
x_2	2	0	-1	1	1	0	1	1

گام۳. از آنجا که عدد منفی (۳-) در سفر صفر وجود دارد، مسئله غیربهینه و x_1 متغیر ورودی است. برای تعیین متغیر خروجی نسبت های زیر محاسبه می شود.

$$\theta_1 = \frac{5}{2} = 2.5 \quad for \quad a_{11} = 2 > 0$$
$$\alpha_2 = \frac{3-1}{-(-1)} = 2 \quad for \quad a_{21} = -1 < 0$$

بنابراین،

$$Min\{\theta_1,\alpha_2,u_1\} = Min\{2.5,2,10\} = 2 = \alpha_2$$

توجه: برای سادگی در نمایش، θ_1 مقدار نسبت برای سطر ۱، α_2 مقدار نسبت برای سطر ۲، و u_1 حد بالا برای متغیر غیراساسی ستون ۱ خواهد بود.

این وضعیت حالت دوم گام ۳ را نشان می دهد. برای توضیح بیشتر معادله سطر ۲ را به صورت زیر داریم.

$$-x_1+x_2+x_3+s_2=1$$

متغیرهای x_3 و s_2 غیراساسی هستند و مقدار آن ها صفر است. لذا معادله فوق به صورت زیر می شود.

$$-x_1+x_2=1 \xrightarrow{x_2\le 3} x_1=x_2-1\le 3-1=2 \rightarrow x_1\le 2$$

مقدار x_1 می تواند تا دو واحد (α_2) افزایش یابد تا متغیر x_2 به حد بالای که برابر ۳ است برسد. در این صورت، x_1 وارد پایه و x_2 از پایه خارج می شود و در حد بالای خود قرار می گیرد. در این صورت، تغییر متغیر x_2 به $x_2=3-y_2$ انجام می شود تا متغیر x_2 در حد بالا قرار گیرد و متغیر جایگزین y_2 دارای مقدار صفر و در حد پایین خود قرار گیرد و غیراساسی خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&Z-3x_1+0\times x_2+x_3+0\times s_1+2s_2=2\\
&Z-3x_1+0\times(3-y_2)+x_3+0\times s_1+2s_2=2\\
&Z-3x_1\qquad\qquad\qquad +x_3+0\times s_1+2s_2=2
\end{aligned}$$

چون ضریب x_2 در جدول سیمپلکس صفر است، این تغییر متغیر تاثیر در ضرایب سطر صفر ندارد. برای سطر ۱ هم به همین صورت تغییری صورت نمی گیرد. در معادله سطر دوم متغیر x_2 وجود دارد لذا داریم.

$$\begin{aligned}
&-x_1+x_2+x_3+s_2=1\\
&-x_1+(3-y_2)+x_3+s_2=1\\
&-x_1-y_2+x_3+s_2=-2
\end{aligned}$$

با جایگذاری معادله بالا در سطر دوم خواهیم داشت.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	y_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	0	1	0	2	2
s_1	1	0	2	0	0	1	-1	5
y_2	2	0	-1	-1	1	0	1	-2

متغیر y_2 در جدول فوق، شرط متغیر اساسی را ندارد. همچنین سمت راست سطر دوم منفی شده است. با ضرب کردن سطر ۲ این جدول در ۱-، جدول زیر بدست می آید.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	y_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	0	1	0	2	2
s_1	1	0	2	0	0	1	-1	5
y_2	2	0	1	1	-1	0	-1	2

گام۳. از آن جا که ضریب x_1 در سطر صفر منفی است، برای تعیین متغیر خروجی، نسبت های زیر را دوباره محاسبه می کنیم. چون ۲ و ۱ (اعداد زیر ستون متغیر x_1) مثبت است نیازی به محاسبه α نیست.

$$\theta_1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\theta_2 = \frac{2}{1} = 2$$

$$Min\{\theta_1, \theta_2, u_1\} = Min\{2.5, 2, 10\} = 2 = \theta_2$$

چون حداقل نسبت حاصل θ_2 است، عملیات مانند روش سیمپلکس ادامه می یابد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	y_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	3	-2	0	-1	8
s_1	1	0	0	-2	2	1	1	1
x_1	2	0	1	1	-1	0	-1	2

x_3 متغیر ورودی است و نسبت های زیر محاسبه می شود. با توجه این که یکی از اعداد ستون x_3 مثبت و دیگری منفی است لذا مقادیر α و θ محاسبه می شود.

$$\theta_1=\frac{1}{2} \quad 2>0$$

$$\alpha_2=\frac{10-2}{1}=8 \quad -1<0$$

$$Min\{\theta_1,\alpha_2,u_3\}=Min\left\{\frac{1}{2},8,4\right\}=\theta_1$$

مجددا مانند حالت اول گام ۳ عمل می شود و جدول سیمپلکس به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	y_2	x_3	s_1	s_2	طرف سمت راست
Z	0	1	0	1	0	1	0	9
x_3	1	0	0	-1	1	0.5	0.5	0.5
x_1	2	0	1	0	0	0.5	-0.5	2.5

جدول فوق شرط بهینگی را دارد لذا جواب بهینه به صورت زیر است.

$$x_1^*=\frac{5}{2},y_2^*=0\rightarrow x_2^*=3,x_3^*=\frac{1}{2},Z^*=9$$

در مسئله قبل، حالت دوم گام ۳ رخ نداد. در مثال زیر این وضعیت را بررسی می کنیم.

مثال:

$$\begin{aligned}
Max\ Z &= 3x_1+5x_2\\
x_1 &\le 4\\
2x_2 &\le 12\\
3x_1+2x_2 &\le 18\\
x_1,x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

حل:

باتوجه به اینکه می توان محدودیت دوم را به صورت حد بالا برای متغیر x_2 با مقدار ۶ در نظر گرفت، لذا تنها با اضافه کردن یک متغیر لنگی می توان مدل را به جدول سیمپلکس انتقال داد.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	x_2	s_1	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	-5	0	0
s_1	1	0	3	2	1	18

x_2 متغیر ورودی است و $\theta_1 = 9$ و همچنین:

$$Min\{\theta_1, u_2\} = \{9, 6\} = 6 = u_2$$

با ورود x_2 این متغیر غیراساسی به حد فوقانی خود می رسد و باید برای آن تغییر متغیر داد: $x_2=6-y_2$

جدول سیمپلکس براساس این تغییر متغیر به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	y_2	s_1	طرف سمت راست
Z	0	1	-3	5	0	30
s_1	1	0	3	-2	1	6

x_1 متغیر ورودی خواهد بود و داریم:

$$\theta_1 = \frac{6}{3} = 2$$
$$Min\{\theta_1, u_1\} = \{2, 4\} = 2 = \theta_1$$

و جدول نهایی به صورت زیر می شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	x_1	y_2	s_1	طرف سمت راست
Z	0	1	0	3	1	36
x_1	1	0	1	-0.66	0.33	2

جواب بهینه به صورت زیر خواهد شد:

$$x_1^* = 2, y_2^* = 0 \rightarrow x_2^* = 6, Z^* = 36$$

تمرین: کارخانه‌ای تولید یکی از محصولات غیرسودآور خط تولید خود را متوقف ساخته است که در این صورت ظرفیت تولیدی قابل ملاحظه‌ای آزاد کرده است. از این ظرفیت ایجاد شده برای تولید سه محصول ۱،۲، و ۳ استفاده می‌شود. ظرفیت آزاد ماشین الات مورد نیاز این سه محصول به صورت زیر است.

نوع ماشین	زمان موجود (ماشین ساعت در هفته)
فرز	500
تراش	350
سنگ	150

میزان ماشین ساعت لازم برای تولید سه محصول به صورت زیر است:

نوع ماشین	محصول 1	محصول 2	محصول 3
فرز	9	3	5
تراش	5	4	0
سنگ	3	0	2

دپارتمان فروش با مطالعه بازار به این نتیجه رسیده است که تولید محصولات ۱ و ۲ به هر میزان در بازار خواهان دارد ولی فروش محصول ۳ در هر هفته بیش از ۲۰ واحد مسیر نیست. سود محصول‌های ۱، ۲، و ۳ به ترتیب برابر با ۵۰، ۲۰، و ۲۵ است.

الف) مدل برنامه‌ریزی خطی فوق را با هدف حداکثر کردن سود فرمول بندی کنید.

ب)مسئله را با روش سیمپلکس حل نمایید.

حل: x_i را تعداد محصول نوع i در هر هفته در نظر بگیرید($i=1,2,3$).

مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 50x_1 + 20x_2 + 25x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 500 \\
&\quad (2) \quad 5x_1 + 4x_2 \qquad \le 300 \\
&\quad (3) \quad 3x_1 \qquad + 2x_3 \le 150 \\
&\quad (4) \qquad\qquad\quad x_3 \le 20 \\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,3.
\end{aligned}$$

محدودیت ۱ همان محدودیت ظرفیت فرز، محدودیت۲ همان محدودیت تراش، محدودیت ۳ همان محدودیت سنگ، محدودیت ۴ همان محدودیت کشش بازار است.

ب) برای حل مدل فوق، ابتدا مدل را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 50x_1 + 20x_2 + 25x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1) \quad 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 500 \\
&\quad (2) \quad 5x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = 300 \\
&\quad (3) \quad 3x_1 \qquad + 2x_3 \qquad\quad + x_6 = 150 \\
&\quad (4) \qquad\qquad\quad x_3 \qquad\qquad\quad + x_7 = 20 \\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,7.
\end{aligned}$$

حل مدل فوق با استفاده روش سیمپلکس اولیه به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	1	-50	-20	-25	0	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	9	3	0	1	0	0	0	500	500/9
X_5	2	0	5	4	0	0	1	0	0	350	350/5
X_6	3	0	3	0	2	0	0	1	0	150	کمینه 150/3
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	-20	-8.33	0	0	16.66	0	2500	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	0	3	-1	1	0	-3.33	0	50	کمینه 50/3
X_5	2	0	0	4	-3.33	0	1	-1.667	0	100	100/4
X_1	3	0	1	0	0.667	0	0	0.33	0	50	
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	0	1.66	6.66	0	-3.3	0	2833.3	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	0	1	-0.33	0.33	0	-1	0	16.6	
X_5	2	0	0	0	-2	-1.33	1	2.33	0	33.3	کمینه 33.3/2.33
X_1	3	0	1	0	0.66	0	0	0.33	0	50	50/0.33
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	
Z	0	1	0	0	-1.19	4.76	1.428	0	0	2880.9	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	0	1	-1.19	-0.238	0.428	0	0	30.9	
X_6	2	0	0	0	-0.85	-0.57	0.428	1	0	14.28	
X_1	3	0	1	0	0.95	0.19	-0.142	0	0	45.23	45.23/0.95
X_7	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	کمینه 20/1
Z	0	1	0	0	0	4.76	1.42	0	1.19	2904	جدول بهینه
X_2	1	0	0	1	0	-0.238	0.428	0	1.195	54.76	
X_6	2	0	0	0	0	-0.57	0.42	1	0.85	31.42	
X_1	3	0	1	0	0	0.19	-0.142	0	-0.95	26.19	
X_3	4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	

جواب بهینه به صورت $(x_1,x_2,x_3)=(26.19,54.76,20)$ و $Z^*=2904.76$ می‌شود. میزان کمبود و هزینه‌های سایه به صورت زیر می‌شود.

محدودیت	میزان کمبود یا مازاد	هزینه سایه
1	0	4.76
2	0	1.428
3	31.42	0
4	0	1.19

تمرین: مسئله زیر را به روش سیمپلکس حل نمایید.

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 30 \\
&\quad (2)\quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40 \\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

حل: ابتدا مدل فوق را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 30 \\
&\quad (2)\quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 = 40 \\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,5.
\end{aligned}$$

فرایند حل به روش سیمپلکس به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	طرف سمت راست	
Z	0	1	-4	-3	-6	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_4	1	0	3	2	3	1	0	30	30/3 کمینه
X_5	2	0	2	2	3	0	1	40	40/3
Z	0	1	2	1	0	2	0	60	جدول بهینه
X_3	1	0	1	0.66	1	0.333	0	10	
X_5	2	0	-1	0	0	-1	1	10	

شرط بهینگی برقرار شده است و جواب بهینه برابر $(0,0,10,0,10)$ و $Z^*=60$ است.

تمرین: مسئله زیر مفروض است.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
&s.t. \\
&\qquad (1)\quad 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 50 \\
&\qquad (2)\quad 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \le 40 \\
&\qquad (3)\quad 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 20 \\
&\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

با استفاده از روش سیمپلکس نشان دهید که مدل فوق جواب نامحدود دارد.

حل: شکل استاندارد مدل فوق به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
&s.t. \\
&\qquad (1)\quad 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + x_5 = 50 \\
&\qquad (2)\quad 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + x_6 = 40 \\
&\qquad (3)\quad 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_7 = 20 \\
&\qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,7.
\end{aligned}
$$

روند حل با استفاده از روش سیمپلکس به صورت زیر است.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	طرف سمت راست	
Z	0	1	-3	-1	-5	-4	0	0	0	0	جدول غیر بهینه
X_5	1	0	3	-3	2	8	1	0	0	50	25=50/2
X_6	2	0	5	6	-4	-4	0	1	0	40	
X_7	3	0	4	-2	1	3	0	0	1	20	20=20/1 کمینه
Z	0	1	17	-11	0	11	0	0	5	100	جدول غیر بهینه
X_5	1	0	-5	1	0	2	1	0	-2	10	10/1 کمینه
X_6	2	0	21	-2	0	8	0	1	4	120	
X_3	3	0	4	-2	1	3	0	0	1	20	
Z	0	1	-38	0	0	33	11	0	-17	210	جدول غیر بهینه
X_2	1	0	-5	1	0	2	1	0	-2	10	
X_6	2	0	11	0	0	12	2	1	0	140	140/11 کمینه
X_3	3	0	-6	0	1	7	2	0	-3	40	
Z	0	1	0	0	0	74.45	17.9	3.45	-17	693	جواب بینهایت
X_2	1	0	0	1	0	7.45	1.9	0.45	-2	73.63	
X_1	2	0	1	0	0	1.09	0.18	0.09	0	12.72	
X_3	3	0	0	0	1	13.54	3.09	0.545	-3	116.36	

در جدول فوق، ستون زیر متغیر x_7 ، نامثبت هستند و لذا شروط نامحدود بودن برقرار می‌شود و با افزایش دو متغیر x_2 و x_3 مقدار تابع هدف به سمت بی نهایت می رود.

تمرین: یک کارخانه تولید آلیاژهای صنعتی، به دنبال تولید یک آلیاژ جدیدی است که از ترکیب ۴۰ درصد قلع، ۳۵ درص زینک، و ۲۵ درصد سرب تولید می‌شود که از ۵ آلیاژ فعلی در کارخانه تهیه می‌شوند. ویژگی آلیاژهای در دسترس به صورت زیر است:

به / از	آلیاژ 1	2	3	4	5
درصد قلع	60	25	45	20	50
درصد زینک	10	15	45	50	40
درصد سرب	30	60	10	30	10
هزینه تولید	77	70	88	84	94

گروه تحقیق در عملیات این کارخانه به دنبال یافتن سهم هر آلیاژ برای تولید آلیاژ جدید است به نحوی که هزینه حداقل شود. مسئله فوق را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی بنویسید.

حل:

x_1 را برابر میزان آلیاژ نوع i در نظر بگیرید که $i=1,\dots,5$

$$\begin{aligned}
&Min\ Z = 77x_1 + 70x_2 + 88x_3 + 84x_4 + 94x_5\\
&s.t.\\
&\quad (1)\quad 60x_1 + 25x_2 + 45x_3 + 20x_4 + 50x_5 = 40\\
&\quad (2)\quad 10x_1 + 15x_2 + 45x_3 + 50x_4 + 40x_5 = 25\\
&\quad (3)\quad 30x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 30x_4 + 10x_5 = 15\\
&\quad (4)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1\\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,5.
\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل فوق برابر با $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0.0435, 0.2826, 0.6739, 0, 0)$ و $Z^* = \$84.43$ زیر است.

تمرین: مدل زیر را در نظر بگیرید:

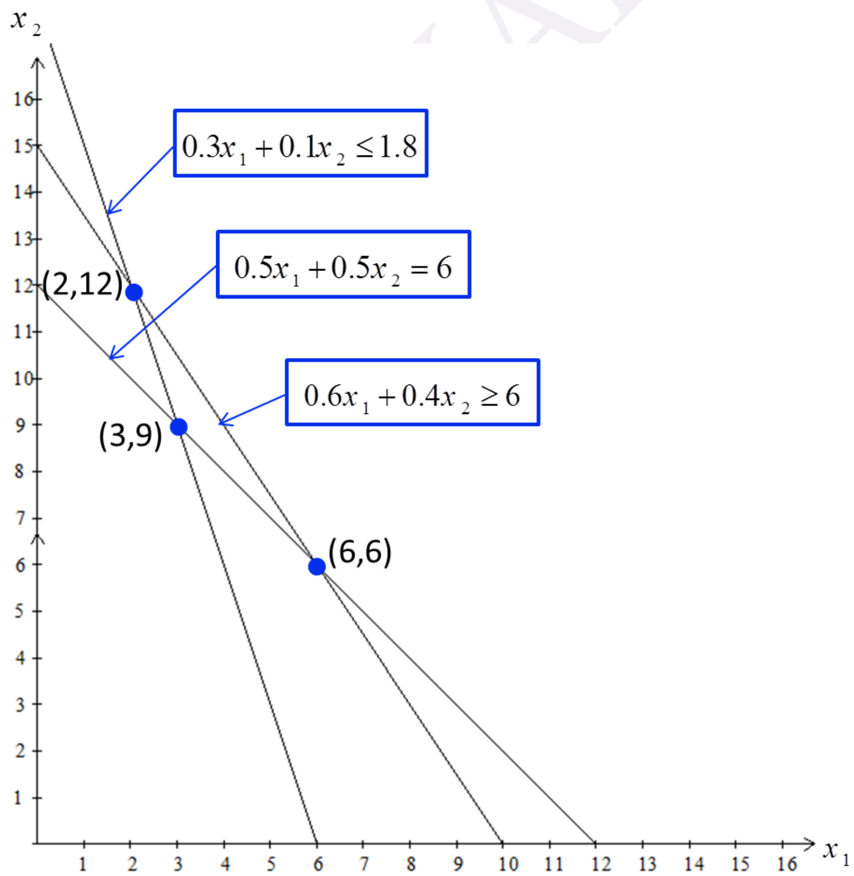
$$
\begin{aligned}
&Min\ Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\
&s.t. \\
&\quad (1)\quad 0.3x_1 + 0.1x_2 \le 1.8 \\
&\quad (2)\quad 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\
&\quad (3)\quad 0.6x_1 + 0.4x_2 \ge 6 \\
&\qquad\quad x_i \ge 0 \quad i = 1,2.
\end{aligned}
$$

الف) مدل فوق را به روش ترسیمی حل نمایید.

ب)مدل فوق را به روش M-بزرگ حل نمایید.

حل:

الف) در شکل ذیل، محدوده امکان پذیر تهی است و لذا این مسئله امکان ناپذیر است.



ب) برای حل مدل فوق به روش سیمپلکس، باید مدل برنامه‌ریزی خطی را از *min* به *Max* و همچنین با اضافه کردن متغیری کمبود، مازاد و مصنوعی، به فرم استاندارد تبدیل کرد. فرم استاندارد به صورت زیر می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&Max\ -Z+0.4x_1+0.5x_2+Mx_4\quad+Mx_6\\
&s.t.\\
&\quad(1)\quad 0.3x_1+0.1x_2+x_3 \qquad\qquad =1.8\\
&\quad(2)\quad 0.5x_1+0.5x_2 \quad +x_4 \qquad\quad =6\\
&\quad(3)\quad 0.6x_1+0.4x_2 \qquad\quad -x_5+x_6=6\\
&\qquad\quad x_i\ge 0\quad i=1,6.
\end{aligned}
$$

همان طور که در آموزش روش *M* بزرگ بیان شد، قبل از ورود به جدول سیمپلکس باید مقدار ضریب متغیرهای x_4 و x_6 در تابع هدف صفر کرد. پس از اعلام این تغییرات ، جدول سیمپلکس به صورت زیر می‌شود.

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	طرف سمت راست	
Z	0	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M	جدول غیر بهینه
X_3	1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	1.8	1.8/0.3 کمینه
X_4	2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6	6/0.5
X_6	3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6	6/0.5
Z	0	1-	0	-0.533M +0.367	3.67M-1.33	0	M	0	-5.4M-2.4	جدول غیر بهینه
X_1	1	0	1	0.33	3.33	0	0	0	6	6/0.33
X_4	2	0	0	0.33	-1.667	1	0	0	3	3/0.33 کمینه
X_6	3	0	0	0.2	-2	0	-1	1	2.4	2.4/0.2
Z	0	-1	0	0	M+0.5	1.6M-1.1	M	0	-0.6M-5.7	جدول بهینه
X_1	1	0	1	0	5	-1	0	0	3	
X_2	2	0	0	1	-5	3	0	0	9	
X_6	3	0	0	0	-1	-0.6	-1	1	0.6	

در تابلو آخر، با توجه به این که *M* مقدار بزرگی است، شرط بهینگی برقرار است ولی $x_6=0.6$ است که بزرگتر از صفر است که به این معنا است که مدل اصلی فاقد جواب است.

برای دریافت بسته های آموزشی گروه **بهینه یاب** به وب سایت ما به نشانی www.behinehyab.com مراجعه کنید.

در صورت هر گونه سوال از طریق ایمیل به نشانی *behinehyab@gmail.com* و یا بخش تماس با ما وب سایت گروه **بهینه یاب** با ما در تماس باشید.

با تشکر از توجه شما

گروه آموزشی **بهینه یاب**